УДК 1(091):16

ЧТО ТАКОЕ КАНТОВСКАЯ ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ? ОБЗОР СОВРЕМЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

М. Д. Евстигнеев[1]

Обзор современных дискуссий в области кантовской философии математики приурочен к выходу в свет сборника эссе «Кантовская философия математики» (том 1 «Критическая философия и ее корни», 2020) под редакцией Карла Пози и Офры Рехтер. Основные проблемы рассматриваются и комментируются с опорой на тексты, входящие в этот сборник. Сначала обсуждаются наиболее общие вопросы, касающиеся не только философии математики, но и смежных областей кантовской философии, например вопроса о том, что такое созерцание и единичный термин. Затем рассматриваются более частные сюжеты, например вопросы о том, каков предмет арифметики и каково значение графического изображения в математических рассуждениях. В итоге читателю предлагается достаточно полный обзор современных дискуссий, который может использоваться в качестве введения в современную проблематику кантовской философии математики.

Ключевые слова: *Кант, философия математики, созерцание, конструкция, философия науки, философия немецкого Просвещения*

1. Введение

Кантовская философия математики — активно развивающееся направление кантоведения. Еще полвека назад существовало лишь малое число разрозненных подходов к реконструкции и интерпретации кантовской философии математики (см.: Posy, Rechter, 2020, p. 1—4), на сегодняшний же день библиография, например, на сайте *Philpapers.org* насчитывает более 350 работ, не считая смежных категорий (Kant…, 2021). В этой статье на основе ис-

[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ).
105066, Москва, ул. Старая Басманная, д. 21/4.
Поступила в редакцию: 10.01.2021 г.
doi: 10.5922/0207-6918-2021-2-6

WHAT IS KANTIAN PHILOSOPHY OF MATHEMATICS? AN OVERVIEW OF CONTEMPORARY STUDIES

M. D. Evstigneev[1]

This review of contemporary discussions of Kantian philosophy of mathematics is timed for the publication of the essay Kant's Philosophy of Mathematics. Volume 1: The Critical Philosophy and Its Roots (2020) *edited by Carl Posy and Ofra Rechter. The main discussions and comments are based on the texts contained in this collection. I first examine the more general questions which have to do not only with the philosophy of mathematics, but also with related areas of Kant's philosophy, e. g. the question: What is intuition and singular term? Then I look at more specific questions, e. g.: What is the subject of arithmetic and what is the significance of diagrams in mathematical reasoning? As a result, the reader is presented with a fairly complete overview of modern discussions which can be used as an introduction to the problem field of Kant's philosophy of mathematics.*

Keywords: *Kant, philosophy of mathematics, intuition, construction, philosophy of science, philosophy of German Enlightenment*

1. Introduction

Kant's philosophy of mathematics is a vigorously developing area of Kant scholarship. Only half a century ago there was a small number of disparate approaches to the reconstruction and interpretation of Kant's philosophy of mathematics (*cf*. Posy and Rechter, 2020, pp. 1-4). Today the relevant bibliography, e. g. on the *Philpapers.org*, exceeds 350 papers, not counting related categories (Tolley, 2021). In

[1] HSE University, Moscow.
21/4 Staraya Basmannaya st., Moscow, 105066, Russia.
Received: 10.01.2021.
doi: 10.5922/0207-6918-2021-2-6

следований, представленных в сборнике, который недавно вышел под редакцией Карла Пози и Офры Рехтер, я предлагаю обзор некоторых ключевых дискуссий в области кантовской философии математики. Эта область тесно переплетается с другими аспектами кантовского учения, чем объясняется необходимость рассматривать место математики в более широком контексте кантовской философии. Я начинаю с общих вопросов, которые касаются не только философии математики, но и кантовской философии в целом, и постепенно перехожу к более частным проблемам, по ходу обсуждения указывая, какие существуют или могут существовать подходы к их решению и какие преимущества и недостатки есть у этих подходов.

2. Что такое созерцание?

В «Критике чистого разума» Кант, комментируя различие между созерцаниями и понятиями, указывает: «Познание есть или *созерцание*, или *понятие* (*intuitus vel conceptus*). Созерцание имеет непосредственное отношение к предмету и всегда бывает единичным, а понятие имеет отношение к предмету опосредствованно, при посредстве признака, который может быть общим для нескольких вещей» (A 320 / B 376—377; Кант, 2006а, с. 485—487). В других местах Кант упоминает то первый (единичность) (AA 09, S. 91; Кант, 1994г, с. 346), то второй (непосредственность) критерий (A 19 / B 33; Кант, 2006б, с. 49), и, соответственно, встает вопрос о том, в каком логическом отношении находятся эти критерии. Есть несколько путей разрешения поставленного вопроса, и один из них ведет к области философии математики[2].

[2] В качестве примеров путей разрешения проблемы, обходящих стороной кантовскую философию математики, см.: (Allison, 2004, p. 80—82; Falkenstein, 2004, p. 70). Такие стратегии пытаются раскрыть «метафизическую» подоплеку, стоящую за этими критериями. Так, например, Л. Фалкенстайн полагает, что кантовские критерии нужно рассматривать в более широком контексте его учения о высших и низших познавательных способностях души, где низшая «отвечает» за получение информации (созерцание), в то время как высшая — за ее связь и объединение (мышление) (Falkenstein, 2004, p. 61).

the article below, proceeding from the studies presented in the recently published collections edited by Carl Posy and Ofra Rechter, I offer an overview of some key discussions in the field of Kant's philosophy of mathematics. This area is intimately bound up with other aspects of Kant's doctrine, which reveals the need to view the place of mathematics in the broader context of Kant's philosophy. I begin with the general questions which have to do not only with the philosophy of mathematics, but also with Kant's philosophy as a whole, gradually moving on to more specific problems, indicating along the way what approaches to their solution exist or may exist and identifying the merits and demerits of these approaches.

2. What is Intuition?

In the *Critique of Pure Reason* Kant, commenting on the difference between intuitions and concepts, writes: the cognition "is either an *intuition* or a *concept* (*intuitus vel conceptus*). The former is immediately related to the object and is singular; the latter is mediate, by means of a mark, which can be common to several things" (*KrV*, A 320 / B 377; Kant, 1998, p. 399). In other places Kant mentions alternately the first (singularity) (*Log*, AA 09, p. 91; Kant, 1992, p. 91), or the second (immediacy) criterion (*KrV*, A 19 / B 33; Kant, 1998, p. 155) and, accordingly, the question arises as to the logical relationship between these criteria. There are several ways of resolving the above question, one of which leads to the philosophy of mathematics.[2]

[2] For examples of the ways of solving the problem that sidestep the Kantian philosophy of mathematics see Allison (2004, pp. 80-82), Falkenstein (2004, p. 70). Such strategies seek to reveal the "metaphysical" implications of these criteria. For example, Falkenstein (2004, p. 61) believes that Kant's criteria should be seen in the broader context of his doctrine of the higher and lower cognitive faculties of the soul, where the lower one is responsible for obtaining information (intuition), while the higher one is responsible for its connection and unification (thinking).

Дело в том, что, согласно Канту, одна из существенных характеристик математики состоит в том, что она занимается рассмотрением всеобщего в особенном (AA 02, S. 278; Кант, 1994б, с. 161; ср.: A 734-735 / B 762—763; Кант, 2006а, с. 929—931), или конструкцией понятий в созерцании (AA 04, S. 469; Кант, 1994в, с. 250—251; ср.: A 713 / B 741; Кант, 2006а, с. 905—907). Это, по мысли Канта, наделяет математическое познание достоверностью, которой недостает философии: математика сама создает свои понятия, почти не содержит недоказуемых положений и может позволить себе использование демонстраций; все вышеперечисленное недоступно для философии (AA 02, S. 276, 283; Кант, 1994б, с. 161, 169; ср.: A 735 / B 763; Кант, 2006а, с. 931). Соответственно, чтобы понять, что Кант имеет в виду под созерцаниями и их свойствами, нужно, как считает Я. Хинтикка, выяснить, какую роль они играют в математических рассуждениях и как Кант интерпретирует эту роль (Hintikka, 1992, p. 24—27).

Хинтикка предполагает, что Кант следует стандартному для своего времени пониманию математического метода — тому, которое представлено в «Началах» Евклида[3] (Hintikka, 1992, p. 28; Hintikka, 2020, p. 87). Евклид писал о математическом методе как состоящем из нескольких шагов. Среди них ключевую — для Хинтикки — роль играет операция *эктезиса*, в ходе которой в доказательство вводится единичная фигура. По Хинтикке, конструирование математикой своих понятий в созерцании означает лишь то, что в эктезисе вводится единичная фигура, и на ее основании далее доказывается наличие или отсутствие некоторого свойства у нее и у всего класса фигур, к которым она принадлежит (Hintikka, 1992, p. 28—30; Hintikka, 2020, p. 88—89). Он также отмечает, что эти опе-

[3] В определении «стандартного» понимания Хинтикка несколько некритичен, так как исследования показывают, что «стандартный» взгляд на математику в Германии второй половины XVIII в. значительно отличался от того, который был изложен в «Началах» Евклида. См.: (Shabel, 2003, p. 41—90; Mancosu, 1996; Tait, 2020, p. 286—287; Rusnock, George, 1995; Rusnock, 2004).

According to Kant, an essential characteristic of mathematics is that it considers universals *in concreto* (*UD*, AA 02, S. 278; Kant 1992b, p. 250; *cf*. *KrV*, A 734-735 / B 762-763; Kant, 1998, p. 641), or constructs concepts in intuition (*MAN*, AA 04, p. 469; Kant, 2004a, p. 5; *cf*. *KrV*, A 713 / B 741; Kant, 1998, p. 630). Kant argues that this confers on mathematical cognition a kind of certainty that philosophy cannot boast: mathematics itself creates its concepts, hardly contains any unprovable propositions and can rely on demonstrations; none of the above is within the reach of philosophy (*UD*, AA 02, p. 276, 283; Kant, 1992a, p. 248, 283-284; *cf*. *KrV*, A 735 / B 763; Kant, 1998, p. 641). Thus, in order to understand what Kant means by intuitions and their properties, we have to find out what role they play in mathematical reasoning and how Kant interprets this role. This is the view taken by Jaakko Hintikka (Hintikka, 1992, pp. 24-27).

Hintikka (2020, p. 87; 1992, p. 28) assumes that Kant follows the conception of mathematical method prevalent in his time, represented in Euclid's *Elements*.[3] Euclid wrote that mathematical method consists of several steps, the key one being — for Hintikka — the operation of *ekthesis*, whereby a singular figure is introduced in the proof. Hintikka (2020, pp. 88-89; 1992, pp. 28-30) notes that the fact that mathematics constructs its concepts in intuition merely means that in ekthesis a singular figure is introduced on the basis of which the presence or absence of a certain property is discovered in it and the whole class of figures to which it belongs. He also notes that these operations correspond to the operations of existen-

[3] Hintikka's view on the "standard" understanding is somewhat uncritical, since studies show that the "standard" view of mathematics in Germany in the second half of the eighteenth century differed significantly from what is set forth in Euclid's *Elements*. *Cf*. Shabel (2003, pp. 41-90), Mancosu (1996), Tait (2020, pp. 286-287), Rusnock (2004), Rusnock and George (1995).

рации соответствуют операциям экзистенциальной инстанциации и генерализациии современной математической логики (Hintikka, 1992, p. 37) и что ничто большее из кантовских определений не следует (Hintikka, 2020, p. 86).

Такая интерпретация традиционно называется «логической интерпретацией созерцания». Согласно мнению ее приверженцев, Кант не считал бы, что созерцание должно быть непосредственным, если бы ему была доступна современная математическая логика, изобретенная значительно позже[4]. Несколько иную версию главного тезиса «логической интерпретации» предлагает М. Фридман. Он считает, что Кант обращается к чувственному созерцанию, потому что логика, которой он пользовался, оказалась непригодной для работы с бесконечными объектами[5] (Friedman, 1998, p. 59, 121). Вопрос о бесконечности объектов, правда, не столь однозначный. Не вполне ясно, нуждался ли Кант в ресурсах для ее математического выражения. Г. Бриттан указывает, что ни созерцания, ни понятия не служат у Канта этой цели и что Кант на самом деле не говорит о бесконечности как таковой, а скорее ведет речь о неограниченности и регрессе / прогрессе (A 520—521 / B 548—549; Кант, 2006а, с. 683; ср.: AA 04, S. 506—508; Кант, 1994в, с. 296—298; Brittan, 2020, p. 185).

Если созерцание не служит для выражения бесконечности, то оно, согласно Бриттану, необходимо, потому что, по мнению Канта, чисто дескриптивная теория референции несостоятельна (Brittan, 2020, p. 188). Таким образом, встает вопрос о роли единичного термина в кантовской эпистемологии.

Ч. Парсонс, критикуя интерпретацию Хинтикки, замечает, что из нее следует, будто понятие Бога также должно быть созерцанием, что, конечно, абсурдно (Parsons, 1992a, p. 44—45). Последнее слово в этой дискуссии, как каза-

[4] Один из первых пропонентов такой интерпретации в кантоведении — Э. Бет, на работы которого опирался Хинтикка (Beth, 1956), см. также: (Peijnenburg, 1994). Хотя иногда к «логической интерпретации» относят также позицию Б. Рассела (Brittan, 2020, p. 183).

[5] Ср. (Friedman, 1998, p. 121)

tial instantiation and generalisation in modern mathematical logic (Hintikka, 1992, p. 37), and nothing more follows from Kant's definitions (Hintikka, 2020, p. 86).

This interpretation is traditionally referred to as the "logical interpretation of intuition." It argues that Kant would not have considered intuition to be immediate if he had had access to modern mathematical logic, which was invented much later.[4] M. Friedman proposes a somewhat different version of the main thesis of "logical interpretation". He believes that Kant turned to sensible intuition because the logic he used proved to be unsuitable for work with infinite objects (Friedman, 1998, p. 59, *cf.* p. 121). However, the question of the infinity of objects is not so straightforward. It is not quite clear whether Kant needed resources for its mathematical expression. Brittan points out that with Kant neither intuitions nor concepts serve that aim, and that Kant speaks not about infinity as such, but rather about unlimitedness and infinite regress/progress (*KrV*, A 520-521 / B 548-549; Kant, 1998, pp. 526-527; *cf. MAN*, AA 04, pp. 506-508; Kant, 2004a, pp. 43-45; Brittan, 2020, p. 185).

If intuition does not serve to express infinity, then, according to Brittan, it is necessary because, in Kant's opinion, the purely descriptive theory of reference is untenable (Brittan, 2020, p. 188). This raises the question of the role of the singular term in Kant's epistemology.

C. Parsons (1992a, pp. 44-45), criticising Hintikka's interpretation, notes that it suggests that the concept of God should also be an intuition, which is of course absurd. It seemed that the final word in this discussion had already been

[4] One of the first proponents of this interpretation in Kant scholarship was E. Beth (1956), from whom Hintikka proceeded; see also Peijnenburg (1994). Sometimes, though, Bertrand Russel's position is also bracketed together with "logical interpretation" (Brittan, 2020, p. 183).

лось, давно поставил М. Томпсон. Он показал, что «кантовская философия — фактически такая философия, в которой, строго говоря, нет единичных терминов» (Thompson, 1972, p. 342). Они просто элиминируются из эпистемологии и заменяются дескрипциями (Thompson, 1972, p. 334). У созерцаний нет корректного лингвистического представления, хотя они и имеют познавательное значение. Однако действительно ли Кант полагает, что понятия не могут быть единичными? И Хинтикка, и Томпсон опираются на фрагменты, где Кант указывает, что понятия не могут быть единичными, так как объем понятия состоит из других подчиненных понятий. Следовательно, возможно только единичное *употребление* понятий (AA 09, S. 91; Кант, 1994г, с. 346).

Однако М. Капоцци полагает, что с этой позицией можно поспорить. Она приводит фрагменты, в которых Кант эксплицитно говорит о единичных понятиях. *Conceptus singularis* — это такое понятие, которое может быть только субъектом суждений и не может быть предикатом, так как у него нет объема (AA 20, S. 655). Типичный пример — имена собственные, которые, как показывает Капоцци, на самом деле представляют собой единичные понятия. Согласно Канту, они не имеют объема и не являются низшими понятиями, но все равно относятся к числу понятий[6] (Capozzi, 2020, p. 121).

Получается, что непосредственность все же выступает независимым критерием, так как она не следует из единичности, ведь можно быть единичным, но при этом опосредованным представлением (то есть понятием)[7]. Но отсюда также не будет следовать, что единичность — следствие непосредственности, как

[6] Обычно в качестве аргумента в пользу невозможности единичных понятий приводятся кантовские замечания по поводу отсутствия низших понятий, см.: (AA 09, S. 97; Кант, 1994г, с. 352—353; ср.: A 656 / B 684; Кант, 2006а, с. 839). Капоцци, соответственно, показывает, что может существовать единичное понятие, которое при этом не будет низшим.

[7] Здесь, правда, возникает вопрос о текстуальной аутентичности корпуса кантовских текстов по логике. См. недавнее исследование об этом: (Lu-Adler, 2018, p. 9—17).

spoken by M. Thompson. He demonstrated that "Kant's philosophy is virtually one that is technically without singular term" (Thompson, 1972, p. 342). Singular terms are simply eliminated from epistemology and replaced by descriptions (*ibid*., p. 334). Intuitions do not have a correct linguistic representation although they do have cognitive significance. And yet, does Kant really think that concepts cannot be singular? Both Hintikka and Thompson base themselves on fragments in which Kant argues that concepts cannot be singular since the extension of a concept consists of other subordinate concepts. Consequently, only a singular *use* of concepts is possible (*Log*, AA 09, p. 91; Kant, 1992, p. 590).

M. Capozzi, however, thinks this position is vulnerable. She cites fragments in which Kant explicitly speaks about singular concepts. *Conceptus singularis* is a concept that can be only subject of judgements and never predicate because it has no extension (*V-Lo/Busolt*, AA 24, p. 655). Proper names are a typical example. Capozzi demonstrates that proper names are actually singular concepts. According to Kant, they have no extension and are not lower concepts, but they are still concepts[5] (Capozzi, 2020, p. 121).

Thus immediacy is, after all, an independent criterion because it does not follow from singularity, a representation (concept) can be singular yet mediated.[6] Nor does it follow from this that singularity is a consequence of immediacy, as Parsons believed. On the contrary, intuition is both singular and immediate, these being

[5] Kant's remarks about the absence of lower concepts is the usual argument called upon to disprove the possibility of singular concepts, see (*Log*, AA 09, p. 97; Kant, 1992, pp. 594-595; *cf*. *KrV*, A 656 / B 684; Kant, 1998, p. 597). Capozzi thus shows that a concept can be singular but not lower.

[6] This, however, raises the question of the textual authenticity of the body of Kant's texts on logic. See a recent study on this by Lu-Adler (2018, pp. 9-17).

считал Парсонс. Напротив, созерцания являются и единичными, и непосредственными — это два разных и независимых друг от друга критерия (см.: Wilson, 1975).

Если признать, что иные свойства, помимо единичности, играют существенную роль в математических выводах и построениях, то встает вопрос о том, как Кант себе это представляет.

> …В понятии фигуры, образуемой двумя прямыми линиями, нет противоречия, так как понятия о двух прямых линиях и пересечении их не содержат в себе никакого отрицания фигуры; невозможность [такой фигуры] основывается не на понятии самом по себе, а на построении его в пространстве, т. е. на условиях пространства и определения его (A 220—221 / B 268; Кант, 2006a, с. 361).

Получается, что математика основывается на каких-то «содержательных» (помимо формальной единичности) свойствах пространства и времени. Нередко Кант вообще говорит о том, что некоторые положения «содержатся в созерцании» (A 32 / B 47; Кант, 2006a, с. 107). Если нечто в созерцании содержится, то это значит, что оно может быть оттуда извлечено (A 25 / B 39; Кант, 2006a, с. 97). Операция же по извлечению содержания, его экспликация является анализом (A 6—7 / B 10; Кант, 2006a, с. 61). Получается, что математика должна каким-то образом анализировать содержание созерцаний и извлекать оттуда какие-то истины[8].

Д. Хоган показывает, что Кант, конечно, не имеет в виду здесь то, что математика занимается концептуальным анализом, но это не значит, что она не занимается некоторым аналогом «анализа» (Hogan, 2020, p. 144). На важности этого свойства созерцания настаивали люди, защищавшие так называемую феноменологическую интерпретацию созерцания (см.: Carson, 1997; Parsons, 1992a). Математика, таким образом, опирается на некоторые неконцептуаль-

[8] Кантовский друг, последователь и популяризатор «критической философии» И. Шульц пишет, что чистое созерцание является «материалом» (*Stoff*) для синтетических суждений *a priori* (Schultz, 1791, S. 24).

two different and independent criteria (*cf*. Wilson, 1975).

If we accept that properties other than singularity play an essential role in mathematical inferences and constructions, the question that arises is how Kant conceives of this.

> […] in the concept of a figure that is enclosed between two straight lines there is no contradiction, for the concept of two straight lines and their intersection contain no negation of a figure; rather the impossibility rests not on a concept itself, but on the construction in space, i. e., on the conditions of space and its determinations (*KrV*, A 220-221 / B 268; Kant, 1998, p. 323).

Thus, mathematics is based on some "substantive" (as distinct from formal singularity) properties of space and time. Kant sometimes says that some propositions are "contained in intuition" (*KrV*, A 32 / B 47; Kant, 1998, p. 179). If something is contained in intuition then it can be extracted from there (*KrV*, A 25 / B 39; Kant, 1998, p. 175). The operation of extracting content, its explication, is analysis (*KrV*, A 6-7 / B 10; Kant, 2006a, p. 141). It turns out that mathematics must somehow analyse the content of intuitions and extract some truths from them.[7]

Hogan shows that Kant, of course, does not suggest that mathematics makes use of conceptual analysis (Hogan, 2020, p. 144), but, at all events, it engages in some kind of analogue of "analysis" of intuition. The importance of this property of intuition was stressed by those who defended the so-called phenomenological interpretation of intuition (*cf*. Carson, 1997; Parsons, 1992a). Mathematics thus is based

[7] A friend of Kant's, a follower and populariser of "critical philosophy", Johann Schultz (1791, p. 24), writes that pure intuition is the "material" (*Stoff*) of synthetic *a priori* judgements.

ные содержания созерцания, которые не могут быть извлечены из него одним только концептуальным анализом[9].

Вряд ли где-то проблема «извлечения» содержаний из созерцаний стоит более остро, чем в случае аксиом и постулатов геометрии[10]. Особое внимание исследователей традиционно привлекает постулат, или аксиома, о параллельных прямых, о статусе которой велись активные дискуссии с заочным участием Канта[11]. Предпринимались и попытки доказать этот постулат. То дискурсивное доказательство, с которым Кант был знаком, принадлежало Хр. Вольфу (см.: Heis, 2020, p. 170). Кант, однако, не просто считал его ошибочным, но и полагал, что сама по себе дискурсивная попытка доказательства в геометрии обречена на провал. Все подлинные математические доказательства, согласно Канту (A 716—717 / B 744—745; Кант, 2006a, с. 909—911), покоятся на конструкции в чистом созерцании, а не на рассуждениях из одних только понятий (Heis, 2020, p. 172). Иными словами, посредством конструкции из чистых созерцаний пространства и времени каким-то образом «извлекаются» их фундаментальные свойства.

3. Место математики в кантовской философии

3.1. Проблема приоритета части или целого

Известно, что Кант, по крайней мере в двух различных контекстах в «Критике чистого раз-

[9] Хоган во многих своих текстах показывает, что Кант оперирует ограниченным и модернизированным принципом достаточного основания (Hogan, 2009; 2013; 2020). Кантовский пример фигуры, составленной из двух прямых, был, вероятно, заимствован у Хр. Вольфа, который с его помощью демонстрировал, что невозможность фигуры из двух прямых показывается посредством того, что она не имеет основания в геометрии (Wolff, 1742, S. 62; см. также: Parsons, 1992a, p. 58).

[10] Канта часто упрекают в том, что он догматично следовал евклидовой геометрии: (Schirn, 1991).

[11] Кант не посвятил отдельного сочинения этой проблеме и вообще, насколько мне известно, не касался ее в опубликованных при жизни текстах, но при этом рассматривал ее в серии заметок (AA 14, S. 23—52, № 5—11), на которые и опирается Хайз (Heis, 2020, p. 159).

on some non-conceptual contents of intuition which cannot be derived from it by sheer conceptual analysis.[8]

The problem of "extracting" content from intuitions is nowhere as acute as in the case of geometric axioms and postulates.[9] Traditionally, scholars have been particularly attracted by the postulate, or axiom, of parallel straight lines which sparked discussions in which Kant took part *in absentia*.[10] Attempts have been made to prove this postulate. Kant was familiar with the discursive proof offered by Christian Wolff (Heis, 2020, p. 170). Kant considered this proof to be erroneous and, indeed, believed that a discursive attempt of proof in geometry was in general doomed to failure (*KrV*, A 716-717 / B 744-745; Kant, 1998, pp. 631-632). All genuine mathematical proofs, Kant maintained, were based on construction in pure intuition and not on reasoning consisting of bare concepts (Heis, 2020, p. 172). That is, construction is used to somehow extract from pure intuitions of space and time their fundamental properties.

3. The Place of Mathematics in Kant's Philosophy

3.1. The Part/Whole Priority Problem

Kant is known to have stated in at least two different contexts in the *Critique of Pure Reason*

[8] Hogan (2009; 2013; 2020) shows in many of his texts that Kant uses a limited and modernised principle of sufficient ground. The example of a figure made up of two straight lines cited by Kant was probably borrowed from Christian Wolff (1742, p. 62; *cf.* Parsons, 1992a, p. 58), who used it to demonstrate that a figure enclosed by two straight lines is impossible because it has no ground in geometry.

[9] Kant is often reproached with dogmatically following Euclid's geometry (*cf.* Schirn, 1991).

[10] Kant did not devote a separate work to this problem and in general, to the best of my knowledge, did not touch upon it in the texts published during his lifetime, but he did consider it in a series of remarks (*Refl* 5-11, AA 14, pp. 23-52) on which Heis (2020, p. 159) draws.

ума», говорит о том, что возможность и достоверность математики продемонстрирована. В «Трансцендентальной эстетике» он пишет, что математика в качестве синтетического познания *a priori* возможна потому, что пространство и время суть созерцания *a priori*, а не вещи сами по себе, отношения между ними или их свойства (А 24 / В 41; Кант, 2006а, с. 97). Однако в «Трансцендентальной аналитике» Кант также замечает: после того как он показал, что все явления, будучи созерцаниями, — экстенсивные величины, возможность математики окончательно продемонстрирована (А 165—166 / В 206; Кант, 2006а, с. 291; ср.: АА 04, S. 505; Кант, 1994в, с. 295). При этом в «Трансцендентальной эстетике» Кант указывает, что пространство и время суть созерцания, потому что они являются такими целыми, которые предшествуют частям (А 24—25 / В 39; Кант, 2006а, с. 95—96; А 31—32 / В 47; Кант, 2006а, с. 105—106), а в «Трансцендентальной аналитике» пишет, что «*явления* с точки зрения *их созерцания* суть *экстенсивные* величины» (А 162; Кант, 2006б, с. 225), в которых части предшествуют целому. Получается, что два тезиса как будто несовместимы, а если и совместимы, то один из них должен быть более фундаментальным. Д. Сазерленд называл эту проблему проблемой «приоритета части или целого» (Sutherland, 2005, p. 140).

Оставив в стороне интерпретации, которые полагают, что эти тезисы несовместимы (Vaihinger, 1921, S. 224—226; Wolff, 1963, p. 229—230), нужно разобраться, как именно соотносятся эти положения. Одно из возможных решений содержится в § 26 «Трансцендентальной дедукции». Там Кант вводит различие между формами созерцания и формальными созерцаниями и указывает, что пространство и время как созерцания возможны благодаря категориальному синтезу со стороны рассудка (В 160—161; Кант, 2006а, с. 235—237). Фридман формулирует проблему следующим образом: «Итак, как же мы могли бы начать с единства, которое раньше было эксплицитно введено как не-

that the possibility and validity of mathematics has been demonstrated. In the "Transcendental Aesthetic" he claims that mathematics is possible as synthetic cognition *a priori* because space and time are *a priori* intuitions and not things in themselves, the relations between them or their properties (*KrV*, A 24 / B 41; Kant, 1998, p. 158). However, in the "Transcendental Analytic" he also noted that after he had demonstrated that all appearances, qua intuitions, are extensive magnitudes, the possibility of mathematics had been finally demonstrated (*KrV*, A 165-166 / B 206; Kant, 1998, p. 291; *cf. MAN*, AA 04, p. 505; Kant, 2004, pp. 42-43). It has to be noted, though, that in the "Transcendental Aesthetic" Kant writes that space and time are forms of intuition because they are wholes that precede parts (*KrV*, A 24-25 / B 39; Kant, 1998, pp. 158-159; *KrV*, A 31-32 / B 47; Kant, 1998, pp. 178-179), while in the "Transcendental Analytic", he writes that "All appearances are, as regards their intuition, *extensive magnitudes*" (*KrV*, A 162-163; Kant, 1998. p. 286) in which parts precede whole. The two theses seem to be incompatible, or, if they are compatible, one of them should be more fundamental than the other. Sutherland (2005, p. 140) called it the "part/whole priority problem".

Leaving aside the interpretations that hold these theses to be incompatible (Vaihinger, 1921, pp. 224-226; Wolff, 1963, pp. 229-230), it is necessary to understand the relationship between these claims. One possible solution is found in § 26 of the"Transcendental Deduction" in which Kant draws a distinction between forms of intuition and formal intuitions and points out that space and time as intuitions are possible due to the categorial synthesis accomplished by understanding (*KrV*, B 160-161n; Kant, 1998, p. 261n). Friedman (2020, p. 204; *cf.* 2019) formulates the problem in the following way: "So how can we possibly begin with концептуальное, и заключить, что в итоге это самое единство [существует] благодаря рассудку?» (Friedman, 2020, p. 204; ср.: Friedman, 2019).

Для разрешения этого затруднения он указывает, что в «Трансцендентальной эстетике», «Трансцендентальной аналитике» и непосредственно в геометрии пространство рассматривается с разных точек зрения или на разных уровнях абстракции. Математическое пространство синтезируется последовательно, посредством конструкции точек, линий и т. д., в то время как метафизическое дано сразу, непосредственно и как актуально бесконечное (Friedman, 2020, p. 213): «Предшествующее метафизическое пространство — целое пространство как формальное созерцание — это не объект науки геометрии, а скорее объект, рассмотренный на совершенно другом уровне абстракции» (Friedman, 2020, p. 214). В этом случае становится ясно, как некоторое единство, которое было неконцептуальным, является в то же самое время и концептуальным[12].

3.2. *Предмет арифметики*

Традиционный аргумент против «логической интерпретации» сводится к указанию на то, что, согласно Канту, математика определяет условия возможности опыта[13]. В таком случае встает вопрос о том, как она это делает и что значит быть предметом математики. Геометрия — чистое учение (или наука) о пространстве (*reine Raumlehre*) — содержит указание на свой предмет уже в названии (AA 20, S. 237). Тогда геометрия определяет условия возможности опыта постольку, поскольку определяет возможные пространственные отношения, которые могут быть обнаружены в явлении. Но ведь помимо геометрии математика содержит в себе еще ряд других дисциплин, среди которых арифметика и алгебра. Причем отноше-

[12] Схожую попытку интерпретировать кантовскую «таксономию пространств» см.: (Ferrarin, 2006).

[13] См. подробнее: (Carson, 2009).

a unity that was earlier explicitly introduced as non-conceptual and conclude that this same unity is due to the understanding after all?"

To resolve this difficulty, he notes that the "Transcendental Aesthetic" and the "Transcendental Analytic" and geometry itself consider space from different perspectives or at different levels of abstraction. Mathematical space is synthesised successively through the construction of points, lines, etc., whereas the metaphysical is given at once, immediately and as actually infinite (Friedman, 2020, p. 213): "This prior metaphysical space — the whole of space as a formal intuition — is not an object of the science of geometry but rather an object considered at an entirely different level of abstraction" (*ibid.*, p. 214). It then becomes clear that a unity that was non-conceptual is at the same time conceptual.[11]

3.2. *The Object of Arithmetic*

The traditional argument against the "logical interpretation" boils down to the statement that, according to Kant, mathematics determines the conditions of possibility of experience.[12] The question then arises how it does this and what a mathematical object is. Geometry, the pure science of space (*reine Raumlehre*), has its object already in its name (*EEKU*, AA 20, p. 237). Then geometry determines the conditions that make experience possible inasmuch as it determines possible spatial relations that can be found in appearance. But, in addition to geometry, mathematics includes several other disciplines, such as arithmetic and algebra. The relationship of the latter two to their object is less evident than in the case

[11] On a similar attempt to interpret Kant's "taxonomy of spaces" see Ferrarin (2006).

[12] For more detail see Carson (2009).

ние последних двух к своему предмету не столь очевидно, как в случае с геометрией[14]. Арифметика, или наука о числе (AA 29, S. 49)[15], называется Кантом «инструментом всей математики» (Ibid.). Она не относится к специальной части, как геометрия, и, получается, не имеет какого-то специфического домена в архитектонике математики (Ibid.). Казалось, что предметом арифметики могло бы быть время, но, как ни странно, Кант нигде этого не пишет (Tait, 2020, p. 290). Более того, в трудах по математике того времени и в кантовских лекциях по математике указывается, что свойства времени определяет не арифметика, а гномоника[16] и хронология (AA 29, S. 50).

Что же тогда называется числом? С одной стороны, Кант описывает процесс вычисления в арифметике как процесс последовательного прибавления единиц во времени (AA 04, S. 283; Кант, 1994д, с. 38; A 142 / B 182; Кант, 2006а, с. 261). С другой — он указывает, что число — это интеллектуальное понятие, не зависящее от чувственности, и что чувственность нужна только для того, чтобы в действительности осуществлять вычисления (AA 10, S. 556—557; ср.: AA 02, S. 397; Кант, 1994е, с. 292)[17]. Помимо этих замечаний, Кант называет число «схемой величины», что еще сильнее затрудняет анализ (A 142—143 / B 182; Кант, 2006а, с. 261).

Эти трудности настолько велики, что провоцируют, по мнению Сазерленда, ситуацию, в которой можно с одинаковой убедительностью отстаивать два противоположных взгляда на фундаментальные свойства чисел. Мы даже не знаем, какой концепции числа придерживался Кант — кардинальной или ординальной (Sutherland,

[14] Далее речь пойдет только об арифметике, поскольку случай алгебры подробно разобран в работах Л. Шабель, см.: (Shabel, 1998; 2003, p. 115—131).

[15] Я ссылаюсь на конспект кантовских лекций по математике, которые читались по учебнику Вольфа (Wolff, 1734), подробнее см.: (Martin, 1967; 1972, S. 12—17).

[16] Наука об определении времени по солнечным часам (Wolff, 1710, S. 561).

[17] См. подробнее: (Hanna, 2003, p. 340).

of geometry.[13] Kant calls arithmetic, or the science of numbers,[14] "the instrument of all mathematics" (*V-Math/Herder*, AA 29, p. 49). It does not belong to the special part, like geometry, and thus does not have a specific domain in the architectonic of mathematics (*ibid*.). Time could be the object of arithmetic but, oddly enough, Kant never claims this, and the works on mathematics of that time and Kant's lectures say that the properties of time are determined not by arithmetic, but by gnomonics[15] and chronology (*V-Math/Herder*, AA 29, p. 50; *cf*. Tait, 2020, p. 290).

What, then, is number? On the one hand, Kant describes the process of calculation in arithmetic as a process of sequential addition of units in time (*Prol*, AA 04, p. 283; Kant, 2004b, p. 35; *KrV*, A 142 / B 182; Kant, 1998, p. 274). On the other hand, he says that number is an intellectual concept that does not depend on sensibility and that sensibility is only needed for doing calculations (*Br*, AA 10, pp. 556-557; Kant, 1999, pp. 284-285; *cf*. *MSI*, AA 02, p. 397; Kant, 1992c, p. 390; Hanna, 2003, p. 340). Besides these remarks, Kant calls number a "schema of magnitude", which further complicates analysis (*KrV*, A 142-143 / B 182; Kant, 1998, p. 274).

According to Sutherland, these obstacles are so formidable as to provoke a situation that makes equally plausible two opposite views on the fundamental properties of numbers. We do not even know whether Kant adhered to the cardinal or ordinal conception of number (Sutherland, 2020, p. 253). Sutherland attributes this

[13] In what follows, only arithmetic will be discussed, since the case of algebra has been treated in detail by L. Shabel (1998; 2003, pp. 115-131).

[14] I am referring to the conspectus of Kant's lectures on mathematics based on Wolff's textbook (Wolff, 1734); for more detail see Martin (1967; 1972, pp. 12-17).

[15] The science of sundials (Wolff, 1710, p. 561).

2020, p. 253). Такое положение дел, согласно Сазерленду, связано с тем, что при интерпретации кантовской философии арифметики порой не учитывается кантовская теория величин.

Кант не случайно называет математику учением о величинах (*Größenlehre*) (AA 02, S. 279; Кант, 1994б, с. 165). Причем внутри экстенсивных величин, которые определяются в математике, у Канта также имеется различие между величинами как *quanta* и как *quantitas*. *Quanta* — это, несколько огрубляя, некоторая конкретная величина, такая как, например, геометрическая фигура. Кант, однако, замечает, что «математика конструирует не только величины (*quanta*), как это делается в геометрии, но и величину как таковую (*quantitatem*)» (A 717 / B 745; Кант, 2006а, с. 909—911). *Quantitas* — это то, что можно перевести как «свойство быть величиной», то есть количество. *Quantitas* отвечает на вопрос «Как велико нечто?» или «Как много?», то есть абстрагируется от всех качественных различий величин и рассматривает их только с точки зрения их количества (A 163 / B 204; Кант, 2006а, с. 289)[18]. То есть число — это в первую очередь некоторое собрание однородного[19]. Отсюда, правда, еще не следует, что Кант придерживается кардинальной концепции числа, так как ординальные моменты у него также присутствуют. Главный же вывод из анализа, проведенного Сазерлендом, таков: применяя наши современные концепции к кантовской философии, мы упускаем из виду тот факт, что Кант еще не мыслил в этих понятиях (Sutherland, 2017, p. 188)[20].

[18] Фигуры тогда нередко рассматривались не как геометрические места точек, а как «ограничения протяжения» (Wolff, 1752, S. 27).

[19] Вольф объясняет, откуда «берется» число, следующим образом: «…если взять вместе много отдельных вещей одного вида, то возникает число» (Wolff, 1734, S. 34).

[20] Особняком стоит вопрос о том, что Кант называет «числом»: имеет ли он в виду то, что числа — это в первую очередь натуральные числа, или числами также считаются и 0, и отрицательные числа, и даже иррациональные, ср.: (Friedman, 1998, p. 85; Tait, 2020, p. 280—281).

state of affairs to the fact that Kant's theory of magnitudes is frequently ignored in the interpretations of Kant's philosophy of arithmetic.

It is not by chance that Kant calls mathematics the science of magnitudes (*Größenlehre*) (*UD*, AA 02, p. 279; Kant, 1992b, p. 250). Moreover, within extensive magnitudes which mathematics determines, Kant distinguishes two types of magnitudes: *quanta* and *quantitas*. *Quanta* is, roughly speaking, a concrete magnitude, for example, a geometrical figure. Kant notes, however, that "mathematics does not construct mere magnitudes (*quanta*), as in geometry, but also mere magnitude (*quantitatem*), as in algebra" (*KrV*, A 717 / B 745; Kant, 1998, p. 632). *Quantitas* is what can be translated as "the property of being a magnitude," i. e. quantity. *Quantitas* answers the question "how big is something?" or "how many?", i. e. it abstracts itself from all qualitative differences of magnitudes and considers them only in terms of their quantity (*KrV*, A 163 / B 204; Kant, 1998, p. 288).[16] In other words, the number is above all a collection of the homogeneous elements.[17] It does not follow from this that Kant sticks to the cardinal conception of number, seeing that he has some ordinal aspects of number as well. The main conclusion from Sutherland's analysis is that, in applying our contemporary conceptions to Kant's philosophy, we overlook the fact that Kant was not yet thinking in such terms (Sutherland, 2017, p. 188).[18]

[16] At the time geometrical figures were often considered to be not sets of points, but "limitations of extension" ("[*die*] *Schranken der Ausdehung*") (Wolff, 1752, p. 27).

[17] Wolff (1734, p. 34) thus explains where the number "comes from": "If we put together many separate things of one kind, the number appears" ("*Wenn man viel eintzele Dinge von einer Art zusammen nimmt, entstehet daraus eine Zahl*").

[18] What Kant means by number is a separate question: Does he mean above all natural numbers or also 0, negative and even irrational numbers? *Cf.* Friedman (1998, p. 85), Tait (2020, pp. 280-281).

Таким образом, предмет арифметики — это *quantitas*, или количество вообще. Из этого, впрочем, можно сделать два вывода. С одной стороны, отсюда может следовать, что геометрия в качестве *Mathesis specialis* — это «единственная математическая наука, чьи объекты (в качестве величин) определяемы в чистом созерцании» (Friedman, 2020, p. 224). Ведь арифметика применяется независимо от конкретных различий величин, где последние рассматриваются просто как единицы. С другой стороны, возможен и альтернативный взгляд. Его предложил У. Тейт. Он указывает, что фридмановский тезис слишком сильный. Согласно Тейту, объекты арифметики также определимы в чистом созерцании в качестве чисел и отношений между величинами (Tait, 2020, p. 285). Таким образом, и Тейт, и Фридман согласны с тем, что существует некоторая асимметрия, по выражению Ч. Парсонса (Parsons, 1992a, p. 54), между геометрией и арифметикой, но расходятся в понимании того, что такое математический объект.

Эта асимметрия и беспокоит Э. Карсон, которая задается следующим вопросом: «Если отношение между арифметикой и формой созерцания не такое же, как между геометрией и формой созерцания, тогда в каком смысле арифметика выражает условия возможности опыта?» (Carson, 2020, p. 234). Кант указывает, что число — это «*схема определенной величины*» (A 142 / B 182; Кант, 2006a, с. 261). Карсон предлагает следующую интерпретацию этого тезиса: «Утверждение, что число — это схема понятия величины, должно заключаться в том, что число каким-то образом выражает правило определения нашего созерцания посредством понятия величины» (Carson, 2020, p. 243). Получается, что конкретные пространство и время синтетически производятся так, что схемой величины является число. А так как все созерцания — это величины, то получается, что все созерцания для того, чтобы стать легальными предметами возможного опыта, должны вклю-

Thus, the object of arithmetic is *quantitas*, or quantity in general. However, this claim may lead to two conclusions. On the one hand, it may suggest that geometry (as *Mathesis specialis*) is "the only mathematical science whose objects (as magnitudes) are determinable in pure intuition" (Friedman, 2020, p. 224). For arithmetic is used irrespective of concrete differences of magnitudes, the latter being seen simply as unities. On the other hand, an alternative view is possible. It has been proposed by William Tait, who considers Friedman's thesis to be too strong. According to Tait (2020, p. 285), the objects of arithmetic can also be determined in pure intuition as numbers and relations between magnitudes. In other words, Tait and Friedman agree that there is what Parsons (1992a, p. 54) called a certain asymmetry between geometry and arithmetic, but they differ on what exactly a mathematical object is.

The asymmetry is what worries E. Carson who asks the following question: "If the relation between arithmetic and the form of intuition is not the same as the relation between geometry and the form of intuition, then in what sense does arithmetic express conditions of possible experience?" (Carson, 2020, p. 234). Kant points out that number is "the pure schema of magnitude" (*KrV*, A 142 / B 182; Kant, 1998, p. 274). Carson offers the following interpretation of this thesis: "The claim that number is the schema of the concept of quantity must be that number somehow expresses a rule for the determination of our intuition by the concept of quantity" (Carson, 2020, p. 243). It turns out that concrete space and time are synthetically produced in such a way that number is the schema of a magnitude. Since all intuitions are magnitudes, it turns out that all intuitions must include sequential чать последовательный синтез (Carson, 2020, p. 244). Поэтому арифметика и понятие числа вместе с ней «фундированы в необходимых условиях возможного опыта и тем самым предоставляют априорное познание объектов в отношении их формы» (Carson, 2020, p. 247). Так, арифметика, лишенная *непосредственного* предмета в созерцании, все же обладает объективной значимостью для предметов возможного опыта, выражая принцип, по которому синтезируются определенные величины.

3.3. Математика и естествознание

Кант полагает, что математика обладает объективной значимостью — она выражает условия возможности опыта. Она также, по-видимому, является корректным инструментом для описания природы. Насколько далеко простираются ее полномочия в этом деле?

Одна из центральных проблем в применении математики к явлениям заключается в том, что она, кажется, входит в противоречие с некоторыми философскими доктринами. Например, с представлением о том, что если есть нечто составное, то есть и нечто простое, из чего составное и составлено (AA 04, S. 505—508; Кант, 1994в, с. 295—299; AA 08, S. 248). В общем случае это означает, что есть некоторые неделимые элементы — атомы или монады, из которых составлен мир. Это представление очевидным образом противоречит представлению о бесконечной делимости пространства, в котором, соответственно, не может быть найдено ничего простого.

Кант во многих текстах обращался к обсуждению этой проблемы, настойчиво указывая, что ее решение предлагает трансцендентальный идеализм (A 155—156 / B 206—207; Кант, 2006а, с. 191; AA 04, S. 505—508; Кант, 1994в, с. 295—299; AA 08, S. 248; ср.: Crusius, 1766, S. 194—196). В общем случае решение выглядит следующим образом: явления не суть вещи сами по себе, и поэтому философские построения, основанные на одних только понятиях, не имеют

synthesis if they are to be legitimate objects of possible experience (*ibid.*, p. 244). Therefore arithmetic and the concept of number along with it are "grounded in necessary conditions of possible experience, and thereby provides *a priori* cognition of objects with regard to their form" (*ibid.*, p. 247). Thus, arithmetic, deprived of an *immediate* object in intuition, still has objective significance for objects of possible experience, expressing the principle in accordance with which certain magnitudes are synthesised.

3.3. Mathematics and Natural Science

Kant believes that mathematics has objective validity, expressing as it does the conditions of possible experience. It is also apparently the right instrument for describing nature. How far does its jurisdiction in this matter stretch?

One of the central problems in applying mathematics to phenomena is that mathematics seems to be in contradiction with some philosophical doctrines. For example, with the idea that if there is something composite there must also be something simple (*MAN*, AA 04, pp. 505-508; Kant, 2004a, pp. 42-45; *ÜE*, AA 08, p. 248; Kant, 2002, p. 334). Generally, it means that there are certain indivisible elements — atoms or monads — which constitute the universe. This idea obviously contradicts the idea of infinite divisibility of space in which therefore nothing simple can be found.

Kant touched upon this problem in many of his texts, insisting that transcendental idealism provides the solution (*KrV*, A 155-156 / B 206-207; Kant, 1998, pp. 281-282; *MAN*, 04, pp. 505-508; Kant, 2004, pp. 42-45; *ÜE*, AA 08, p. 248; Kant, 2002, p. 334; *cf.* Crusius, 1766, pp. 194-196). The solution is basically as follows: appearances are not things in themselves, thus philosophical reasoning based only on concepts (in abstraction from the conditions of sensibiliзначения в отношении явлений[21]. В этом контексте есть несколько сюжетов, которые приобретают особую важность. Во-первых, это вопрос о бесконечности, который уже кратко обсуждался выше. Во-вторых, это вопрос о статусе и роли бесконечно малых, что Кант обсуждал и в «критический» период, но чему уделил особенно пристальное внимание в работе «Опыт введения в философию понятия отрицательных величин» (AA 02, S. 165-204; Кант, 1994а).

Традиционный контекст, в котором бесконечно малые появлялись в новоевропейской философии, связан с вопросом о делении протяженных вещей и о существовании или несуществовании атомов (Декарт, 1989, с. 358). Однако, как указывает Д. Уоррен, Кант разводит вопросы о бесконечной делимости и о бесконечно малых — к последним он апеллирует в особых случаях (Warren, 2020, p. 71). В некоторых текстах он называет бесконечно малые «идеей» (AA 04, S. 505; Кант, 1994в, с. 295; AA 04, S. 522; Кант, 1994в, с. 317), имея в виду нечто схожее с тем, что в «Критике чистого разума» называется «идеей» (Warren, 2020, p. 73) и без чего было бы невозможно математически рассуждать, например, о сжатии или расширении материи (Warren, 2020, p. 74). Они нужны для того, чтобы выразить изменения, вызываемые фундаментальными силами, которые без идеи бесконечно малого расстояния между частями материи не смогли бы стать интеллигибельными: расстояние между частями материи при этом не является действительным, и поэтому конструкция в созерцании требует обращения к бесконечно малым (Warren, 2020, p. 76). Вопрос же о делимости материи не играет здесь ключевой роли. Это, пожалуй, показательный пример того, как Кант представляет себе применение математики к явлениям, хотя и продемонстрированный в основном на материале докритических сочинений.

[21] Пози интерпретировал этот тезис так, что логика «Критики чистого разума» не классическая, а интуиционистская, и это позволило Канту избежать традиционных парадоксов (Posy, 1983; 1991, p. 118; 2019, p. 23—24; ср.: Risjord, 1990, p. 126, 142).

ty) would not be valid with regard to appearances.[19] In this context several issues take on particular significance. First, there is the question of infinity, which I have briefly touched upon above. Second, there is the question of the status and role of infinitely small magnitudes which Kant discussed in the "critical" period but especially in the *Attempt to Introduce the Concept of Negative Magnitudes into Philosophy* (*NG*, AA 02, pp. 165-204; Kant, 1992a).

The traditional context in which infinitely small magnitudes appeared in modern European philosophy involves the question of division of extended things and the existence or non-existence of atoms (Descartes, 1989, p. 358). However, as Warren points out, Kant separates the questions of infinite divisibility and infinitely small magnitudes, appealing to the latter only in exceptional cases (Warren, 2020, p. 71). In some texts he refers to infinitely small magnitudes as "an idea" (*MAN*, AA 04, p. 505; Kant, 2004a, p. 42; *MAN*, AA 04, p. 522; Kant, 2004a, p. 60), meaning something similar to what he called "an idea" in the *Critique of Pure Reason* (Warren, 2020, p. 73), and without which it would have been impossible to reason, e. g. about the contraction or expansion of matter (*ibid*., p. 74). They are necessary to express the changes caused by fundamental forces which could not be intelligible without the idea of an infinitely small distance between particles of matter: the distance between particles of matter in this case is not real, which is why the construction in intuition calls for turning to infinitely small magnitudes (*ibid*., p. 76). The question of divisibility of matter is not crucial here. This is perhaps a telling example of how Kant envisions the application of mathematics to phenomena, albeit it wasdemonstrated mainly in pre-critical works.

[19] Posy interpreted this thesis in the sense that the logic of the *Critique of Pure Reason* was not classical but intuitionistic, which enabled Kant to avoid traditional paradoxes (Posy, 2019, pp. 23-24; 1991, p. 118; 1983; *cf.* Risjord, 1990, p. 126, 142).

4. Что значит заниматься математикой?

4.1. Метод математики и метод философии

Пришло время поставить вопрос о том, в чем заключается метод математики. В «Критике чистого разума» Кант указывает, что математика является единственной дисциплиной, которая может давать дефиниции в строгом смысле слова (A 730 / B 759; Кант, 2006a, с. 925)[22], и вообще рассматривается в качестве парадигмы синтетического познания *a priori*. В исследовательской литературе существуют различные интерпретации этого утверждения.

Согласно «логической интерпретации» Я. Хинтикки, синтетичность математики заключается только в том, что в математике осуществляется конструкция понятий в созерцании (Hintikka, 1981, p. 210), то есть «вводятся некоторые новые линии, точки и окружности» (Hintikka, 1992, p. 30). Это в итоге позволяет ему объяснять кантовскую философию математики в терминах языковых игр поиска и нахождения (Hintikka, 1984, p. 103). Таким образом, согласно Хинтикке, неконцептуальным в математике является в первую очередь вывод (см. также: (Beth, 1956; Russell, 2010)). Однако есть и обратная позиция, согласно которой неконцептуальными являются в первую очередь аксиомы (Cassirer, 1907; Beck, 1955; Brittan, 1978; Hogan, 2020, p. 126). Дискуссия отчасти сводится к вопросу о том, что такое созерцание. Если созерцание — это просто единичное представление, которое требуется для математического вывода (для операции экзистенциальной инстанции или для выражения бесконечности), то, следовательно, экстраконцептуальным будет сам вывод. Однако если предположить, что неконцептуальными являются в первую очередь аксиомы, то открывается возможность для более формалистской интерпретации Канта.

[22] См. подробнее: (Beck, 1956; Capozzi, 1981).

4. What Does It Mean to Do Mathematics?

4.1. The Method of Mathematics and the Method of Philosophy

The time has come to address the question, what is the method of mathematics? In the *Critique of Pure Reason* Kant argues that mathematics is the only discipline that can produce definitions in strict sense (*KrV*, A 730 / B 759; Kant, 1998, p. 639),[20] and is considered to be a paradigm of synthetic cognition *a priori*. This claim is variously interpreted in the literature.

According to the "logical interpretation" of Hintikka the synthetic character of mathematics is manifested only in that mathematics constructs concepts in intuition (Hintikka, 1981, p. 210), i. e. "some new lines, points, or circles are introduced" (Hintikka, 1992, p. 30). This enables him to explain the Kantian philosophy of mathematics in terms of language-games of seeking and finding (Hintikka, 1984, p. 103). According to Hintikka, what is non-conceptual in mathematics is above all the inference (see also: Beth, 1956; Russell, 2010). However, an opposite view holds that it is the axioms that are non-conceptual in the first place (Cassirer, 1907; Beck, 1955; Brittan, 1978; Hogan, 2020, p. 126). The discussion partly boils down to the question: What is intuition? If intuition is simply a singular representation required for a mathematical inference (be it an existential instantiation or to express infinity), then the inference itself will be extra-conceptual. However, if one assumes that it is the axioms that are primarily non-conceptual, a more formalistic interpretation of Kant becomes possible.

Throughout the greater part of his work, Kant stressed that mathematics and philosophy follow different methods. The key difference of the method of mathematics from that of philosophy is that the former gives definitions of ar-

[20] For more detail see Beck (1955), Capozzi (1981).

На протяжении большей части своего творчества Кант подчеркивал, что математика и философия руководствуются разными методами. Ключевое отличие их методов заключается в том, что первая дает определения произвольно созданным понятиям, в то время как вторая может лишь анализировать данные, поэтому определения математики являются синтетическими, а философские —аналитическими (AA 02, S. 276—277; Кант, 1994б, с. 161—162), определяющими лишь словоупотребление (AA 02, S. 283; Кант, 1994б, с. 170). Математика использует свои понятия *in concreto*, а не *in abstracto*, как философия (AA 02, S. 278; Кант, 1994б, с. 163). Так как математика создает свои понятия, она может начинаться с дефиниций и содержит очень мало недоказуемых положений (AA 02, S. 282; Кант, 1994б, с. 168). Таким образом, ключевое различие между математикой и философией заключается в том, *как* они оперируют понятиями (A 714—715 / B 742—743; Кант, 2006а, с. 907—909).

Дж. Хайс демонстрировал это на примере дискуссии о дефиниции окружности. Проблема заключается в том, что из стандартной дефиниции окружности как фигуры, каждая точка которой равноудалена от центра окружности, не следует возможность такой фигуры. Действительно, для того, чтобы доказать возможность такой фигуры, нужно построить ее. Соответственно, считалось, что по этой причине стандартная дефиниция дефективна и нужно заменить ее генетической дефиницией[23], из которой возможность фигуры будет следовать непосредственно.

Кант полагал, что деление на реальные и номинальные дефиниции в математике является излишним, так как овладеть математическим понятием — уже значит овладеть им как правилом построения (Heis, 2014, p. 608—609). То есть единственный для нас способ мыслить фигуру, соответствующую «номинальной дефиниции», — это мыслить правило ее построения,

[23] Генетическая дефиниция — это такая дефиниция, которая указывает на метод, или способ, которым образуется предмет определения. См.: (Wolff, 1740, p. 735). См. также: (AA 16, S. 609, № 3001; Baumgarten, 1773, S. 47—48).

bitrarily created concepts while the latter can only analyse data, which is why mathematical definitions are synthetic and philosophical ones are analytical (*UD*, AA 02, pp. 276-277; Kant, 1992b, pp. 248-249), which only define word use (*UD*, AA 02, p. 283; Kant, 1992b, p. 257). Mathematics uses its concepts *in concreto*, and not *in abstracto*, like philosophy (*UD*, AA 02, p. 278; Kant, 1992b, pp. 250-251). Since mathematics creates its concepts it may begin with definitions and contains very few unprovable propositions (*UD*, AA 02, p. 282; Kant, 1992b, p. 255). Thus, the key difference between mathematics and philosophy lies in *how* they handle concepts (*KrV*, A 714-715 / B 742-743; Kant, 1998, pp. 631).

Heis demonstrated this on the basis of the discussion of the definition of a circle. The problem is that the standard definition of a circle as a figure each point of which is the same distance from a given point called the centre of the circle, does not prove the possibility of such a figure. Indeed, to prove that such a figure is possible one needs to construct it. Accordingly, it was assumed that for this reason the standard definition had to be replaced by a genetic definition,[21] from which the possibility of such a figure would follow immediately.

Kant considered the distinction between real and nominal definitions in mathematics to be superfluous because mastering a mathematical concept already meant mastering it as a construction rule (Heis, 2014, pp. 608-609). In other words, the only way we can think a figure corresponding to a "nominal definition" is to think the rule of construction of it, which invalidates the epistemological meaning of the difference between real and nominal definitions in mathematics. Applying these results to the distinction between the methods of mathematics

[21] A genetic definition is a definition that points to the method by which the object of definition is formed. *Cf.* Wolff, 1740, p. 735. See also *Refl* 3001, AA 16, p. 609; Baumgarten (1773, pp. 47-48).

что нивелирует эпистемический смысл различия между реальными и номинальными дефинициями по отношению к математике. Если применить эти результаты к различению методов математики и философии, то становится понятно кантовское утверждение о том, что математика и философия просто по-разному используют понятия: овладеть философским понятием значит узнать его существенные признаки; овладеть математическим — овладеть правилом построения предмета понятия[24].

4.2. Математика и графическое изображение

Выше указывалось, что математика использует свои понятия *in concreto*, и этот сюжет связан с вопросом о роли графического изображения в математике. Можно полагать, что Кант апеллирует к важности графического изображения, потому что традиционные евклидовы доказательства не могут обосновать существование некоторых точек без обращения к чертежам (Friedman, 1998, p. 58—60). Можно вообще считать, как Хинтикка, что отсутствует существенная разница между рассуждениями на языке формальной логики и теми, которые обращаются к чертежам, и что, соответственно, кантовские апелляции к важности чертежей не представляют особого философского интереса (Hintikka, 2020, p. 93). Можно, напротив, приняв во внимание обсуждение генетической дефиниции в прошлом разделе, а также обратив внимание на математическую практику XVIII в., заметить, что если возможность фигуры покоится на ее конструируемости (ср.: Parsons, 1992б, p. 137), а владеть математическим понятием — значит знать правило его конструкции, то схематическое[25]

[24] См. также: (Wolff-Metternich, 1995, S. 146), ср. с операционистской интерпретацией А. Мельника (Melnick, 1992, p. 250—251).

[25] Кант, как и, например, Вольф, разделял схематическую, или априорную, и механическую, или эмпирическую, конструкцию (A 718 / B 746; Кант, 2006a, c. 911). См. также: (Allison, 1973, p. 90—91; Shabel, 2003, p. 102—106). Схематическая конструкция, как Кант указывает в споре с Эберхардом, не подразумевает точного построения фигуры, скорее ее задача — изобразить общую экземплификацию правила (AA 08, S. 191).

and philosophy, we can see the point of Kant's claim that mathematics and philosophy simply use concepts in different ways: to master a philosophical concept means to learn its essential characteristics; to master a mathematical one means to master the rule of construction of the object of the concept.[22]

4.2. Mathematics and Diagrams

As pointed out above, mathematics uses its concepts *in concreto*, which leads us to the question about the role of graphic depiction in mathematics. Arguably, Kant appeals to the importance of graphic representation because traditional Euclidian proofs cannot ground the existence of certain points without reference to diagrams (Friedman, 1998, pp. 58-60). We can go along with Hintikka (2020, p. 93) who believes that there is no essential difference between reasoning in the language of formal logic and reasoning with diagrams, and that Kant's insistence on the importance of diagrams does not present a particular interest for philosophy. However, we may, on the contrary, take into account the discussion of genetic definition in the previous section and, being mindful of the mathematical practice of the eighteenth century, argue that if the possibility of a figure depends on its constructability (*cf.* Parsons, 1992b, p. 137), and mastering a mathematical concept means knowing the rule of its construction, the schematic construction[23]

[22] See also Wolff-Metternich (1995, p. 146), *cf.* A. Melnick's operationist interpretation (Melnick, 1992, pp. 250-251).

[23] Kant, like for example Wolff, distinguished schematic or *a priori*, and mechanical or empirical, construction (*KrV*, A 718 / B 746; Kant, 1998, pp. 632-633). See also Allison (1973, p. 90-91), Shabel (2003, pp. 102-106). Schematic construction, as Kant notes in his argument with Eberhard, does not involve an accurate building of a figure, its task being rather to depict the general exemplification of the rule (*ÜE*, AA 08, p. 191; Kant, 2002, p. 287).

изображение будет играть ключевую роль в математике (Shabel, 2003; Mancosu, 1996, p. 94—97).

Но математика обращается к конструкции и в той своей части, которая относится к естествознанию (AA 04, S. 481; Кант, 1994в, с. 264). Причем Д. Уоррен показывает, что схематическое изображение в математической части естественных наук не менее важно, чем в самой математике. Он обращает внимание на то, что схематическое изображение позволяет сделать интеллигибельными бесконечно малые изменения, которые без этого нельзя было бы выразить (Warren, 2020, p. 76). То есть схематическое изображение как в чистой, так и в прикладной математике служит для доказательства возможности объекта или преобразования: без схематического изображения, согласно Канту, объекты и преобразования лежали бы за пределами возможного познания (Warren, 2020, p. 76—78).

Однако у доктрины необходимого схематического изображения есть некоторые подводные камни, и на один из них указывает Г. Бриттан. Он обращает внимание на то, что к кантовскому времени под влиянием открытий Эйлера вопрос о «построимости» кривых сменился вопросом о «допустимости» функций. Для того чтобы узнать, допустима функция или нет, нет необходимости обращаться к конструированию кривых (Brittan, 2020, p. 197).

4.3. Философия математики в творчестве Канта

Осталось обсудить последний крупный сюжет — об историческом месте кантовской философии математики. С одной стороны, можно писать ее историю, которая начинается после смерти Канта (Tait, 2020, p. 290—291). С другой — можно задаться вопросами о том, в каком историческом контексте кантовская философия математики появилась и претерпела ли она изменения за время кантовского творчества.

Хинтикка, например, строит свою интерпретацию исходя из того, что у кантовской фи-

would play the key role in mathematics (Shabel, 2003; Mancosu, 1996, pp. 94-97).

However, mathematics turns to construction even in that part which pertains to natural science (*MAN*, AA 04, p. 481; Kant, 2004a, p. 16). Warren shows that schematic construction in the mathematical part of natural sciences is no less important than in mathematics itself. He points out that schematic construction makes intelligible infinitely small changes which would otherwise be impossible to express (Warren, 2020, p. 76). That is, schematic construction, both in pure and in applied mathematics, serves to prove the possibility of an object or a transformation: without schematic construction, according to Kant, objects and transformation would be beyond possible cognition (*ibid*., pp. 76-78).

However, there are some stumbling blocks in the doctrine of necessary schematic construction, and G. Brittan points to one of them. He draws attention to the fact that by Kant's time, under the influence of Euler's discoveries, the question of "buildability" of curves was supplanted by the question of "admissibility" of functions. There is no need to construct curves in order to determine whether or not a function is admissible (Brittan, 2020, p. 197).

4.3. The Philosophy of Mathematics in Kant's Works

The last major issue that remains to be discussed is the historical place of Kant's philosophy of mathematics. On the one hand, one can write its history starting from after Kant's death (Tait, 2020, pp. 290-291). On the other hand, one may ask about the historical context in which Kant's philosophy of mathematics appeared and about the evolution of Kant's view on mathematics.

Hintikka, for example, builds his interpretation on the assumption that the Kantian philosлософии математики есть некоторое «ядро», изложенное в «Исследованиях отчетливости принципов естественной теологии и морали» и повторенное в «Учении о методе» в «Критике чистого разума», а есть то, что было приобретено позже и от чего «ядро» не зависит, — это учение о непосредственном чувственном характере созерцаний. Хинтикка называет «аристотелевской ошибкой» то, что Кант, как и Аристотель, ошибочно полагает, будто единственный доступный для нас способ иметь дело с партикуляриями — это их чувственное восприятие (Hintikka, 1984, p. 103)[26]. Из этой перспективы становится ясен интерес к кантовской философии математики докритического периода.

Главный тезис «Исследования отчетливости принципов естественной теологии и морали» уже не раз обсуждался выше: математика произвольно создает свои понятия (AA 02, S. 276; Кант, 1994б, с. 161). То есть достоверность математики покоится на том, что она ничего не заимствует из свойств предмета, а только опирается на произвольные «операции со знаками» (Dunlop, 2020, p. 18). Существуют два подхода к интерпретации того, что в этом контексте означает «произвольность». Данлоп называет их «сильной» и «слабой» интерпретацией произвольности. Согласно сильной интерпретации произвольности, математическим понятиям вообще не соответствуют никакие объекты (Dunlop, 2020, p. 11; 2014, p. 669). Эта версия, однако, создает проблемы для объяснения применимости математики к последним, к тому же ей недостает текстологического обоснования (Dunlop, 2014, p. 670—671). Поэтому Данлоп предлагает слабую версию, согласно которой математика просто не рассматривает те свойства, которые могут быть обнаружены лишь эмпирически (Dunlop, 2020, p. 21).

Но разве философия не занимается тем же самым? Ведь она тоже абстрагируется от случайных свойств вещей: «Философия — это на-

[26] В одном месте Хинтикка указывает, что позиция Канта в этом аспекте оказалась некантианской (Hintikka, 1991, p. 132).

ophy of mathematics has a "nucleus" set forth in the *Inquiry Concerning the Distinctness of the Principles of Natural Theology and Morality* and repeated in the "doctrine of method" in the *Critique of Pure Reason*. Then there is what was developed later and on which the "nucleus" does not depend, the doctrine of the immediate sensible character of intuitions. Hintikka (1984, p. 103) describes as "an Aristotelean mistake" the fact that Kant, like Aristotle, mistakenly believes that sensible intuition is the only way we can deal with particulars.[24] This perspective explains the interest in Kant's philosophy of mathematics in the pre-critical period.

The main thesis of the *Inquiry Concerning the Distinctness of the Principles of Natural Theology and Morality* has been repeatedly discussed above: mathematics creates its concepts arbitrarily (*UD,* AA 02, p. 276; Kant, 1992b, p. 248). In other words, mathematics derives its validity from the fact that it does not borrow anything from the object's properties and builds solely on arbitrary "operations with signs" (Dunlop, 2020, p. 18). There are two approaches to the interpretation of what "arbitrariness" means in this context. Dunlop calls them "strong" and "weak" interpretations of arbitrariness. In accordance with the strong interpretation, mathematical concepts do not correspond to any objects (Dunlop, 2020, p. 11; 2014, p. 669). This version, however, creates problems in explaining the applicability of mathematics to the latter and, besides, it lacks a textological grounding (Dunlop, 2014, pp. 670-671). Therefore Dunlop (2020, p. 21) proposes a weak version whereby mathematics simply does not concern itself with the properties that can only be discovered empirically.

But is it not what philosophy does? It, too, abstracts itself from accidental properties of things: "Philosophy is a science of gener-

[24] In one place Hintikka (1991, p. 132) claims that Kant's position on this matter turned out to be non-Kantian.

ука о всеобщих свойствах вещей, поскольку они могут быть познаны без обращения к вере», — пишет Майер (Meier, 1752, S. 10). В этом отношении философия просто является более абстрактной дисциплиной, чем математика, но это еще не значит, что они следуют различным методам. Так же выстраивал свою аргументацию и Мендельсон (Mendelssohn, 1786, S. 48—49). Почему Канта такое решение не устраивает?

Оба, Кант и Мендельсон, считают, что философия не может использовать знаки так же, как и математика, однако «только Кант рассматривает этот факт как фатальный для вольфианской программы» (Dunlop, 2020, p. 34). Он полагает, что восприятие играет ключевую роль в операциях со знаками, так как оно позволяет в случае, например, счета со «счетными палочками» установить «существование» получаемого числа (что в ином случае требовало бы дополнительной операции) (Dunlop, 2014, p. 673). Мендельсон, подобно Лейбницу и Вольфу, признавая прагматическую полезность восприятия в операциях со знаками, не считает его необходимым для всех таких операций. Именно поэтому для Канта (в отличие от вольфианцев) метод математики коренным образом отличается от метода метафизики (Dunlop, 2014, p. 34).

В том, как Кант разводит методы математики и философии, есть момент, на который нечасто обращают внимание. Дело в том, что Кант переосмысливает не только то, как следует заниматься философией, но также и то, в чем состоит метод математики. Действительно, Вольф описывает этот метод предельно общим образом: математика «начинается с объяснений (*Erklärungen*), переходит к основоположениям и далее к теоремам (*Lehrsätzen*) и задачам» (Wolff, 1710, S. 5). Но Кант указывает совсем другие признаки математического метода: для него важнее всего то, что математика осуществляет конструкцию понятий в созерцании (A 714 / B 742; Кант, 2006a, с. 907). Это должно дать возможность лучше понять, в чем Кант расходится с вольфианцами (Heis, 2014, p. 622).

al properties of things inasmuch as they can be cognised without turning to faith,"[25] writes Meier (1752, p. 10). In that respect philosophy is merely a more abstract discipline than mathematics, but that does not mean that they use different methods. Mendelssohn (1786, pp. 48-49) also made this claim. Why did Kant reject this solution?

Both Kant and Mendelssohn believe that philosophy cannot use signs in the same way as mathematics, but "only Kant considers this fatal for the Wolffian program" (Dunlop, 2020, p. 34). He maintains that perception plays the key role in operations with signs because, for example, in the case of counting with "counting sticks" it makes it possible to establish the "existence" of the number obtained (which would otherwise have required an additional operation) (Dunlop, 2014, p. 673). Mendelssohn, like Leibniz and Wolff, recognising the pragmatic utility of perception in operations with signs do not think it is necessary for all such operations. That is why for Kant the method of mathematics is radically different from the method of metaphysics, while they are not different for Wolffians (*ibid*., p. 34).

An important point that is often overlooked has to do with how Kant distinguishes the methods of mathematics and philosophy. Kant reinterprets not only the method of philosophy, but also the method of mathematics. Indeed, Wolff (1710, p. 5) describes the method of mathematics in the most general way: mathematics "begins with explanations (*Erklärungen*), passing on to basic foundations and then to theorems (*Lehrsätzen*) and problems."[26] But Kant names totally different features of the mathematical method: the most important thing for

[25] "*Die Weltweisheit ist eine Wissenschaft der allgemeinen Beschaffenheiten der Dinge, in so ferne dieselbe ohne Glauben können erkannt werden*."

[26] *Mathematik "fängt an von den Erklärungen, geht fort zu den Grund-Sätzen und hiervon weiter zu den Lehr-Sätzen und Aufgaben*."

Кант заявляет, что в «Критике чистого разума» он осуществил «коперниканский переворот» (B XXII; B XVI—XVII; Кант, 2006а, с. 23, 17—19). Традиционное объяснение «переворота» выглядит следующим образом: через какое-то время после публикации инаугурационной диссертации 1770 г. Кант совершил некое философское открытие, которое вылилось в проект «Критики чистого разума» и прочих текстов критического периода. Однако, согласно Пози, объяснить, в чем же в итоге состояло изменение кантовской позиции, непросто (Posy, 2020, p. 36). Он замечает, что основные «критические» тезисы встречаются уже в диссертации, и задается вопросом: «Где же, в таком случае, "критический поворот"?» (Posy, 2020, p. 39). И можно добавить: что он значит для кантовской философии математики?

Анализируя проблему, Пози обращается к различию человеческого и божественного интеллекта. Согласно популярному взгляду (которого придерживался, например, Лейбниц), эти два типа интеллекта различаются лишь по мощности: первый является конечным, в то время как последний бесконечен (Posy, 2020, p. 45)[27]. Кантовская диссертация, по мнению Пози, содержит вариант этого взгляда, причем настолько противоречивый, что в нем обнаруживаются странные проблемы, среди которых, например, невозможность для математики постигнуть бесконечность, так как математика опирается на конечную рецептивность[28] (Posy, 2020, p. 50, 64). «Критический переворот» же, согласно Пози, заключается в том, что теперь познание рассматривается не как аналогичное божественному, а как познание с радикально иной точкой зрения — с человеческой (Ibid., p. 55). С этой точки зрения наконец-то стало возможно объяснить применение математики к явлениям, так как ее не нужно соотносить с вещами самими по себе (Ibid., p. 45).

[27] Схожим образом рассматривал критический поворот и Г. Эллисон (Allison, 2004, p. 27—34).

[28] Впрочем, Бриттан показывает, что Кант в этом и не нуждался (Brittan, 2020, p. 185).

him is that mathematics constructs concepts in intuition (*KrV*, A 714 / B 742; Kant, 1998, pp. 630-631). This gives a better insight into the differences between Kant and the Wolffians (Heis, 2014, p. 622).

Kant claims that in the *Critique of Pure Reason* he carried out a "Copernican revolution" (*KrV*, B XXII; B XVI-XVII; Kant, 1998, pp. 112-113, 110). The traditional view of the "revolution" is as follows: some time after the publication of his inaugural dissertation in 1770 Kant made a philosophical discovery which developed into the project of the *Critique of Pure Reason* and other texts of the critical period. However, Posy points out that it is difficult to see how exactly Kant's position changed (Posy, 2020, p. 36). He notes that the main 'critical' theses are already contained in his dissertation and asks, "Where, in that case, is the 'critical turn'?" (*ibid*., p. 39). And we may add, "What does it mean for Kant's philosophy of mathematics?"

Looking into this problem, Posy turns to the difference between human and divine intellect. According to one popular view (held, for example, by Leibniz), these two types of intellect differ only in power: the former is finite while the latter is infinite (*ibid*., p. 45).[27] Kant's dissertation, Posy notes, contains a variant of this view, which is so inconsistent as to throw up strange problems, one of which is: mathematics cannot deal with infinity because it rests on finite receptivity[28] (*ibid*., p. 64, 50). The "critical turn", according to Posy, lies in the fact that cognition is now seen not as analogous to the divine, but as cognition with a radically different point of view — that of the human (*ibid*., p. 55). From that point of view, it has at last become possible to explain the use of mathematics with respect to phenomena, since it does not have to be related to things in themselves (*ibid*., p. 45).

[27] Allison (2004, pp. 27-34) discussed the critical turn in similar vein.

[28] Brittan (2020, p. 185), though, shows that Kant did not need this.

5. Заключение

Обсуждаемые выше сюжеты, конечно, не исчерпывают содержание всех дискуссий, ведущихся вокруг кантовской философии математики. Мало они касаются и ее современного развития, которое Пози и Рехтер, по их словам, планируют осветить во втором томе издаваемого ими сборника (Posy, Rechter, 2020, p. 12). В ходе рассмотрения проблем, представленных в настоящем обзоре, можно было убедиться, что существует еще много открытых вопросов, которые нуждаются в разработке. Но я убежден, что эти лакуны будут закрыты в будущем при все более возрастающем интересе к кантовской философии математики, который, надеюсь, проявится и в литературе на русском языке.

Данное исследование проведено в рамках проекта «Кантовский проект дескриптивной метафизики: история и современное развитие», поддержанного грантом РФФИ (проект № 19-011-00925а).

Список литературы

Декарт Р. Первоначала философии / пер. С. Я. Шейнман-Топштейн, Н. Н. Сретенского // Соч. : в 2 т. М. : Мысль, 1989. Т. 1. С. 297—422.

Кант И. Опыт введения в философию понятия отрицательных величин // Соч. : в 8 т. М. : Чоро, 1994а. Т. 2. С. 41—84.

Кант И. Исследование отчетливости принципов естественной теологии и морали // Соч. : в 8 т. М. : Чоро, 1994б. Т. 2. С. 159—190.

Кант И. Метафизические начала естествознания // Соч. : в 8 т. М. : Чоро, 1994в. Т. 4. С. 247—372.

Кант И. Логика // Соч. : в 8 т. М. : Чоро, 1994г. Т. 8. С. 266—398.

Кант И. Пролегомены ко всякой будущей метафизике, которая может появиться как наука // Соч. : в 8 т. М. : Чоро, 1994д. Т. 4. С. 5—152.

Кант И. О форме и принципах чувственно воспринимаемого и интеллигибельного мира // Соч. : в 8 т. М. : Чоро, 1994е. Т. 2. С. 277—320.

5. Conclusion

The foregoing does not purport to exhaust the discussions around Kant's philosophy of mathematics. It says little about its modern development which Posy and Rechter plan to cover in the second volume of this collection (Posy and Rechter, 2020, p. 12). The discussion of the problems in this review shows that there are still many open questions that need further study. Even so, I am convinced that these lacunae will be filled in the future as interest increases in Kant's philosophy of mathematics, which hopefully will manifest itself in the Russian-language literature as well.

This study is part of the project "Kantian Project of Descriptive Metaphysics: History and Modern Development" funded by a grant of the RFBR (project № 19-011-00925a).

References

Allison, H. E., 1973. A Historical-Critical Introduction. In: H. E. Allison, ed. 1973. *The Kant-Eberhard Controversy; An English translation together with supplementary materials and a historical-analytic introduction of Immanuel Kant's: On a Discovery According to which any new Critique of Pure Reason has been Made Superfluous by an Earlier.* Baltimore, London: The Johns Hopkins University Press, pp. 1-104.

Allison, H. E., 2004. *Kant's Transcendental Idealism: An Interpretation and Defense.* 2nd ed. New Haven, London: Yale University Press.

Baumgarten, A., 1773. *Acroasis logica*. 2nd ed. Halle: Hemmerde.

Beck, L. W., 1955. Can Kant's Synthetic Judgments Be Made Analytic? *Kant-Studien*, 47(1-4), pp. 168-181.

Beck, L. W., 1956. Kant's Theory of Definition. *The Philosophical Review*, 65(2), pp. 179-191.

Beth, E. W., 1956. Über Lockes "Allgemeines Dreieck". *Kant-Studien*, 48, pp. 361-380.

Brittan, G., 2020. Continuity, Constructibility, and Intuitivity. In: C. J. Posy and O. Rechter, ed. 2020. *Kant's Philosophy of Mathematics; Volume I: The Critical Philosophy and Its Roots*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 181-199.

Кант И. Критика чистого разума (B) // Соч. на нем. и рус. яз. М. : Наука, 2006а. Т. 2, ч. 1.

Кант И. Критика чистого разума (A) // Соч. на нем. и рус. яз. М. : Наука, 2006б. Т. 2, ч. 2.

Allison H. E. A Historical-Critical Introduction // The Kant-Eberhard Controversy / ed. by H. E. Allison. Baltimor ; L. : The Johns Hopkins University Press, 1973. P. 1—104.

Allison H. E. Kant's Transcendental Idealism: An Interpretation and Defense. 2nd ed. New Haven ; L. : Yale University Press New, 2004.

Baumgarten A. Acroasis logica. 2. Aufl. / hrsg. von I. G. Tellnero. Halle : Hemmerde, 1773.

Beck L. W. Can Kant's Synthetic Judgments Be Made Analytic? // Kant-Studien. 1955. Bd. 47. P. 168—181.

Beck L. W. Kant's Theory of Definition // The Philosophical Review. 1956. Vol. 65, № 2. P. 179—191.

Beth E. W. Über Lockes «Allgemeiners Dreieck» // Kant-Studien. 1956. Bd. 48. S. 361—380.

Brittan G. Continuity, Constructibility, and Intuitivity // Kant's Philosophy of Mathematics. Vol. 1 : The Critical Philosophy and Its Roots / ed. by C. Posy, O. Rechter. Cambridge : Cambridge University Press, 2020. P. 181—199.

Brittan G. Kant's Theory of Science. Princeton : Princeton University Press, 1978.

Capozzi M. Kant on Mathematical Definition // Italian Studies in the Philosophy of Science / ed. by M. L. Dalla Chiara. Dordrecht : Springer, 1981. P. 423—452.

Capozzi M. Singular Terms and Intuitions in Kant: A Reappraisal // Kant's Philosophy of Mathematics. Vol. 1 : The Critical Philosophy and Its Roots / ed. by C. Posy, O. Rechter. Cambridge : Cambridge University Press, 2020. P. 103—125.

Carson E. Kant on Intuition in Geometry // Canadian Journal of Philosophy. 1997. Vol. 27, № 4. P. 489—512.

Carson E. Hintikka on Kant's Mathematical Method // Revue Internationale de Philosophie. 2009. Vol. 4, № 250. P. 435—449.

Carson E. Arithmetic and the Conditions of Possible Experience // Kant's Philosophy of Mathematics. Vol. 1 : The Critical Philosophy and Its Roots / ed. by C. Posy, O. Rechter. Cambridge : Cambridge University Press, 2020. P. 231—247.

Cassirer E. Kant und die moderne Mathematik. (Mit Bezug auf Bertrand Russells und Louis Couturats Werke über die Prinzipien der Mathematik) // Kant-Studien. 1907. Bd. 12. S. 1—49.

Brittan, G., 1978. *Kant's Theory of Science*. Princeton: Princeton University Press,

Capozzi, M., 1981. Kant on Mathematical Definition. In: D. M. L. Chiara, ed. 1981. *Italian Studies in the Philosophy of Science*. Dordrecht: Springer, pp. 423-452.

Capozzi, M., 2020. Singular Terms and Intuitions in Kant: A Reappraisal. In: C. J. Posy and O. Rechter, ed. 2020. *Kant's Philosophy of Mathematics; Volume I: The Critical Philosophy and Its Roots*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 103-125.

Carson, E., 1997. Kant on Intuition in Geometry. *Canadian Journal of Philosophy*, 27(4), pp. 489-512.

Carson, E., 2009. Hintikka on Kant's mathematical method. *Revue Internationale de Philosophie*, 250(4), pp. 435-449.

Carson, E., 2020. Arithmetic and the Conditions of Possible Experience In: C. J. Posy, O. Rechter, ed. 2020. *Kant's Philosophy of Mathematics; Volume I: The Critical Philosophy and Its Roots*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 231-247.

Cassirer, E., 1907. Kant und die moderne Mathematik. (Mit Bezug auf Bertrand Russells und Louis Couturats Werke über die Prinzipien der Mathematik). *Kant-Studien*, 12, pp.1-49.

Crusius, C., 1766. *Entwurf der notwendigen Vernunftwahrheiten, wifern sie den zufälligen entgegen gesetzt werden. 3. Auflage*. Leipzig: J. F. Gleditschens Buchhandlung.

Descartes, R., 1985. Principles of Philosophy. In: J. Cottinghanm, R. Stoothoff, ed. 1985. *The Philosophical Writings of Descartes. Vol. 1*. New York: Cambridge University Press, pp. 177-292.

Dunlop, K., 2014. Arbitrary combination and the use of signs in mathematics: Kant's 1763 Prize Essay and Its Wolffian Background. *Canadian Journal of Philosophy*, 44(5-6), pp. 658-685.

Dunlop, K., 2020. Kant and Mendelssohn on the Use of Signs in Mathematics. In: C. J. Posy and O. Rechter, ed. 2020. *Kant's Philosophy of Mathematics; Volume I: The Critical Philosophy and Its Roots*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 15-34.

Falkenstein, L., 2004. *Kant's intuitionism: a commentary on the transcendental aesthetic*. Toronto: University of Toronto Press.

Ferrarin A., 2006. Lived Space, geometric Space in Kant. *Studi Kantiani*, 19, pp. 11-30.

Friedman, M., 1998. *Kant and the Exact Sciences*. Cambridge MA, London: Harvard University Press.

Friedman, M., 2019. *Henry Allison and the B-Deduction*. [online] Available at: <https://virtualcritique.wordpress.com/2019/04/19/henry-allison-and-the-b-deduction/> [Accessed: 15. May 2019].

Crusius C. Entwurf der notwendigen Vernunftwahrheiten, wifern sie den zufälligen entgegen gesetzt werden. 3. Aufl. Leipzig : Johann Friedrich Gleditschens Buchhandlung, 1766.

Dunlop K. Arbitrary Combination and the Use of Signs in Mathematics: Kant's 1763 Prize Essay and its Wolffian Background // Canadian Journal of Philosophy. 2014. Vol. 44, № 5—6. P. 658—685.

Dunlop K. Kant and Mendelssohn on the Use of Signs in Mathematics // Kant's Philosophy of Mathematics. Vol. 1 : The Critical Philosophy and Its Roots / ed. by C. Posy, O. Rechter. Cambridge : Cambridge University Press, 2020. P. 15—34.

Falkenstein L. Kant's Intuitionism: a Commentary on the Transcendental Aesthetic. Toronto : University of Toronto Press, 2004.

Ferrarin A. Lived Space, Geometric Space in Kant // Studi Kantiani. 2006. Vol. 19. P. 11—30.

Friedman M. Kant and the Exact Sciences. Cambridge MA ; L. : Harvard University Press, 1998.

Friedman M. Henry Allison and the B-deduction. URL: https://virtualcritique.wordpress.com/2019/04/19/henry-allison-and-the-b-deduction/ (дата обращения: 15.05.2020).

Friedman M. Space and Geometry in the B Deduction // Kant's Philosophy of Mathematics. Vol. 1 : The Critical Philosophy and Its Roots / ed. by C. Posy, O. Rechter. Cambridge : Cambridge University Press, 2020. P. 200—228.

Hanna R. Mathematics for Humans: Kant's Philosophy of Arithmetic Revisited // European Journal of Philosophy. 2003. Vol. 10, № 3. P. 328—352.

Heis J. Kant (vs. Leibniz, Wolff and Lambert) on real definitions in geometry // Canadian Journal of Philosophy. 2014. Vol. 44, № 5—6. P. 605—630.

Heis J. Kant on Parallel Lines: Definitions, Postulates, and Axioms // Kant's Philosophy of Mathematics. Vol. 1 : The Critical Philosophy and Its Roots / ed. by C. Posy, O. Rechter. Cambridge : Cambridge University Press, 2020. P. 157—180.

Hintikka J. Kant's Theory of Mathematics Revisited // Philosophical Topics. 1981. Vol. 12, № 2. P. 201—215.

Hintikka J. Kant's transcendental Method and his Theory of Mathematics // Topoi. 1984. Vol. 3, № 2. P. 99—108.

Hintikka J. Knowledge and the Known. Historical Perspectives in Epistemology. Dordrecht : Springer, 1991. P. 126—134.

Hintikka J. Kant on the Mathematical Method // Kant's Philosophy of Mathematics / ed. by C. J. Posy. Dordrecht : Springer Netherlands, 1992. P. 21—42.

Friedman, M., 2020. Space and Geometry in the B Deduction. In: C. J. Posy and O. Rechter, ed. 2020. *Kant's Philosophy of Mathematics; Volume I: The Critical Philosophy and Its Roots*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 200-228.

Hanna, R., 2003. Mathematics for Humans: Kant's Philosophy of Arithmetic Revisited. *European Journal of Philosophy*, 10(3), pp. 328-352.

Heis, J., 2014. Kant (vs. Leibniz, Wolff and Lambert) on Real Definitions in Geometry. *Canadian Journal of Philosophy*, 44(5-6), pp. 605-630.

Heis, J., 2020. Kant on Parallel Lines: Definitions, Postulates, and Axioms. In: C. J. Posy and O. Rechter, ed. 2020. *Kant's Philosophy of Mathematics; Volume I: The Critical Philosophy and Its Roots*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 157-180.

Hintikka, J., 1981. Kant's Theory of Mathematics Revisited. *Philosophical Topics*, 12(2), pp. 201-215.

Hintikka, J., 1984. Kant's transcendental Method and his Theory of Mathematics. *Topoi*, 3(2), pp. 99-108.

Hintikka, J., 1991. *Knowledge and the Known. Historical Perspectives in Epistemology*. Dordrecht: Springer, pp. 126-134.

Hintikka J., 1992. Kant on the Mathematical Method. In: C. J. Posy, ed. 1992. *Kant's Philosophy of Mathematics*. Dordrecht: Springer, pp. 21-42.

Hintikka J., 2020. Kant's Theory of Mathematics: What Theory of What Mathematics? In: C. J. Posy and O. Rechter, ed. 2020. *Kant's Philosophy of Mathematics; Volume I: The Critical Philosophy and Its Roots*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 85-102.

Hogan D., 2009. Three Kinds of Rationalism and the Non-Spatiality of Things in Themselves. *Journal of the History of Philosophy*, 47(3), pp. 355-382.

Hogan D., 2013. Metaphysical Motives of Kant's Analytic — Synthetic Distinction. *Journal of the History of Philosophy*, 51(2), pp. 267-307.

Hogan D. Kant and the Character of Mathematical Inference. In: C. J. Posy and O. Rechter, ed. 2020. *Kant's Philosophy of Mathematics; Volume I: The Critical Philosophy and Its Roots*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 126-154.

Kant, I., 1992a. Attempt to Introduce the Concept of Negative Magnitudes into Philosophy. In: I. Kant, 1992. *Theoretical Philosophy, 1755-1770*. Translated and edited by D. Walford in collaboration with R. Meerbote. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 203-242.

Kant, I., 1992b. Inquiry Concerning the Distinctness of the Principles of Natural Theology and Morality. In: I. Kant, 1992. *Theoretical philosophy, 1755-1770*. Translated and edited by D. Walford and R. Meerbote. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 243-286.

Hintikka J. Kant's Theory of Mathematics: What Theory of What Mathematics? // Kant's Philosophy of Mathematics. Vol. 1 : The Critical Philosophy and Its Roots / ed. by C. Posy, O. Rechter. Cambridge : Cambridge University Press, 2020. P. 85—102.

Hogan D. Three Kinds of Rationalism and the Non-Spatiality of Things in Themselves // Journal of the History of Philosophy. 2009. Vol. 47, № 3. P. 355—382.

Hogan D. Metaphysical Motives of Kant's Analytic — Synthetic Distinction // Journal of the History of Philosophy. 2013. Vol. 51, № 2. P. 267—307.

Hogan D. Kant and the Character of Mathematical Inference // Kant's Philosophy of Mathematics. Vol. 1 : The Critical Philosophy and Its Roots / ed. by C. Posy, O. Rechter. Cambridge : Cambridge University Press, 2020. P. 126—154.

Kant: Philosophy of Mathematics / ed. by C. Tolley // PhilPapers, Bibliography. URL : https://philpapers.org/browse/kant-philosophy-of-mathematics (дата обращения: 03.01.2021).

Lu-Adler H. Kant and the Science of Logic. A Historical and Philosophical Reconstruction. N. Y. : Oxford University Press, 2018.

Mancosu P. Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century. N. Y. ; Oxford : Oxford University Press, 1996.

Martin G. Die mathematischen Vorlesungen Kants // Kant-Studien. 1967. Vol. 58. S. 58—62.

Martin G. Arithmetik und Kombinatorik bei Kant. Berlin : De Gruyter, 1972.

Meier G. F. Vernunftlehre. Halle : Johann Justinus Gebauer, 1752.

Melnick A. The Geometry of a form of Intuition // Kant's Philosophy of Mathematics / ed. by C. J. Posy. Dodrecht : Springer, 1992. P. 245—255.

Mendelssohn M. Abhandlung über die Evidenz in metaphysischen Wissenschaften. Neue Aufl. Berlin : Haube und Spener, 1786.

Parsons C. Kant's Philosophy of Arithmethic // Kant's Philosophy of Mathematics / ed. by C. J. Posy. Dordrecht : Springer, 1992a. P. 43—79.

Parsons C. Arithmetic and the Categories // Kant's Philosophy of Mathematics / ed. C. J. Posy. Dordrecht : Springer, 1992б. P. 135—158.

Peijnenburg J. Formal Proof or Linguistic Process? Beth and Hintikka on Kant's Use of 'Analytic' // Kant-Studien. 1994. Bd. 85, № 2. P. 160—178.

Kant, I., 1992c. On the Form and Principles of the Sensible and the Intelligible World. In: I. Kant, 1992. *Theoretical Philosophy 1755-1770*. Translated and edited by D. Walford. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 373-416.

Kant I., 1998. *Critique of Pure Reason*. Translated by P. Guyer, A. Wood. New York: Cambridge University Press.

Kant, I., 1999. *Correspondence*. Translated and edited by A. Zweig. Cambridge: Cambridge University Press.

Kant, I., 2004a. *Metaphysical Foundations of Natural Science*. Translated by M. Friedman. New York: Cambridge University Press.

Kant, I., 2004b. *Prolegomena to Any Future Metaphysics that will be Able to Come Forward as Science*. Translated by G. Hatfield. Cambridge: Cambridge University Press.

Kant, I., 2002. On a Discovery Whereby Any New Critique of Pure Reason Is to Be Made Superfluous by an Older One. Translated by H. Allison. In: I. Kant, 2002. *Theoretical Philosophy after 1781*. Edited by H. Allison and P. Heath. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 281-336.

Kant, I., 1992. The Jäsche Logic. in: *Lectures on logic*. Translated by J. M. Young. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 521-640.

Lu-Adler, H., 2018. *Kant and the Science of Logic. A Historical and Philosophical Reconstruction*. New York: Oxford University Press.

Mancosu, P., 1996. *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. New York: Oxford University Press.

Martin, G., 1967. Die mathematischen Vorlesungen Kants. *Kant-Studien*, 58, pp. 58-62.

Martin, G., 1972. *Arithmetik und Kombinatorik bei Kant*. Berlin: De Gruyter.

Meier, G. F., 1752. *Vernunftlehre*. Halle: Johann Justinus Gebauer.

Melnick, A., 1992. The Geometry of a form of Intuition. Kant's Philosophy of Mathematics. In: C. J. Posy, ed. 1992. *Kant's Philosophy of Mathematics*. Dordrecht: Springer, pp. 245-255.

Mendelssohn, M., 1786. *Abhandlung über die Evidenz in metaphysischen Wissenschaften. Neue Auflage*. Berlin: Haube & Spener.

Parsons, C., 1786. Kant's Philosophy of Arithmetic. In: C. J. Posy, ed. 1992. *Kant's Philosophy of Mathematics*. Dordrecht: Springer, pp. 43-79.

Parsons, C., 1992b. Arithmetic and the Categories. In: C. J. Posy, ed. 1992. *Kant's Philosophy of Mathematics*. Dordrecht: Springer, pp. 135-158.

Posy C. Dancing to the Antinomy: A Proposal for Transcendental Idealism // American Philosophical Quarterly. 1983. Vol. 20, № 1. P. 81—94.

Posy C. J. Mathematics as a Transcendental Science // Phenomenology and the Formal Sciences / ed. by T. M. Seebohm, D. Føllesdal, J. Mohanty. Dordrecht ; Boston ; Kluwer, 1991. P. 107—131.

Posy C. J. The Infinite, the Indefinite and the Critical Turn: Kant via Kripke Models // Inquiry. 2019. doi: 10.1080/0020174X.2019.1651095.

Posy C. Of Griffins and Horses: Mathematics, Metaphysics, and Kant's Critical Turn // Kant's Philosophy of Mathematics. Vol. 1 : The Critical Philosophy and Its Roots / ed. by C. Posy, O. Rechter. Cambridge : Cambridge University Press, 2020. P. 35—65.

Posy C., Rechter O. Introduction // Kant's Philosophy of Mathematics. Vol. 1 : The Critical Philosophy and Its Roots / ed. by C. Posy, O. Rechter. Cambridge : Cambridge University Press, 2020. P. 1—12.

Risjord M. The Sensible Foundation for Mathematics: a Defense of Kant's View // Studies in History and Philosophy of Science. Part A. 1990. Vol. 21, № 1. P. 123—143.

Rusnock P. Was Kant's Philosophy of Mathematics Right for Its Time? // Kant-Studien. 2004. Vol. 95, № 4. P. 426—442.

Rusnock P., George R. A Last Shot at Kant and Incongruent Counterparts // Kant-Studien. 1995. Vol. 86, № 3. P. 257—277.

Russell B. Principles of Mathematics. L. ; N. Y. : Routledge, 2010.

Schirn M. Kants Theorie der geometrischen Erkenntnis und die nichteuklidische Geometrie // Kant-Studien. 1991. Bd. 82, № 1. S. 1—28.

Schultz J. Erläuterungen über des Herrn Professor Kant Critik der reinen Vernunft. Neue verbesserte Aufl. Frankfurt ; Leipzig : [s. n.], 1791.

Shabel L. Kant on the 'Symbolic Construction' of Mathematical Concepts // Studies in History of Philosophy of Science. Part A. 1998. Vol. 29, № 4. P. 589—621.

Shabel L. Mathematics in Kant's Critical Philosophy: Reflections on Mathematical Practice. N. Y. ; L. : Routledge, 2003.

Sutherland D. The Point of Kant's Axioms of Intuition // Pacific Philosophical Quarterly. 2005. Vol. 86, № 1. P. 135—159.

Sutherland D. Kant's Conception of Number // Philosophical Review. 2017. Vol. 126, № 2. P. 147—190.

Peijnenburg, J., 1994. Formal Proof or Linguistic Process? Beth and Hintikka on Kant's Use of 'Analytic'. *Kant-Studien*, 85(2), pp. 160-178.

Posy, C. J., 1983. Dancing to the Antinomy: A Proposal for Transcendental Idealism. *American Philosophical Quarterly*, 20(1), pp. 81-94.

Posy, C. J. Mathematics as a Transcendental Science. In: T. M. Seebohm, D. Føllesdal and J. Mohanty, ed. 1991. *Phenomenology and the Formal Sciences*. Dordrecht, Boston: Kluwer, pp. 107-132.

Posy, C. J., 2019. The infinite, the indefinite and the critical turn: Kant via Kripke models. *Inquiry*. [online] doi: 10.1080/0020174X.2019.1651095. Available at: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0020174X.2019.1651095 [Accessed 03 January 2021].

Posy, C. J., 2020. Of Griffins and Horses: Mathematics, Metaphysics, and Kant's Critical Turn. In: C. J. Posy and O. Rechter, ed. 2020. *Kant's Philosophy of Mathematics; Volume I: The Critical Philosophy and Its Roots*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 35-65.

Posy, C. J. and Rechter O., 2020. Introduction. In: C. J. Posy and O. Rechter, ed. 2020. *Kant's Philosophy of Mathematics; Volume I: The Critical Philosophy and Its Roots*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 1-12.

Risjord, M., 1990. The Sensible Foundation for Mathematics: a Defense of Kant's view. *Studies in History and Philosophy of Science. Part A*, 21(1), pp. 123-143.

Rusnock, P., 2004. Was Kant's philosophy of mathematics right for its time? *Kant-Studien*, 95, pp. 426-442.

Rusnock, P. and George, R., 1995. A Last Shot at Kant and Incongruent Counterparts. *Kant-Studien*, 86(3), pp. 257 277.

Russell, B., 2010. *Principles of Mathematics*. London, New York: Routledge.

Schirn, V. M., 1991. Kants Theorie der geometrischen Erkenntnis und die nichteuklidische Geometrie. *Kant-Studien*, 82(1), pp. 1-28.

Schultz, J. *Erläuterungen über des Herrn Professor Kant Critik der reinen Vernunft. Neue verbesserte Auflage*. Frankfurt & Leipzig: [s. n.], 1791.

Shabel, L., 1998. Kant on the 'Symbolic Construction' of Mathematical Concepts. *Studies in History of Philosophy of Science. Part A*, 29(4), pp. 589-621.

Shabel, L., 2003. *Mathematics in Kant's Critical Philosophy: Reflections on Mathematical Practice*. New York, London: Routledge.

Sutherland, D., 2005. The Point of Kant's Axioms of Intuition. *Pacific Philosophical Quarterly*, 86(1), pp. 135-159.

Sutherland, D. 2017. Kant's Conception of Number. *Philosophical Review*, 126(2), pp. 147-190.

Sutherland D. Kant's Philosophy of Arithmetic: An Outline of a New Approach // Kant's Philosophy of Mathematics. Vol. 1 : The Critical Philosophy and Its Roots / ed. by C. Posy, O. Rechter. Cambridge : Cambridge University Press, 2020. P. 248—266.

Tait W. W. Kant on 'Number' // Kant's Philosophy of Mathematics. Vol. 1 : The Critical Philosophy and Its Roots / ed. by C. Posy, O. Rechter. Cambridge : Cambridge University Press, 2020. P. 267—291.

Thompson M. Singular Terms and Intuitions in Kant's Epistemology // The Review of Metaphysics. 1972. Vol. 26, № 2. P. 314—343.

Vaihinger H. Kommentar zu Kants Kritik der reinen Vernunft. Stuttgart ; Berlin ; Leipzig : Union deutsche Verlagsgesellschaft, 1921. Bd. 2.

Warren D. Kant on Mathematics and the Metaphysics of Corporeal Nature: The Role of the Infinitesimal // Kant's Philosophy of Mathematics. Vol. 1 : The Critical Philosophy and Its Roots / ed. by C. Posy, O. Rechter. Cambridge : Cambridge University Press, 2020. P. 66—82.

Wilson K. D. Kant on Intuition // The Philosophical Quarterly. 1975. Vol. 25 (100). P. 247—265.

Wolff-Metternich B.-S. von. Die Überwindung des mathematischen Erkenntnisideals: Kants Grenzbestimmung von Mathematik und Philosophie. Berlin : De Gruyter, 1995.

Wolff Ch. Der Anfangs-Gründe Aller Mathematischen Wissenschaften. Halle : Renger, 1710. Th. 1.

Wolff Ch. Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften, zu bequemerem Gebrauche der Anfänger, auf Begehren verfertiget. 5. Aufl. Frankfurt ; Leipzig : Rengersche Buchhandlung, 1734.

Wolff Ch. Philosophia rationalis sive logica, methodo scientifica pertractata // Wolff Ch. Philosophia rationalis sive logica, methodo scientifica pertractata et ad usum scientiarum atque vitae aptata praemittitur discursus praeliminaris de philosophia in genere. Francofurti ; Lipsiae : Officina Libraria Rengeriana, 1740.

Wolff Ch. Vernünftige Gedanken von den Kräften des menschlichen Verstandes und ihrem richtigen Gebrauche in Erkäntniß der Wahrheit. 12. Aufl. Halle : Renger, 1742.

Wolff Ch. Vernünftige Gedanken von Gott, der Welt und der Seele des Menschen, auch allen Dingen überhaupt. Halle : Renger, 1752.

Wolff R. P. Kant's Theory of Mental Activity: a Commentary on the Transcendental Analytic of the Critique of Pure Reason. Cambridge MA : Harvard University Press, 1963.

Sutherland, D., 2020. Kant's Philosophy of Arithmetic: An Outline of a New Approach. In: C. J. Posy and O. Rechter, ed. 2020. *Kant's Philosophy of Mathematics; Volume I: The Critical Philosophy and Its Roots*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 248-266.

Tait, W. W., 2020. Kant on 'Number'. In: C. J. Posy and O. Rechter, ed. 2020. *Kant's Philosophy of Mathematics; Volume I: The Critical Philosophy and Its Roots*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 267-291.

Thompson, M., 1972. Singular Terms and Intuitions in Kant's Epistemology. *The Review of Metaphysics*, 26(2), pp. 314-343.

Tolley, C., ed. 2021. Kant: Philosophy of Mathematics. *PhilPapers, Bibliography*. [online] Available at: <https://philpapers.org/browse/kant-philosophy-of-mathematics> [Accessed 03 January 2021].

Vaihinger, H., 1921. *Kommentar zu Kants Kritik der reinen Vernunft; Band II. Stuttgart*, Berlin & Leipzig: Union deutsche Verlagsgesellschaft.

Warren, D., 2020. Kant on Mathematics and the Metaphysics of Corporeal Nature: The Role of the Infinitesimal. In: C. J. Posy, O. Rechter, ed. 2020. *Kant's Philosophy of Mathematics; Volume I: The Critical Philosophy and Its Roots*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 66-82.

Wilson, K. D., 1975. Kant on Intuition. *The Philosophical Quarterly*, 25(100), pp. 247-265.

Wolff-Metternich, B.-S. v., 1995. *Die Überwindung des mathematischen Erkenntnisideals: Kants Grenzbestimmung von Mathematik und Philosophie*. Berlin: Walter de Gruyter.

Wolff, C., 1710. *Der Anfangs-Gründe Aller Mathematischen Wissenschaften; Erster Theil*. Halle: Renger.

Wolff, C., 1734. *Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften, Zu bequemerem Gebrauche der Anfänger, Auf Begehren verfertiget. 5. Auflage.* Frankfurt und Leipzig: Rengersche Buchhandlung.

Wolff, C., 1740. Philosophia rationalis sive logica, methodo scientifica pertractata. In: *Philosophia rationalis sive logica, methodo scientifica pertractata et ad usum scientiarum atque vitae aptata praemittitur discursus praeliminaris de philosophia in genere*. Francofurti & Lipsiae: Officina Libraria Rengeriana.

Wolff, C., 1742. *Vernünftige Gedanken von den Kräften des menschlichen Verstandes und ihrem richtigen Gebrauche in Erkäntniß der Wahrheit. 12. Auflage.* Halle: Renger.

Wolff, C., 1752. *Vernünftige Gedanken von Gott, der Welt und der Seele des Menschen, auch allen Dingen überhaupt*. Halle: Rengerischen Buchhandlung,

Wolff, R. P., 1963. *Kant's Theory of Mental Activity: a Commentary on the Transcendental Analytic of the* Critique of Pure Reason. Cambridge (MA): Harvard University Press.

Translated from the Russian by Evgeni N. Filippov

Об авторе

Максим Дмитриевич ***Евстигнеев***, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия.

E-mail: racdonny@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1391-4517

Для цитирования:

Евстигнеев М. Д. Что такое кантовская философия математики? Обзор современных исследований // Кантовский сборник. 2021. Т. 40, № 2. С. 151-178.

doi: 10.5922/0207-6918-2021-2-6

The author

Maksim D. ***Evstigneev***, Laboratory of Transcendental Philosophy, HSE University, Moscow, Russia.

E-mail: racdonny@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1391-4517

To cite this article:

Evstigneev, M. D., 2021. What is Kantian Philosophy of Mathematics? An Overview of Contemporary Studies. *Kantian Journal*, 40(2), pp. 151-178.

http://dx.doi.org/10.5922/0207-6918-2021-2-6