УДК 514.77; 530.12

ПЛОСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ 2-ФОРМЫ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА*

С.Е. Степанов

(*Владимирский государственный педагогический университет)*

1. Введение. В настоящей работе изучаются плоские дифференциальные 2-формы [1],[2] на (псевдо) римановом многообразии. Даны приложения установленных фактов в релятивистской электродинамике. В заключении описаны все плоские 2-формы в евклидовом пространстве и построены примеры плоских 2-форм на гиперповерхности евклидова пространства.

2. Плоские 2-формы. Рассмотрим n-мерное (псевдо)риманово многообразие M с метрикой g и связностью Леви-Чивита. Дифференциальная 2-форма ω называется плоской, если ее компоненты ω_{ij}, найденные в локальной системе координат $\{x^1,...,x^n\}$, подчиняются уравнениям

$$\nabla_k\omega_{ij} = g_{ki}\theta_j - g_{kj}\theta_i \ , \qquad (2.1)$$

где $\theta_j = (n-1)^{-1}\nabla^k\omega_{kj}$, $\nabla_k = g_{ki}\nabla^i$ -символ ковариантного дифференцирования в направлении $\partial/\partial x^k$ и g_{ki} - компоненты g. Из (2.1) автоматически следует $\nabla_{[k}\omega_{ij]} = 0$, т.е. $d\omega$ =0. Также непосредственно проверяется, что компоненты ω_{ij} плоской 2-формы ω обращают в нуль тензор Нейенхейса

$$N^k_{ij} = 2(\omega^k_i\nabla_t\omega^t_j - \omega^t_j\nabla_t\omega^k_i + \omega^k_t\nabla_j\omega^t_i - \omega^k_t\nabla_i\omega^t_j)$$

Рассмотрим случай, когда плоская 2-форма удовлетворяет тождеству Якоби [3, с. 83], которому на (псевдо)римановом многообразии в терминах ковариантного дифференцирования придадим следующий вид: $\omega^t_{[i}\nabla_{|t|}\omega_{jk]} = 0$. В случае плоской 2-формы тождество Якоби перепишется так: $\omega\wedge\delta\ \ \omega$ =0 для $(\delta\omega)_j = -\nabla^k\omega_{kj}$. Верно и обратное. Следовательно плоская 2-форма ω, удовлетворяющая тождеству Якоби, является вырожденной.

Воспользуемся тождествами Риччи

$$\nabla_k\nabla_l\omega_{ij} - \nabla_l\nabla_k\omega_{ij} = -\omega_{tj}R^t_{ikl} - \omega_{it}R^t_{jkl} \ ,$$

которые в случае (псевдо)риманова многообразия M постоянной кривизны C и плоской 2-формы ω принимают вид

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 94-01-01595

$$(n-2)\nabla_i\theta_j = -n\,C\,\omega_{ij}\,. \qquad (2.2)$$

Откуда находим $\omega_{ij} = -\dfrac{n-2}{n}C^{-1}\nabla_i\theta_j$ для $C\neq 0$ и киллинговой 1-формы θ_j.

Верно и обратное. Действительно, для киллинговой 1-формы имеем [4, с.50]

$$\nabla_k\nabla_j\theta_i = -\theta_l R^l_{kij} = C(g_{ik}\theta_j - g_{jk}\theta_i)\ ,$$

поэтому, дифференцируя левую и правую части (2.2), получим

$$\nabla_k\omega_{ij} = g_{ki}\theta'_j - g_{kj}\theta'_i$$

для $\theta'_j = \frac{n-2}{n}\theta_j$. Итогом рассуждений будет

Теорема 2.1. На (псевдо)римановом многообразии M каждая плоская 2-форма ω обладает следующими свойствами:

1) форма является замкнутой;
2) компоненты формы обращают в нуль тензор Нейенхейса;
3) форма удовлетворяет тождеству Якоби только когда $\omega\wedge\delta\,\omega=0$;
4) форма имеет вид $\omega=n^{-1}(n\text{-}2)C^{-1}\nabla\theta$ для киллинговой 1-формы θ,

если M имеет постоянную кривизну C.

Рассмотрим на (псевдо)римановом многообразии M симметричное тензорное поле G с компонентами

$$G_{ij} = \omega_{ik}\omega_j{}^k - \tfrac{1}{2}(\omega_{kl}\omega^{kl})g_{ij}\ .$$

Непосредственные расчеты показывают, что $\nabla_{(k}G_{ij)} = 0$ и

$\nabla^k G_{kj} = (2-n)\omega^l_j\theta_l$. Справедлива следующая

Теорема 2.2. Если (псевдо)риманово многообразие M допускает плоскую 2-форму ω, то это же многообразие допускает и квадратичный первый интеграл движения для геодезических, задаваемый тензорным полем G=-($\omega^2 + \frac{1}{2}\|\omega\|^2 g$).

Если всюду на компактном ориентированном римановом многообразии M справедливы соотношения

$$\Phi_2(G,G) = R_{ij}G^{ik}G^j_k - R_{ikjl}G^{ij}G^{kl} = \frac{1}{2}\sum_{i<j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \le 0\ , \qquad (2.3)$$

то согласно [5] будем иметь $\nabla G=0$ и $\delta G=0$. В (2.3) мы полагали $G_{ij}=\lambda_i\,\delta_{ij}$ в ортонормированном базисе $\{e_1,\dots,e_n\}$. Доказана

Теорема 2.3. На компактном ориентированном римановом многообразии неположительной секционной кривизны не существует невырожденных плоских 2-форм.

Если многообразие M является локально неприводимым, то из равенства $\nabla_к G_{ij}=0$ следует, что $G_{ij}=\lambda g_{ij}$. В нашем случае это равносильно равенству

$$\omega_{ik}\omega_j{}^k = n^{-1}\|\omega\|^2 g_{ij}\ .$$

Условие $\nabla^k G_{kj} = (2-n)\omega^l{}_j\theta_l = 0$ при n>2 будет тогда означать, что $\nabla\omega=0$. Справедливо

Следствие 2.4. На n-мерном (n>2) локально неприводимом компактном ориентированном римановом многообразии неположительной секционной кривизны не существует плоских 2-форм, отличных от ковариантно постоянных.

3. Специальные уравнения Максвелла. Рассмотрим 4-мерное пространство-время M с метрикой g сигнатуры (-+++). Известно [7, с.233], что тензор F электромагнитного поля задает на M замкнутую 2-форму. Следствием этого будет разложение ∇F на две части [1], соответствующие неприводимым компонентам действия ортогональной группы в $T_x M$. Второй компоненте разложения соответствуют уравнения плоской 2-формы:

$$\nabla_k F_{ij} = \frac{4\pi}{3}(g_{kj}I_i - g_{ki}I_j) \tag{3.1}$$

для 4-вектора тока I^i . Из (3.1) автоматически следуют уравнения Максвелла $\nabla_k F^{ik} = 4\pi I^i$ при наличии заряда [6, с.223]. Следствием уравнений (3.1) будет закон сохранения заряда $\nabla_i I^i = 0$.

Непосредственные расчеты показывают, что тензор энергии импульса электромагнитного поля

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}(F_{ik}F_j{}^k - \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}g_{ij})$$

является бесследовой частью тензора G, который строится здесь из компонент F как и во втором параграфе. Тогда [8, с. 339-340] тензор энергии импульса T должен будет задавать квадратичный первый интеграл движения для изотропных геодезических. Доказана

Теорема 3.1. Если тензор электромагнитного поля F подчиняется специальным уравнениям Максвелла (3.1), то тензор энергии импульса электромагнитного поля T задает первый квадратичный интеграл движения для изотропных геодезических.

На основании теоремы 2.1 и уравнений (3.1) работы автора [2] может быть сформулирована

Теорема 3.2. Специальные уравнения Максвелла (3.1) вполне интегрируемы в пространствах-временах де Ситтера, которые являются многообразиями постоянной кривизны $C=\pm r^{-2}$ и при этом $F_{ij} = \pm\frac{4}{3}\pi r^2 \nabla_i I_j$.

Для плоского пространства-времени в лоренцовой системе координат $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ из (2.2) выводим $I=(c^0, c^1, c^2, c^3)$, а потому интегралами уравнений (3.1) будут

$$F_{ab} = 4\pi/3\,(c_a x_b - c_b x_a + c_{ab})$$

для произвольных постоянных ковектора c_a и тензора $c_{ab} = c_{ba}$ при a,b=0,1,2,3.

4. Примеры плоских 2-форм. Рассмотрим в n-мерном (псевдо)римано-вом многообразии M (невырожденную) гиперповерхность M’, задаваемую локально уравнениями $x^i = x^i(u^\alpha)$. Полагаем $B^i_\alpha = \partial x^i / \partial u^\alpha$, тогда индуцированная на M’ метрика g’ имеет компоненты $B^i_\alpha B^j_\beta g_{ij}$. Вторая фундаментальная форма $H^i_{\alpha\beta}$ гиперповерхности M’ задается равенствами $H^i_{\alpha\beta} = \nabla'_\alpha B^i_\beta$, где ∇' - индуцированная на M’ связность Леви -Чивита.

Пусть ω_{ij} - кососимметричное тензорное поле на M, его касательная и нормальная компоненты на M’ определяются равенствами

$$t\omega_{\alpha\beta} = B^i_\alpha B^j_\beta \omega_{ij} \ , \ \ n\omega_\beta = N^i B^j_\beta \omega_{ij} \ ,$$

где N^i - единичное векторное поле на M’, ортогональное TM’. Тогда

$$\nabla_\gamma t\omega_{\alpha\beta} = B^i_\alpha B^j_\beta B^k_\gamma \nabla_k \omega_{ij} + H^i_{\alpha\gamma} B^j_\beta \omega_{ij} + B^i_\alpha H^j_{\beta\gamma} \omega_{ij} \ . \tag{4.1}$$

Предположим,что ω_{ij} -компоненты плоской 2-формы, а M’-вполне омбилическое подмногообразие, т.е. $H^i_{\alpha\beta} = H g'_{\alpha\beta} N^i$ для $H = (n-1)^{-1} g_{ij} g'^{\alpha\beta} H^i_{\alpha\beta} N^j$.

Тогда равенство (4.1) принимает следующий вид:

$$\nabla_\gamma t\, \omega_{\alpha\beta} = g'_{\gamma\alpha}\theta'_\beta - g'_{\gamma\beta}\theta'_\alpha \tag{4.2}$$

для $\theta'_\beta = (n-1)^{-1} t\, \theta_\beta + H n\omega_\beta$. Справедлива

Теорема 4.1. Касательная компонента плоской 2-формы ω на вполне омбилической (невырожденной) гиперповерхности M’ (псевдо)риманова многообразия M является плоской 2-формой.

Полагаем,что $M=E^n$, а M’-гиперсфера S^{n-1} радиуса r. Пусть гиперсфера задается уравнением $x = x^i(u^\alpha) e_i$ в ортонормированном репере $\{0, e_1, ..., e_n\}$. Уравнения Гаусса-Вейнгартена гиперсферы имеют вид:

$$\nabla'_\alpha x^i_\beta = -\frac{1}{r} g'_{\alpha\beta} N^i \ , \ \nabla'_\alpha N^i = \frac{1}{r} x^i_\alpha \tag{4.3}$$

для $x^i_\alpha = \partial x^i / \partial u^\alpha$, $N^i = r^{-1} x^i$, $\sum_{i=1}^{n} x^i x^i_\alpha = 0$.

На основании (2.2) заключаем, что в E^n уравнения (2.1) плоской 2-формы имеют интегралы вида:

$$\omega_{ij} = x_i c_j - x_j c_i + c_{ij} \tag{4.4}$$

для призвольных постоянных ковектора c_i и тензора $c_{ij} = c_{ji}$. Тогда

$$t\,\omega_{\alpha\beta} = c_{ij} x^i_\alpha x^j_\beta \qquad (4.5)$$

и в следствии (4.3) мы опять приходим к уравнениям (4.2), где уже
$\theta'_\alpha = -(n-1)^{-1} r^{-2} c_{ij} x^i x^j_\alpha$. Доказана

Теорема 4.2. Плоские 2-формы в E^n задаются формулами (4.4), при этом их касательные компоненты на гиперсфере S^{n-1} имеют вид (4.5) и также являются плоскими 2-формами.

5. Связь с киллинговыми формами. Пусть $\omega_{i_1 \ldots i_p}$-компоненты плоской p-формы на (псевдо)римановом многообразии M. Введем оператор Ходжа $*$, полагая

$$(*\omega)_{i_{p+1} \ldots i_n} = \frac{1}{p!} \eta_{i_1 \ldots i_p i_{p+1} \ldots i_n} \omega^{i_1 \ldots i_p} \qquad (5.1)$$

для элемента объема $\eta_{i_1 \ldots i_n} = \sqrt{\left|\det\left(g_{ij}\right)\right|}\,\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$. Тогда [2]

$$\nabla_k (*\omega)_{i_{p+1} \ldots i_n} = \frac{1}{(p-1)!} \eta_{k i_2 \ldots i_p i_{p+1} \ldots i_n} \theta^{t_2 \ldots t_p},$$

где $\theta_{i_2 \ldots i_p} = (n-p+1)^{-1} \nabla^k \omega_{k i_2 \ldots i_p}$. А потому
$\nabla_k (*\omega)_{i_{p+1} \ldots i_n} = -\nabla_{i_{p+1}} (*\omega)_{k \ldots i_n}$. Доказана

Теорема 5.1. Для оператора Ходжа $*$ и произвольной p-формы ω на (псевдо)римановом многообразии M (n-p)-форма ($*\,\omega$)-киллинговая.

Библиографический список

1. Stepanov S.E. The seven classes of almost symplectic structures // Webs and quasigroups. Tver: Tver State University, 1992. P.93-96.
2. Степанов С.Е. Плоские дифференциальные формы // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1995. Вып. 26. С.84-89.
3. Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. М.: ИЛ, 1988. 413 с.
4. Яно К. Бохнер С . Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957. 152 с.
5. Степанов С.Е. Поля симметрических тензоров на компактном римановом многообразии // Математические заметки. 1992. Т. 52. Вып.4. С.85-88.
6. Широков А.П. Постоянные поля векторов и тензоров второго порядка в Riemann'овых пространствах // Изв. Физ.-мат. о-ва. Казань, 1925. Т.25. С.86-114.
7. Мизнер Ч. и др. Гравитация. М.: Мир, 1977. Т.2. 525 с.
8. Крамер Д. и др. Точные решения уравнений Эйнштейна. М.: Энергоиздат, 1982. 416 с.

S. E. S t e p a n o v

PLANE DIFFERENTIAL 2-FORMS AND SPECIAL MAXWELL'S EQUATIONS

The author studies plane 2-forms which by virtue of their closureness can be considered in the capacity of symplectic structures on a Riemann manifold. The opportunity was indicated by the application of the theory of plane forms to the relativistic electrodynamics. In conclusion all plane 2-forms were found in the Euclidean space and plane 2-forms of a hypersphere of the Euclidean space were constructed were constructed.

УДК 514.75

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОМПЛЕКСЫ, ПОРОЖДЁННЫЕ КВАДРИКОЙ И ТОЧКОЙ, НЕ ИНЦИДЕНТНОЙ КВАДРИКЕ

Т.П.Ф у н т и к о в а

(Калининградский государственный университет)

В трёхмерном аффинном пространстве рассматриваются вырожденные комплексы $(QP)_{3,2}$, порождённые квадрикой Q и точкой P, не инцидентной квадрике, причём многообразие квадрик Q - трёхмерное, а точек P - двумерное. Изучен класс вырожденных комплексов $(QP)_{3,2}$, для которых центры квадрик Q описывают линию (P*).

Между образующими элементами вырожденного комплекса $(QP)_{3,2}$ устанавливается соответствие, при котором каждой квадрике Q соответствует единственная точка P, полным прообразом которой является однопараметрическое семейство квадрик Q_p. Устанавливается также соответствие между множествами точек (P*) и (P), при котором каждой точке P* соответствует на поверхности (P) линия Γ_{p*} .

Отнесём вырожденный комплекс $(QP)_{3,2}$ к реперу R = $\{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, который характеризуется следующим образом: точка A совмещена с центром P* квадрики Q, вектор $\bar{e}_1$ направлен по касательной к линии центров (P*) квадрик Q , направления векторов $\bar{e}_2, \bar{e}_3$ сопряжены направлению вектора $\bar{e}_1$ относительно квадрики Q. Концы векторов $\bar{e}_\alpha$ (точки A_α, α=1, 2, 3) инцидентны квадрике Q.

Квадрика (эллипсоид) Q в репере R задаётся уравнением

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0 .$$

Квадрике Q соответствует на поверхности (P) точка $\overline{P} = \overline{A} + t\bar{e}_3$.

Так как вектор $\bar{e}_1$ направлен по касательной к линии (P*), то $d\overline{A} = \lambda\bar{e}_1$, следовательно:

$$\omega^2 = 0,\ \ \omega^3 = 0,\ \ \omega_1^2 = a\omega^1,\ \ \omega_1^3 = b\omega^1. \tag{1}$$

Многообразие (P) двумерное, значит:

$$rang(\omega^1 + t\omega_3^1;\ \ t\omega_3^2;\ \ dt + t\omega_3^3) = 2 . \tag{2}$$