УДК 514.75

С.Ю. Волкова

(*Балтийский военно-морской институт*)

ДВОЙСТВЕННЫЙ ОБРАЗ ГИПЕРПОЛОСЫ $SH_r(L)$

Продолжается изучение специальных классов скомпонованных S-распределений проективного пространства P_n. Исследуются регулярные гиперполосы H_r, характеристики которых скомпонованы: $\Phi_{n-r-1}(A_o)=[L(A_o),\chi(A_o)]$. Доказана теорема существования гиперполос $SH_r(L)$. Показано, что во второй дифференциальной окрестности гиперполоса $SH_r(L)$ индуцирует проективное пространство $\overline{P}_n(V_r)$, двойственное исходному $P_n(V_r)$ относительно инволютивного преобразования J, порождаемого гиперполосой $SH_r(L)$. Введен в рассмотрение двойственный образ оснащенной гиперполосы $SH_r(L)$ относительно преобразования J.

Схема использования индексов в данной работе такова:

$$J,K,L=\overline{1,n};\ \ \overline{J},\overline{K},\overline{L}=\overline{0,n};\quad i,j,k=\overline{r+1,m};\ p,q,s,t=\overline{1,r};\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1};$$
$$u,v=\overline{r+1,n-1};\quad \hat{u},\hat{v}=\overline{r+1,n}.$$

1. Система уравнений

$$\omega_0^i=0,\quad \omega_0^\alpha=0,\quad \omega_0^n=0, \tag{1}$$

ассоциированная с уравнениями [1, §1], задающими S-распределение [1], вполне интегрируема тогда и только тогда, когда

$$\Lambda_{[pq]}^n=0,\quad \Lambda_{[pq]}^\alpha=0,\quad \Lambda_{[pq]}^i=0, \tag{2}$$

т.е. когда тензор неголономности $r_{pq}^{\hat{u}}$ [1] базисного Λ-распределения равен нулю. В этом случае базисное Λ-распределение определяет (n-r)-параметрическое семейство r-мерных поверхностей V_r. Другими словами, плоскости Λ огибаются r-мерными поверхностями V_r (n-r)-параметрического семейства. При смещении центра A_o S-распределения вдоль фиксированной поверхности V_r уравнения (1) [1, §1], в репере R_1 первого порядка имеют вид:

$$\omega_0^n=0,\quad \omega_0^v=0,\quad \omega_v^n=0, \tag{3}$$

$$\omega_p^n=\Lambda_{pq}^n\omega^q,\quad \omega_p^\upsilon=\Lambda_{pq}^\upsilon\omega^q, \tag{4}$$

$$\omega_i^p=H_{iq}^p\omega^q,\quad \omega_\alpha^p=H_{\alpha q}^p\omega^q, \tag{5}$$

$$\omega_\alpha^i=H_{\alpha q}^i\omega^q,\quad \omega_i^\alpha=L_{iq}^\alpha\omega^q, \tag{6}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\Lambda^n_{pq}+\Lambda^n_{pq}\omega^0_0=\Lambda^n_{pqt}\omega^t,\quad \nabla\Lambda^v_{pq}+\Lambda^v_{pq}\omega^0_0+\Lambda^n_{pq}\omega^v_n=\Lambda^v_{pqt}\omega^t,\\&\nabla H^p_{iq}+H^p_{iq}\omega^0_0-\omega^0_i\delta^p_q=H^p_{iqt}\omega^t,\quad \nabla H^p_{\alpha q}+H^p_{\alpha q}\omega^0_0-\omega^0_\alpha\delta^p_q=H^p_{\alpha qt}\omega^t,\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

$$\nabla H^i_{\alpha q}+H^i_{\alpha q}\omega^0_0=H^i_{\alpha qt}\omega^t,\quad \nabla L^\alpha_{iq}+L^\alpha_{iq}\omega^0_0=L^\alpha_{iqt}\omega^t,\tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}&\nabla H^p_{vq}+H^p_{vq}\omega^0_0-\omega^0_v\delta^p_q=H^p_{vqt}\omega^t,\quad H^p_{vq}\overset{def}{=}\{H^p_{iq},H^p_{\alpha q}\},\\&\Lambda^n_{p[q}H^p_{|\alpha|t]}=0,\quad \Lambda^n_{p[qt]}=0,\quad \Lambda^v_{p[qt]}=0,\quad H^p_{v[qt]}=0.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

Уравнения (3) – (5), (7), (9) задают регулярную гиперполосу H_r, а разбиение форм ω^p_v на ω^p_i и ω^p_α (5) и уравнения (6), (8) характеризуют оснащенность гиперполосы полем L-плоскостей таким образом, что в каждой точке $A_o \in V_r$ выполняются условия:

$$\Lambda(A_0)\cap L(A_0)=A_0,\quad [\Lambda(A_0),L(A_0)]=M(A_0). \tag{10}$$

Такие гиперполосы $H_r(L)$ [5] специального класса со скомпонованными характеристиками $\Phi(A_o)=[L(A_o),\chi(A_o)]$ обозначим символами $SH_r(L)$.

Теорема 1. *Гиперполосы* $SH_r(L)$ *существуют с произволом (n-r)+l(n-l-1)+ +m(n-m-1) функций r аргументов.*

Действительно, чистое замыкание системы уравнений (3) – (6):

$$\begin{aligned}&\Delta\Lambda^n_{pq}\wedge\omega^q=0;\quad \Delta\Lambda^v_{pq}\wedge\omega^q=0;\quad \Delta H^p_{iq}\wedge\omega^q=0;\\&\Delta H^p_{\alpha q}\wedge\omega^q=0;\quad \Delta H^i_{\alpha q}\wedge\omega^q=0;\quad \Delta L^\alpha_{iq}\wedge\omega^q=0\end{aligned}\tag{11}$$

имеет следующие характеры: $s_1=r\cdot(n-r)+A$; $s_2=(r-1)\cdot(n-r)+A,\dots$; $s_r=l\cdot(n-r)+A$, где $A=2(n-m-l)l+(n-r-1)\cdot r$. Тогда число Картана $Q = s_1 +2\cdot s_2 + 3\cdot s_3 +\dots+ r\cdot s_r = \frac{r(r+1)}{2}A+$ $+(n-r)\cdot\frac{r(r+1)(r+2)}{6}$. Число новых функций, полученных из системы (11) после применения леммы Картана, N = Q. Следовательно, система уравнений (3) – (6) находится в инволюции и гиперполоса $SH_r(L)$ существует с произволом (n-r)+*l*(n-*l*-1)+m(n-m-1) функций r аргументов, что и требовалось доказать.

2. Введем для гиперполосы $SH_r(L)$ в дифференциальной окрестности 2-го порядка аналогично работе [2] симметричные невырожденные тензоры:

$$V^n_{ij}\overset{def}{=}d^{nk}_i b_{kj},\quad V^n_{\alpha\beta}\overset{def}{=}d^{n\gamma}_\alpha b_{\gamma\beta}\tag{12}$$

и обратные им тензоры 2-го порядка V^{ij}_n, $V^{\alpha\beta}_n$:

$$V^{jk}_n V^n_{ki}=\delta^j_i,\quad V^{\beta\gamma}_n V^n_{\gamma\alpha}=\delta^\beta_\alpha,\tag{13}$$

$$\nabla V^n_{ij}+V^n_{ij}\omega^0_0=V^n_{ijp}\omega^p,\quad \nabla V^n_{\alpha\beta}+V^n_{\alpha\beta}\omega^0_0=V^n_{\alpha\beta p}\omega^p.$$

Определители $\Lambda=\left|\Lambda_{pq}^{n}\right|$, $V=\left|V_{ij}^{n}\right|$, $\widetilde{V}=\left|V_{\alpha\beta}^{n}\right|$ главного фундаментального тензора Λ_{pq}^{n} гиперполосы $SH_r(L)$ и тензоров (12) являются относительными инвариантами:

$$\begin{aligned}&d\ln\Lambda=2\omega_0^0-r(\omega_0^0+\omega_n^n)+\Lambda_p\omega^p,\ d\ln V=2\omega_i^i-l(\omega_0^0+\omega_n^n)+V_p\omega^p,\\&d\ln\widetilde{V}=2\omega_\alpha^\alpha-(n-m-1)(\omega_0^0+\omega_n^n)+\widetilde{V}_p\omega^p,\end{aligned}\tag{14}$$

где

$$\Lambda_p=\Lambda_n^{qs}\Lambda_{sqp}^n,\quad V_p=V_n^{ij}V_{jip}^n,\quad \widetilde{V}_p=V_n^{\alpha\beta}V_{\beta\alpha p}^n.$$

В силу соотношений (13) относительный инвариант $\Phi=\dfrac{1}{n+1}\cdot\Lambda\cdot V\cdot\widetilde{V}$ удовлетворяет уравнению

$$d\ln\Phi+(\omega_0^0+\omega_n^n)=\Phi_p\omega^p,\tag{15}$$

где

$$\Phi_p=\Lambda_p+V_p+\widetilde{V}_p,\ \nabla\Phi_p+\Phi_p\omega_0^0+\omega_p^0-\Lambda_{pq}^n\omega_n^q=\Phi_{pq}\omega^q.\tag{16}$$

Введем в рассмотрение систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\overline{\omega}_J^K$ вида:

$$\begin{aligned}&\overline{\omega}_0^n=\omega_0^n=0,\quad \overline{\omega}_0^\nu=\omega_0^\nu=0,\quad \overline{\omega}_\nu^n=\omega_\nu^n=0,\quad \overline{\omega}_0^p=\omega_0^p,\quad \overline{\omega}_n^0=\omega_n^0,\\&\overline{\omega}_n^p=-\Lambda_n^{pq}\omega_q^0,\quad \overline{\omega}_n^j=-V_n^{ji}\omega_i^0,\quad \overline{\omega}_n^\beta=-V_n^{\beta\alpha}\omega_\alpha^0,\quad \overline{\omega}_p^n=-\Lambda_{qp}^n\omega^q,\\&\overline{\omega}_p^0=\Lambda_{pq}^n\omega_n^q,\quad \overline{\omega}_0^0=\omega_0^0-\Phi_p\omega^p,\quad \overline{\omega}_i^0=V_{ij}^n\omega_n^j,\quad \overline{\omega}_n^n=\omega_n^n-\Phi_p\omega^p,\\&\overline{\omega}_p^i=-\Lambda_{pq}^nV_n^{ij}\omega_j^q,\quad \overline{\omega}_p^\alpha=-\Lambda_{pq}^nV_n^{\alpha\beta}\omega_\beta^q,\quad \overline{\omega}_i^p=-\Lambda_{ij}^n\Lambda_n^{pq}\omega_q^j,\\&\overline{\omega}_p^q=\omega_p^q+\Lambda_n^{qs}\Lambda_{spt}^n\omega^t-\delta_p^q\Phi_t\omega^t,\\&\overline{\omega}_i^j=\omega_i^j+V_n^{jk}V_{kip}^n\omega^p-\delta_i^j\Phi_p\omega^p,\quad \overline{\omega}_i^0=\Lambda_{ij}^n\omega_n^j,\\&\overline{\omega}_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\beta+V_n^{\beta\gamma}V_{\gamma\alpha p}^n\omega^p-\delta_\alpha^\beta\Phi_p\omega^p,\quad \overline{\omega}_i^\alpha=-V_{ji}^nV_n^{\alpha\beta}\omega_\beta^j,\\&\overline{\omega}_\alpha^0=V_{\beta\alpha}^n\omega_n^\beta,\quad \overline{\omega}_\alpha^i=-V_n^{ij}V_{\beta\alpha}^n\omega_j^\beta,\quad \overline{\omega}_\alpha^p=-\Lambda_n^{pq}V_{\beta\alpha}^n\omega_q^\beta.\end{aligned}\tag{17}$$

Согласно (12) – (16) система форм $\overline{\omega}_J^K$ (17) удовлетворяет структурным уравнениям проективного пространства $\overline{P}_n$

$$D\overline{\omega}_{\overline{J}}^{\overline{K}}=\omega_{\overline{J}}^{\overline{L}}\wedge\omega_{\overline{L}}^{\overline{K}},\quad \sum_{\overline{L}}\omega_{\overline{L}}^{\overline{L}}=0.$$

Следуя работам [2; 3], аналогично доказываем, что преобразование J структурных форм по закону (17) является инволютивным, т.е. $J=J^{-1}$. Формы ω_J^K являются формами инфинитезимального перемещения точечного репера 1-го порядка $\{A_J\}$, а формы $\overline{\omega}_J^K$ – формами инфинитезимального перемещения тангенциального репера $\{\tau_J\}$, где

$$\begin{aligned}&\tau_0=\rho[A_0,A_1,\ldots,A_{n-1}],\ \tau_n=\rho\left[A_n,A_1,\ldots,A_{n-1}\right],\ \rho=\frac{1}{\sqrt[n+1]{\Phi}};\\&\tau_p=\rho\sum_q\Lambda_{qp}^n\left[A_0,A_1,\ldots,A_{q-1},A_n,A_{q+1},\ldots,A_r,A_{r+1},\ldots,A_{n-1}\right];\end{aligned}\tag{18}$$

$$\tau_i = \rho \sum_j V_{ji}^n \left[A_0, A_1, \dots, A_r, A_{r+1}, \dots, A_{j-1}, A_n, A_{j+1}, \dots, A_m, A_{m+1}, \dots, A_{n-1}\right];$$

$$\tau_\alpha = \rho \sum_\beta V_{\beta\alpha}^n \left[A_0, A_1, \dots, A_m, A_{m+1}, \dots, A_{\beta-1}, A_n, A_{\beta+1}, \dots, A_{n-1}\right].$$

Теорема 2. *Регулярная гиперполоса $SH_r(L)$ во второй дифференциальной окрестности ее образующего элемента индуцирует:*

1) проективное пространство $\overline{P}_n(V_r)$, двойственное исходному $P_n(V_r)$, относительно инволютивного преобразования J форм ω_J^K по закону (17);

2) двойственную исходной гиперполосе $SH_r(L)$ гиперполосу $\overline{SH_r(L)}$, которая задается относительно тангенциального репера (18) уравнениями (без соответствующих замыканий):

$$\overline{\omega}_0^n = 0, \quad \overline{\omega}_0^v = 0, \quad \overline{\omega}_v^n = 0, \quad \overline{\omega}_p^n = \overline{\Lambda}_{pq}^n \overline{\omega}^q, \quad \overline{\omega}_p^v = \overline{\Lambda}_{pq}^v \overline{\omega}^q,$$
$$\overline{\omega}_v^p = \overline{H}_{vq}^p \overline{\omega}^q, \quad \overline{\omega}_\alpha^i = \overline{H}_{\alpha q}^i \overline{\omega}^q, \quad \overline{\omega}_i^\alpha = \overline{L}_{iq}^\alpha \overline{\omega}^q. \tag{19}$$

Двойственный образ $\overline{SH_r(L)}$ гиперполосы $SH_r(L)$ есть гиперполоса $SH_r(\chi)$, оснащенная полем плоскостей $\Psi_{n-l-1}(A)$ так, что в каждой точке $A_0 \in V_r$ имеем $\Psi_{n-l-1}(A_0) \cap \Phi_{n-r-1}(A_0) = \chi_{n-m-1}(A_0)$.

Двойственная теория имеет место и на оснащенной гиперполосе $SH_r(L)$. Пусть гиперполоса $SH_r(L) \subset P_n(V_r)$ нормализована полями квазитензоров ν_n^p, ν_p^0 в смысле Нордена-Чакмазяна:

$$\nabla \nu_n^p + \omega_n^p = \nu_{nq}^p \omega^q, \quad \nabla \nu_p^0 + \omega_p^0 = \nu_{pq}^0 \omega^q. \tag{20}$$

В силу соотношений (17) убеждаемся, что функции

$$\overline{\nu}_n^p = -\Lambda_n^{pq} \nu_q^0, \quad \overline{\nu}_p^0 = \Lambda_{pq}^n \nu_n^q \tag{21}$$

удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \overline{\nu}_n^p + \overline{\omega}_n^p = \overline{\nu}_{nq}^p \overline{\omega}^q, \quad \nabla \overline{\nu}_p^0 + \overline{\omega}_p^0 = \overline{\nu}_{pq}^0 \omega^q. \tag{22}$$

Из уравнений (20), (22) вытекает

Теорема 3. *Нормализация одной из гиперполос $SH_r(L) \subset P_n(V_r)$ и $SH_r(\chi) \subset \overline{P}_n(V_r)$ равносильна нормализации другой, при этом компоненты полей оснащающих объектов $\{\nu_n^p, \nu_p^0\}$ и $\{\overline{\nu}_n^p, \overline{\nu}_p^0\}$ связаны соотношениями (21).*

Список литературы

1. *Волкова С.Ю.* Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов S-распределения // ВИНИТИ РАН, 2001. №343-В2001.

2. *Попов Ю.И., Столяров А.В.* Специальные классы регулярных гиперполос. Калининград, 1992.

3. *Максакова Т.Ю.* Двойственный образ центрированной тангенциально вырожденной гиперполосы CH_m^r // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1999. №30. С. 50 – 54.

4. *Волкова С.Ю.* Двойственные аффинные и проективные связности S-распределения // ВИНИТИ РАН, 2001. №1871-В2001.

5. *Волкова С.Ю.* Нормализации Нордена-Чакмазяна, ассоциированные с регулярной гиперполосой $H_r(L)$ проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1996. №27. С. 24 – 33.

S.Volkova

DUAL IMAGE OF THE HYPERSTRIP $SH_r(L)$

Regular hyperstrips with composed characteristics are investigated. For such hyperstrips existence theorem is proved. It is shown, that in the second differential neighbourhood the projective space is induced, which is dual to initial one concerning involutory transformation, generated by the hyperstrip. Dual image for the equipped hyperstrip concerning this transformation is introduced.

УДК 514.7

А.И. Долгарев

(Пензенский государственный университет)

КРИВЫЕ 3-МЕРНЫХ ВЕЙЛЕВСКИХ ОДУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВ И КРИВЫЕ ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Реализована идея определения кривых 3-мерных разрешимых вейлевских одулярных пространств (ВО-пространств) на основе кривых евклидовой плоскости. По плоским евклидовым кривым постоянной кривизны найдены кривые постоянных кривизн одулярных пространств.

§ 1. Вейлевские одулярные пространства

1.1. Одули на многообразии R^3**.** Структура одуля $\Omega = (\Omega,+,\omega_{\mathrm{K}}(+))$ определена в [1] на структуре $(\Omega,+)$ посредством введения внешней операции $\omega_K(+)$ умножения элементов из $(\Omega,+)$ на скаляры из кольца K. Для всех $\omega \in \Omega$ и $t, s \in \mathrm{K}$ выполняются аксиомы одуля:

$$s(t\omega) = (st)\omega,\ (t+s)\omega = t\omega + s\omega .$$

Рассматриваем многообразие R^3 со структурой группы Ли, на котором задана групповая операция +, и определяем внешнюю операцию $\omega_R(+)$. Имеем одули $\Omega = (\Omega,+,\omega_R(+))$ на группах Ли $(\mathrm{R}^3,+)$. Внешние операции на всех 3-мерных некоммутативных разрешимых группах Ли определены автором. Имеются следующие разрешимые одули: *линейное пространство* L^3, *растран* P^3, *сибсон* Σ^3, *диссон* Δ^3, *осцилляторный одуль* Ω^3. Многообразие Sol, рассматриваемое в [2],