УДК 514.76

Н.Д. Никитин , ***О.Г. Никитина***
Пензенский государственный университет, Россия
nikitina1005@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-5

Об аффинных движениях с одномерными орбитами в общих пространствах путей

Понятие общего пространства путей ввел Дж. Дуглас. Аффинные и проективные движения в этих пространствах первым начал рассматривать М.С. Кнебельман. Общее пространство путей является обобщением пространства аффинной связности. В статье исследуются пространства путей, допускающие группы аффинных движений с одномерными орбитами. Для каждого представления абелевой алгебры Ли и алгебры L_r, содержащей абелев идеал $L_{r\text{-}1}$, в виде алгебры векторных полей составляется система уравнений инфинитезимальных аффинных движений. Векторные поля каждого из этих представлений являются операторами группы преобразований с одномерными орбитами. Путем интегрирования системы определяются общие пространства путей, допускающие группу аффинных движений с одномерными орбитами, операторами которой являются векторные поля этих представлений. Установлен максимальный порядок этих групп. Показано, что пространства путей, допускающие группу аффинных движений с одномерными орбитами максимального порядка, являются проективно плоскими. Приводятся условия, необходимые и доста-

---

Поступила в редакцию 23.04.2024 г.

точные для того, чтобы пространство путей допускало группу аффинных движений с одномерными орбитами максимального порядка.

Ключевые слова: касательное расслоение, общее пространство путей, проективно плоское пространство, производная Ли, инфинитезимальное аффинное преобразование

Пусть M — n-мерное дифференцируемое многообразие, $T(M)$ — его касательное расслоение, $\pi\colon T(M) \to M$ — каноническая проекция [3].

Общее пространство путей есть пара (M, H) [1; 8], где H — дифференциально-геометрический объект, заданный на касательном расслоении. Пусть (x^i), где $i = \overline{1,n}$, — система координат окрестности $U \subset M$. В окрестности $\overline{U} = \pi^{-1}(U)$ относительно индуцированных координат (x^i, y^j) объект имеет компоненты $H^i(x^1, \dots, x^n,\ y^1, \dots, y^n)$, однородные второй степени относительно слоевых координат $y^1, \dots, y^{\,n}$.

При допустимых преобразованиях координат

$$\bar{x}^i = f\,(x^1, \dots, x^n), \qquad \bar{y}^j = \frac{\partial f^j}{\partial x^s} y^s$$

окрестности $\overline{U}$ компоненты $H^i(x^1, \dots, x^n,\ y^1, \dots, y^n)$ объекта H преобразуются по закону

$$\overline{H}^i = -\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^m \partial x^\sigma} y^m y^\sigma + H^m \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \qquad (i, m, \sigma = \overline{1,n}).$$

На многообразии M пространства путей задаются кривые (пути), которые в окрестности U определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + H^i\left(x^1, \dots, x^n, \frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt}\right) = 0,$$

t — аффинный параметр.

Локальная однопараметрическая группа преобразований $\varphi_\tau = \varphi(x, \tau)$, $-\varepsilon < \tau < \varepsilon$, порожденная векторным полем $X \in F(U)$, называется *группой аффинных движений пространства путей*, если при любом τ путь l: $x = x(t)$ переводит в путь $\overline{l}: \varphi_\tau = \varphi(x(t), \tau)$, сохраняя аффинный параметр пути.

Векторное поле $X \in F(U)$, $X = \xi^i(x^1, \dots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}$ [5], является инфинитезимальным аффинным движением в пространстве путей тогда и только тогда, когда

$$L_{X^C} H^i = 0, \quad (1)$$

где L_{X^C} — символ производной Ли [2] вдоль полного лифта X^C векторного поля X. Условие (1) равносильно условию $L_{X^C}\Gamma^i_{jk} = 0$, где $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}H^i_{\cdot j \cdot k}$ — компоненты объекта аффинной связности Γ пространства путей, тензор кручения которой равен нулю, $H^i_{\cdot j\cdot k} = \frac{\partial^2 H^i}{\partial y^j \partial y^k}$.

Дифференциальные уравнения $L_{X^C}\Gamma^i_{jk} = 0$ в координатах (x^i, y^j) окрестности $\overline{U}$ запишутся в виде

$$\partial^2_{jk}\xi^i - \partial_m\xi^i\Gamma^m_{jk} + \partial_j\xi^m\Gamma^i_{mk} + \partial_k\xi^m\Gamma^i_{jm} + \xi^m\partial_m\Gamma^i_{jk} +$$
$$+\partial_m\xi^\sigma y^m\Gamma^i_{jk\cdot\sigma} = 0,$$

где $\Gamma^i_{jk\cdot\sigma} = \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial y^\sigma}$.

Обозначим через $L_r = \{X_1, X_2 \dots, X_r\}$ алгебру Ли группы преобразований G_r многообразия M. В работе [4] показано, что если $L_{X^C}\Gamma^i_{jk} = 0$ для каждого $X \epsilon L_r$, то группа G_r является группой аффинных движений пространства путей.

Теорема 1. *Максимальный порядок групп G_r аффинных движений в пространствах путей с одномерными орбитами равен n+1. Пространства (M, H), допускающие группу аффинных движений с одномерными орбитами максимального порядка, являются проективно плоскими.*

Доказательство. Пусть L_r — алгебра Ли группы G_r аффинных движений с одномерными орбитами в пространстве путей. В работе [6] показано, что алгебра L_r либо абелева, либо имеет структуру

$$(X_k, X_2) = X_k,\ \left(X_\mu, X_\nu\right) = 0 \quad (k, \mu, \nu = 1, 3, 4, \dots, r). \qquad (2)$$

В работе [7] приводятся все представления абелевой алгебры L_r и алгебры $\bar{L}_r$ со структурой (2) в виде алгебры Ли инфинитезимальных преобразований $X_\beta = \xi^i_\beta \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = \overline{1, n}$, $\beta = \overline{1, r}$, в координатной окрестности U, когда $rang\left(\xi^i_\beta\right) = 1$.

Приведем эти представления. Представления абелевой алгебры L_r:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1},\ X_2 = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots,\ X_r = x^r \frac{\partial}{\partial x^1} \quad (r \le n); \qquad (3)$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1},\ X_2 = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots,\ X_l = x^l \frac{\partial}{\partial x^1},$$

$$X_{l+1} = \varphi_{l+1}(x^2, \dots, x^l) \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots,\ X_r = \varphi_r(x^2, \dots, x^l) \frac{\partial}{\partial x^1} \qquad (4)$$

$$(l \le n - 1,\ l < r).$$

Представление алгебры L_r со структурой (2):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1},\ X_2 = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1},\ X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} \dots,\ X_r = x^{r-1} \frac{\partial}{\partial x^1} \qquad (5)$$

$(r \le n + 1)$;

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1},\ X_2 = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots,\ X_l = x^{l-1} \frac{\partial}{\partial x^1},$$

$$X_{l+1} = \varphi_{l+1}(x^2, \dots, x^{l-1}) \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, X_r = \varphi_r(x^2, \dots, x^{l-1}) \frac{\partial}{\partial x^1} \qquad (6)$$

$(l \le n + 1)$.

Найдем компоненты H^i дифференциального геометрического объекта H общего пространства путей, допускающего алгебру L_r инфинитезимальных аффинных движений (3) при $r = n$. Запишем для каждого векторного поля из (3) уравнения аффинных движений (1):

$$\begin{cases} -\delta_1^i H^a + H^i_{\cdot 1} y^a = 0, \\ \partial_{x^1} H^i = 0 \quad \left(a = \overline{2,n};\ i = \overline{1,n}\right). \end{cases} \tag{7}$$

Из уравнений (7) получим, что

$$H^1 = B(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n) y^1 + D(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n),$$

$$H^a = y^a B(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n).$$

Покажем, что пространства (*M*, *H*) не допускают в качестве группы аффинных движений группу G_r с алгеброй L_r (4). Предположим, что группа G_r является группой аффинных движений. Запишем уравнения инфинитезимальных движений для алгебры L_r (4):

$$\begin{cases} -\delta_1^i H^k + H^i_{\cdot 1} y^k = 0, \quad \partial_{x^1} H^i = 0, & (8) \\ \delta_1^i \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^\alpha \partial x^\rho} y^\alpha y^\rho - \frac{\partial \varphi_s}{\partial x^\rho} H^\rho \delta_1^i + H^i_{\cdot 1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x^\rho} y^\rho = 0 & (9) \\ \left(i = \overline{1,n};\ k, \alpha, \rho = \overline{2,l};\ s = \overline{l+1,r}\right). \end{cases}$$

Из уравнений (8) получим, что

$$H^1 = B(x^2, \dots, x^n) y^1 + D(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n),$$

$$H^k = y^k B(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n).$$

Учитывая это, из уравнений (9) при $i = 1$ получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^\alpha \partial x^\rho} y^\alpha y^\rho = 0, \qquad \varphi_s = a_{s\alpha} x^\alpha + b_s.$$

Поскольку $X_s = \sum_{\alpha=2}^{l} a_{s\alpha} X_\alpha + b_s X_1$, то пришли к противоречию. По условию инфинитезимальные преобразования линейно независимы.

Найдем теперь составляющие объекта $H\left(H^i\right)$ общего пространства путей, допускающих алгебру Ли инфинитезимальных аффинных движений L_{n+1} (5). Так как алгебра Ли L_n (3) является идеалом алгебры L_{n+1}, то составляющие объекта *H* пространства (*M*, *H*) определим из уравнений

$$L_{X_2^c} H^i = 0, \tag{10}$$

где

$$H^1 = B(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n)y^1 + D(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n),$$

$$H^a = y^a B(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n),\ X_2 = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1},\quad a = \overline{2, n}.$$

Из дифференциальных уравнений (10) относительно H^i получим, что $D(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n) = 0$. Следовательно, $H^i = y^i B(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n)$, а компоненты объекта аффинной связности

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} H^i_{\cdot j \cdot k} = \delta^i_j \Phi_{\cdot k} + \delta^i_k \Phi_{\cdot j} + y^i \Phi_{\cdot j \cdot k}\ ,$$

где $\Phi = \frac{1}{2} B(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n)$ — однородная функция первой степени относительно слоевых координат $y^2, \dots, y^n$. Значит, пространства (*M*, *H*) с алгеброй инфинитезимальных движений $\overline{L}_{n+1}$ (5) являются проективно плоскими.

Нетрудно показать, что инфинитезимальные преобразования алгебры $\overline{L}_r$ (6) не являются аффинными движениями пространства путей. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пространство путей (M, H) допускает группу G аффинных движений с одномерными орбитами максимального порядка тогда и только тогда, когда оно является проективно плоским и тензор* $\overline{\Gamma}\left(\Gamma^i_{jkl}\right),\ \Gamma^i_{jkl} = \Gamma^i_{jk \cdot l}$ *:*

$$\Gamma^i_{jkl} = \delta^i_j \Phi_{kl} + \delta^i_k \Phi_{jl} + \delta^i_l \Phi_{jk} + y^i \Phi_{jkl},\ \ \Phi_{jk} = \Phi_{\cdot j \cdot k},$$

и тензор кривизны

$$K^i_{jkl} = \delta^i_j \left(\Phi_{k,l} - \Phi_{l,k}\right) + \delta^i_k \left(\Phi_{j,l} - \Phi_j \Phi_l - \Phi_{jl}\right) -$$
$$-\delta^i_l \left(\Phi_{j,k} - \Phi_k \Phi_j - \Phi_{jk}\right) +\ y^i \left(\Phi_{jk,l} - \Phi_{jl,k}\right)$$

удовлетворяют условию: существует такое векторное поле $X = v^i(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}$*, что*

$$v^\sigma \Phi_{\cdot \sigma} = 0,\quad L_{X^c} \Phi = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть пространство путей (*M, H*) допускает группу G_r аффинных движений с одномерными орбитами максимального порядка. Из теоремы 1 следует, что $r = n + 1$ и пространство является проективно плоским. Объект аффинной связности

$$\Gamma_{jk}^{i} = \delta_j^i \Phi_k + \delta_k^i \Phi_j + y^i \Phi_{jk} ,$$

где Φ не зависит от x^1, y^1, $\Phi_k = \Phi_{\cdot k}$, $\Phi_{jk} = \Phi_{\cdot j \cdot k}$. Тогда тензор

$$\Gamma_{jkl}^{i} = \delta_j^i \Phi_{kl} + \delta_k^i \Phi_{jl} + \delta_l^i \Phi_{jk} + y^i \Phi_{jkl} , \ \Phi_{jkl} = \Phi_{jk\cdot l},$$

а тензор кривизны

$$K_{jkl}^{i} = \delta_j^i \left(\Phi_{k,l} - \Phi_{l,k}\right) + \delta_k^i \left(\Phi_{j,l} - \Phi_j \Phi_l - \Phi_{jl}\right) -$$
$$-\delta_l^i \left(\Phi_{j,k} - \Phi_k \Phi_j - \Phi_{jk}\right) + \ y^i \left(\Phi_{jk,l} - \Phi_{jl,k}\right)$$
$$(i, j, k, l = \overline{1, n}).$$

Рассмотрим векторное поле $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$, ставляющие которого $v^i = \delta_1^i$. Поскольку функция Φ не зависит от x^1, y^1, то

$$v^\sigma \Phi_{\cdot \sigma} = 0, \ \ L_{X^c} \Phi = 0.$$

Пусть теперь пространство путей (*M, H*) проективно плоское и выполняются условия (11). Существует система координат $\left(x^i\right)$ окрестности *U*, в которой компоненты $v^i = \delta_1^i$. Тогда из условий (11) следует, что Φ не зависит от x^1, y^1. Общий оператор группы *G* аффинных движений с одномерными орбитами в пространстве (*M, H*) возьмем в виде

$$X = \varphi(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^1} .$$

Запишем уравнения инфинитезимальных аффинных движений для векторного поля $X = \varphi(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^1}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^k} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} \Gamma_{jk}^{\sigma} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^j} \Gamma_{1k}^{1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^k} \Gamma_{j1}^{1} + \Gamma_{jk\cdot 1}^{1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} y^\sigma + \\ \qquad\qquad + \varphi \partial_{x^1} \Gamma_{jk}^{1} = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^j} \Gamma_{1k}^{\lambda} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^k} \Gamma_{j1}^{\lambda} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} y^\sigma \Gamma_{jk\cdot 1}^{\lambda} + \varphi \partial_{x^1} \Gamma_{jk}^{\lambda} = 0 \ \ (\lambda = \overline{2, n}). \end{cases} \tag{12}$$

Введем новые функции $u_j = \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}$. Тогда система (12) равносильна системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно φ и u_j:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} = u_j, \\ \frac{\partial u_j}{\partial x^k} - u_\sigma \Gamma^\sigma_{jk} + u_j \Gamma^1_{1k} + u_k \Gamma^1_{j1} + \Gamma^1_{jk\cdot 1} u_\sigma y^\sigma + \varphi \partial_{x^1} \Gamma^1_{jk} = 0, \\ u_j \Gamma^\lambda_{1k} + u_k \Gamma^\lambda_{j1} + u_\sigma y^\sigma \Gamma^\lambda_{jk\cdot 1} + \varphi \partial_{x^1} \Gamma^\lambda_{jk} = 0 \quad (\lambda = \overline{2,n}). \end{cases} \tag{13}$$

Первая серия условий интегрируемости [9] системы (13)

$$L_{X^c} \Gamma^i_{jkl} = 0, \quad L_{X^c} K^i_{jkl} = 0$$

выполняется тождественно.

Действительно,

$$L_{X^c} \Gamma^i_{jkl} = \varphi \partial_{x^1} \Gamma^i_{jkl} + \Gamma^i_{jkl\cdot 1} \partial_\sigma \varphi y^\sigma - \delta^i_1 \partial_\sigma \varphi \Gamma^\sigma_{jkl} + \Gamma^i_{1jk} \partial_j \varphi +$$

$$+ \Gamma^i_{j1l} \partial_k \varphi + \Gamma^i_{jk1} \partial_l \varphi = \delta^i_1 \Phi_{jkl} \partial_\sigma \varphi y^\sigma -$$

$$- \delta^i_1 \partial_\sigma \varphi \left(\delta^\sigma_j \Phi_{kl} + \delta^\sigma_k \Phi_{jl} + \delta^\sigma_l \Phi_{jk} + y^\sigma \Phi_{jkl} \right) +$$

$$+ \delta^i_1 \Phi_{lk} \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \delta^i_1 \Phi_{jl} \frac{\partial\varphi}{\partial x^k} + \delta^i_1 \Phi_{jk} \frac{\partial\varphi}{\partial x^l} = 0.$$

Аналогично можно показать, что $L_{X^c} K^i_{jkl} = 0$.

Поскольку первая серия условий интегрируемости выполняется тождественно, то составляющая φ векторного поля X, являющаяся решением системы (13), содержит $n+1$ постоянных. Придавая последовательно одной из постоянных значение 1, а остальным 0, получим базис алгебры Ли группы аффинных движений с одномерным орбитами в пространстве (M, H) порядка $n+1$. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Douglas J.* The general geometry of pahts // Annalas of Math. 1928. Vol. 29. P. 143—168.

2. *Yano K.* The theory of Lie derivatives and its applications. Amsterdam, 1957.

3. *Yano K., Isihara S.* Tangent and Cotangent Bundles Differential Geometry. N. Y., 1973.

4. *Knebelman M. S.* Collineations and motions in generalized spaces // American Journal of Mathematics. 1929. Vol. 51. P. 527—564.

5. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М., 1981.

6. *Никитин Н.Д.* Об аффинных движениях в общих пространствах путей // Известия вузов. Математика. 1996. №2. С. 21—25.

7. *Никитин Н.Д.* О проективных движениях в общих пространствах путей // ДГМФ. Калининград, 2012. Вып. 43. С. 100—107.

8. *Никитин Н.Д.*, *Никитина О.Г.* Аффинные преобразования касательного расслоения общего пространства путей // ДГМФ. Калининград, 2023. Вып. 54 (2). С. 18—26.

9. *Okubo T.* On the order of the groups of affine collineations in the generalized spaces of paths. I // Tensor. 1956. Vol. 6. P. 141—158.

Для цитирования: *Никитин Н.Д., Никитина О.Г.* Об аффинных движениях с одномерными орбитами в общих пространствах путей // ДГМФ. 2024. № 55 (1). С. 45—54. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-5.

MSC 2010: 53A35

N. D. Nikitin, *O. G. Nikitina*
Penza State University
37 Lermontova St., Penza, 440026, Russia
nikitina1005@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-5

On affine motions with one-dimensional orbits in common spaces of paths

Submitted on April 23, 2024

The concept of a common path space was introduced by J. Duqlas. M.S. Knebelman was the first to consider affine and projective movements in these spaces. The general path space is a generalization of the space of affine connectivity. In this paper, we study spaces of paths that admit groups of affine motions with one-dimensional orbits. For each representation in the form of algebra of vector fields of the abelian Lie algebra and the L_r algebra containing the abelian ideal $L_{r\text{-}1}$, a system of equations of infinitesimal affine motions is compiled. The vector fields of each of these representations are operators of a group of transformations with one-dimensional orbits. Integrating this system, general spaces of paths are defined that admit a group of affine motions with one-dimensional orbits, the operators of which are the vector fields of these representations. The maximum order of these groups is set. It is shown that the spaces of paths admitting a group of affine motions with one-dimensional orbits of maximum order are projectively flat. The conditions that are necessary and sufficient for the space of paths to admit a group of affine motions with one-dimensional orbits of maximum order are given.

Keywords: tangent bundle, general path space, a projectively flat space, Lie derivative, infinitesimal affine transformation

References

1. *Douglas, J.:* The general geometry of paths. Annalas of Math., 29, 143—168 (1928).
2. *Yano, K.:* The theory of Lie derivatives and its applications. Amsterdam (1957).
3. *Yano, K., Isihara, S.:* Tangent and Cotangent Bundles Differential Geometry. New York (1973).
4. *Knebelman, M.S.:* Collineations and motions in generalized spaces. Amer. J. Math., 51, 527—564 (1929).
5. *Kobayashi, Sh., Nomizu, K.:* Fundamentals of differential geometry, 1. Moskow (1981).
6. *Nikitin, N.D.:* On affine motions in general spaces of path. Izvestia vuzov. Math., 2, 21—25 (1996).
7. *Nikitin, N.D.:* On projective movements in common spaces of path. DGMF, 43, 100—107 (2012).
8. *Nikitin, N.D.*, *Nikitina, O.G.:* Affine transformations of the tangent bundle of a common path space. DGMF, **54**:2, 18—26 (2023).
9. *Okubo, T.:* On the order of the groups of affine collineations in the generalized spaces of paths. I. Tensor, 6, 141—158 (1956).

For citation: Nikitin, N.D., Nikitina, O.G. On affine motions with one-dimensional orbits in common spaces of paths. DGMF, 55 (1), 45—54 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-5.