УДК 514.76

А. В. Букушева[1]

[1] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*

bukusheva@list.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2930-1697

doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-7

О геометрии многообразий Кенмоцу с N-связностью

Рассматривается многообразие Кенмоцу с заданной на нем N-связностью. Из интегрируемости распределения многообразия Кенмоцу следует, что N-связность относится к классу четверть-симметрических связностей. Среди N-связностей выделяется класс связностей, адаптированных к структуре многообразия Кенмоцу. В частности, доказывается, что N-связность сохраняет структурный эндоморфизм φ многообразия Кенмоцу тогда и только тогда, когда эндоморфизмы N и φ коммутируют. Выводится формула, выражающая N-связность через связность Леви-Чивиты. Находятся коэффициенты связности Леви-Чивиты и N-связности многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах. Исследуются свойства инвариантов внутренней геометрии многообразия Кенмоцу. К инвариантам внутренней геометрии относятся: тензор кривизны Схоутена; 1-форма η, порождающая распределение *D*; производная Ли $L_{\vec{\xi}}g = 0$ метрического тензора g вдоль векторного поля $\vec{\xi}$; тензорное поле *P*, компоненты которого в адаптированных координатах выражаются с помощью равенств $P_{ad}^{c} = \partial_n \Gamma_{ad}^{c}$. Поле *P* названо в работе тензор Схоутена — Вагнера. Доказывается, что тензор Схоутена — Вагнера внут-

Поступила в редакцию 13.03.2019 г.

ренней связности многообразия Кенмоцу равен нулю. Находятся условия, которым удовлетворяет эндоморфизм N, определяющий метрическую N-связность. В завершение работы приводится пример многообразия Кенмоцу с метрической N-связностью, сохраняющей структурный эндоморфизм φ.

Ключевые слова: многообразие Кенмоцу, внутренняя связность почти контактного метрического многообразия, N-связность многообразия Кенмоцу.

1. Введение. В последние годы становится заметной тенденция исследовать геометрию почти контактных метрических многообразий, наделенных связностями с кручением [3; 6—10]. При этом почти одинаковый интерес представляют многообразия как с метрическими связностями, так и с неметрическими. Наиболее часто рассматриваются четверть-симметрические многообразия, находящие применение в теоретической физике [7]. Совсем недавно стали появляться работы, посвященные изучению почти контактных метрических многообразий с N-связностью [3; 6; 8]. N-связность ∇^N определяется на почти контактном метрическом многообразии, наделенном внутренней связностью ∇ и эндоморфизмом $N:D\to D$ гладкого распределения *D*, как единственная связность на многообразии *M*, удовлетворяющая следующим условиям [6]:

$$1)\ \nabla^N_{\vec{x}}\vec{y}\in\Gamma(D),\ 2)\ \nabla^N_{\vec{x}}\vec{\xi}=0,\ 3)\ \nabla^N_{\vec{\xi}}\vec{y}=[\vec{\xi},\vec{y}]+N\vec{y},$$

$$4)\ \nabla^N_{\vec{y}}\vec{z}=\nabla_{\vec{y}}\vec{z},\ \ \vec{x}\in\Gamma\left(TM\right),\ \ \vec{y},\vec{z}\in\Gamma\left(D\right).$$

Если ∇ — метрическая связность, то связность ∇^N характеризуется следующими условиями [6]:

$$1)\ S(\vec{x},\vec{y})=2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi}+\eta(\vec{x})N\vec{y}-\eta(\vec{y})N\vec{x},\ \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\Gamma\left(TM\right);$$

$$2)\ \nabla^N_{\vec{x}}g(\vec{y},\vec{z})=0,\ \ \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\Gamma\left(D\right);$$

3) $\nabla^{N}_{\vec{x}}\vec{\xi}=0,\ \ \vec{x}\in\Gamma\left(TM\right);$

4) $\nabla^{N}_{\vec{x}}\eta=0,\ \ \vec{x}\in\Gamma\left(TM\right).$

Задавая соответствующим способом эндоморфизм N, можно получить известные ранее классы N-связностей:

1. Связность Бежанку ∇^{B} с нулевым эндоморфизмом $N=0$. Связность Бежанку ∇^{B} связана со связностью Леви-Чивиты $\tilde{\nabla}$ с помощью формулы

$$\nabla^{B}_{\vec{x}}\vec{y}=\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}-\eta(\vec{x})\tilde{\nabla}_{\vec{y}}\vec{\xi}-\eta(\vec{y})\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{\xi}+(\omega+c)(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi}.$$

2. Связность Танака — Вебстера ∇^{TW}, определяемая как единственная связность, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\nabla^{TW}\eta=0,$

2) $\nabla^{TW}\vec{\xi}=0,$

3) $\nabla^{TW}g=0,$

4) $S(\vec{x},\vec{y})=2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi},\ \ \vec{x},\vec{y}\in\Gamma(D),$

5) $S(\vec{\xi},\varphi\vec{x})=-\varphi S(\vec{\xi},\vec{x}),\ \ \vec{x}\in\Gamma(TM).$

Связность ∇^{TW} совпадает с N-связностью в случае, когда $N=C$.

3. Связность Схоутена — ван Кампена ∇^{Sk} определяется равенством $\nabla^{Sk}_{\vec{x}}\vec{y}=(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^{h})^{h}+(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^{v})^{v}$. Связность Схоутена — ван Кампена является N-связностью для случая, когда $N=C-\varphi$.

Многообразия Кенмоцу, составляющие интересный для исследования класс почти контактных метрических многообразий, характеризуются особым строением внутренних инвариантов [6; 11; 12]. В частности, в настоящей работе доказывается, что тензор Схоутена — Вагнера [6] для многообразия Кенмоцу обращается в нуль. N-связность в ряде случаев оказывается предпочтительнее связности Леви-Чивиты. По-видимому, основное преимущество N-связности заключатся в выполнении следующего условия: $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{y} \in \Gamma(D)$, где $\vec{x} \in \Gamma(TM)$, $\vec{y} \in \Gamma(D)$. Несомненно, что сравнение эффективности использования разных классов N-связностей для описания геометрии многообразий Кенмоцу представляет интерес как с точки зрения приложения полученных результатов в теоретической физике, так и с точки зрения внутренней логики развития геометрии контактных метрических многообразий.

Находятся условия, при которых N-связность сохраняет структурный эндоморфизм многообразия Кенмоцу.

1. Основные сведения из геометрии многообразий Кенмоцу. Почти контактным метрическим многообразием называется гладкое многообразие M нечетной размерности $n = 2m + 1$, $m \geq 1$, с заданной на нем почти контактной метрической структурой $\left(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g\right)$ [1; 2]. Здесь, в частности, η — 1-форма, порождающая распределение D: $D = \ker \eta$, $\vec{\xi}$ — векторное поле, порождающее оснащение $D^{\perp}$ распределения D: $D = span(\vec{\xi})$. Гладкое распределение D будем называть распределением почти контактного метрического многообразия. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^{\perp}$. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие

$$N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0, ,$$

где $N_{\varphi}\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \left[\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}\right] + \varphi^2\left[\vec{x}, \vec{y}\right] - \varphi\left[\varphi\vec{x}, \vec{y}\right] - \varphi\left[\vec{x}, \varphi\vec{y}\right]$ — тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Нормальное почти контактное метрическое многообразие называется многообразием Кенмоцу, если $d\eta = 0$, $d\Omega = 2\eta \wedge \Omega$ [11; 12]. Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивиты тензора g: $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Имеет место следующая теорема [12].

Теорема 1. *Почти контактное метрическое многообразие M является многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда* $\left(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi\right)\vec{y} = -\eta(\vec{y})\varphi\vec{x} - g(\vec{x},\varphi\vec{y})\vec{\xi}$.

Для многообразий Кенмоцу также выполняются следующие условия [12]:

$$\left(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\eta\right)\vec{y} = g(\vec{x},\vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y}),\ L_{\vec{\xi}}\, g = 2(g - \eta\otimes\eta).$$

Карту $K(x^{\alpha})$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n;\ a, b, c = 1,..., n-1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [4; 5; 9]. Пусть $P{:}\ TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$, и $K(x^{\alpha})$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ порождают распределение D: $D = span(\vec{e}_a)$. Мы будем активно использовать неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$. Непосредственно проверяется, что $\left[\vec{e}_a, \vec{e}_b\right] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Условие $\vec{\xi} \in \ker\omega$ влечет справедливость равенства $\partial_n\Gamma^n_a = 0$. Пусть $K(x^{\alpha})$ и $K'(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат:

$$x^a = x^a\left(x^{a'}\right),\ x^n = x^{n'} + x^n\left(x^{a'}\right).$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля t в адаптированных координатах подчиняется следующему закону [11]: $t^a_b = A^a_{a'}A^{b'}_b t^{a'}_{b'}$, где $A^{a'}_a = \dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t_b^a$ являются компонентами допустимого тензорного поля. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t_b^a$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Пусть ψ: $D \to D$ — эндоморфизм, определяемый равенством $\omega(\vec{x},\vec{y}) = g(\psi\vec{x},\vec{y})$.

Имеет место следующее предложение [6].

Предложение 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивиты почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^{a} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}\right),$$

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^{n} = \omega_{ba} - C_{ab},\ \tilde{\Gamma}_{an}^{b} = \tilde{\Gamma}_{na}^{b} = C_a^b + \psi_a^b,\ \tilde{\Gamma}_{na}^{n} = \tilde{\Gamma}_{nn}^{a} = 0,$$

где $C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C_b^a = g^{da} C_{db}$, $\psi_a^c = g^{bc}\omega_{ab}$.

Для многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах получаем: $C_{ab} = g_{ab}$, $C_a^b = \delta_a^b$, $\omega_{ba} = 0$, $\psi_a^c = 0$.

Таким образом, в качестве следствия предложения 1 получаем предложение 2.

Предложение 2. *Коэффициенты связности Леви-Чивиты многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^{a} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}\right),\ \tilde{\Gamma}_{ab}^{n} = -g_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}_{an}^{b} = \tilde{\Gamma}_{na}^{b} = \delta_a^b,\ \tilde{\Gamma}_{na}^{n} = \tilde{\Gamma}_{nn}^{a} = 0.$$

Определим на многообразии M N-связность ∇^N, полагая [6]:

$$\nabla_{\vec{x}}^{N} \vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y} - \eta(\vec{x})\tilde{\nabla}_{\vec{y}}\vec{\xi} - \eta(\vec{y})\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y}.$$

Предложение 3. *Ненулевые коэффициенты* $G^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *связности* ∇^{N}, *заданной на почти контактном метрическом многообразии M, имеют вид* $G^{c}_{ab} = \tilde{\Gamma}^{c}_{ab}$, $G^{c}_{nb} = N^{c}_{b}$.

Внутренней линейной связностью ∇ на многообразии с почти контактной метрической структурой [2; 6; 9] называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$,

2) $\nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$,

3) $\nabla_{\vec{x}}(\vec{y}+\vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^{c}_{ab}\vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_{a}\vec{e}_{a'}$, где $A^{a'}_{a} = \dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^{a}}$, следует формула преобразования для коэффициентов связности: $\Gamma^{c}_{ab} = A^{a'}_{a} A^{b'}_{b} A^{c}_{c'} \Gamma^{c'}_{a'b'} + A^{c}_{c'} \vec{e}_a A^{c'}_{b}$. Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным $S(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}]$. Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем $S^{c}_{ab} = \Gamma^{c}_{ab} - \Gamma^{c}_{ba}$.

N-связность ∇^{N} определяется с помощью следующего равенства [6]. На почти контактном метрическом многообразии существует единственная связность ∇ с нулевым кручением такая, что $\nabla_{\vec{x}} g(\vec{x},\vec{y}) = 0$.

Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Коэффициенты внутренней метрической связности находятся по формулам $\Gamma^{a}_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}\right)$.

Следуя В.В. Вагнеру [6], под внутренней геометрией почти контактного метрического многообразия M будем понимать геометрические свойства M, которые зависят только от параллельного перенесения, определяемого внутренней связностью, и от оснащения $D^{\perp}$. К основным инвариантам внутренней геометрии мы относим тензор кривизны Схоутена R, дифференциальную форму $\omega = d\eta$, производную Ли $C = \frac{1}{2} L_{\vec{\xi}} g$ метрического тензора g вдоль векторного поля $\vec{\xi}$ и тензорное поле P, компоненты которого в адаптированных координатах [6] представлены в виде $P_{ad}^{c} = \partial_n \Gamma_{ad}^{c}$. Тензорное поле P_{ad}^{c} назовем тензором Схоутена — Вагнера.

Теорема 2. *Тензор Схоутена — Вагнера внутренней связности многообразия Кенмоцу равен нулю.*

Доказательство. Используя равенство

$$\Gamma_{bc}^{a} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc} \right),$$

получаем: $2 g_{ae} \Gamma_{bc}^{a} = \vec{e}_b g_{ce} + \vec{e}_c g_{be} - \vec{e}_e g_{bc}$.

Продифференцируем обе части последнего равенства по x^n. Используя $L_{\vec{\xi}} g = 2(g - \eta \otimes \eta)$ или, в адаптированных координатах, $\partial_n g_{ab} = 2 g_{ab}$, получаем:

$$4 g_{ae} \Gamma_{bc}^{a} + 2 g_{ae} \partial_n \Gamma_{bc}^{a} = 2(\vec{e}_b g_{ce} + \vec{e}_c g_{be} - \vec{e}_e g_{bc}).$$

Отсюда следует, что $\partial_n \Gamma_{bc}^{a} = 0$.

3. Многообразие Кенмоцу с N-связностью. Используя предложение 2 и формулу $L_{\vec{\xi}} g = 2(g - \eta \otimes \eta)$, получаем

Предложение 4. N-связность ∇^N выражается через связность Леви-Чивиты с помощью следующего равенства:

$$\nabla_{\vec{x}}^{N} \vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y} + \eta(\vec{x}) N \vec{y} + (g + \eta \otimes \eta)(\vec{x}, \vec{y}) \vec{\xi} - \eta(\vec{y}) \vec{x} - \eta(\vec{x}) \vec{y}.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\nabla^N_{\vec{x}}\vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} + \eta(\vec{x})N\vec{y} + \tilde{C}(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} - \eta(\vec{y})\vec{x} - \eta(\vec{x})\vec{y},$$

где $\tilde{C}_{ab} = g_{ab}$, $\tilde{C}_{an} = 0$, $\tilde{C}_{nn} = 2$.

Предложение 5. *Ненулевые компоненты тензора кривизны* $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ *связности* ∇^N *в адаптированных координатах принимают следующий вид:*

$$K^d_{abc} = R^d_{abc},\ \ K^d_{nbc} = -\nabla_b N^d_c .$$

Здесь R^c_{bad} — компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах [6]: $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a|e|}\Gamma^e_{b]c}$.

Найдем условия, при которых связность ∇^N является метрической связностью. В адаптированных координатах равенство $\nabla^N g = 0$ переписывается в виде:

$$\nabla^N_c g_{ab} = \vec{e}_c g_{ab} - \Gamma^d_{ca} g_{db} - \Gamma^d_{cb} g_{ad} = 0,$$

$$\nabla^N_n g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N^c_a g_{cb} - N^c_b g_{ac} = 0.$$

Учитывая, что для многообразия Кенмоцу $\partial_n g_{ab} = 2g_{ab}$, из последнего равенства получаем $2g_{ab} = N^c_a g_{cb} + N^c_b g_{ac}$.

Тем самым убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 6. *N-связность* ∇^N *является метрической тогда и только тогда, когда выполняется следующее равенство:* $2g_{ab} = N^c_a g_{cb} + N^c_b g_{ac}$.

Найдем ограничение на эндоморфизм N, при котором связность ∇^N сохраняет структурный эндоморфизм многообразия Кенмоцу. Рассмотрим равенство

$$\nabla_n^N \varphi_a^b = \partial_n \varphi_a^b + N_c^b \varphi_a^c - N_a^c \varphi_c^b = 0.$$

Учитывая, что многообразие Кенмоцу является нормальным почти контактным метрическим многообразием, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 7. *N-связность* ∇^N *сохраняет структурный эндоморфизм* φ *многообразия Кенмоцу тогда и только тогда, когда эндоморфизмы N и* φ *коммутируют*:

$$N_c^b \varphi_a^c - N_a^c \varphi_c^b = 0.$$

Последнее равенство выполняется, в частности, если $N = \varphi$.

В завершение работы приведем пример многообразия Кенмоцу с метрической N-связностью, сохраняющей структурный эндоморфизм φ.

Пример. Определим на пространстве R^3 структуру многообразия Кенмоцу, полагая, что в канонических координатах (x, y, z) выполняются равенства $g_{11} = g_{22} = e^{2z}$, $g_{33} = 1$,

$$\varphi\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x},\ \varphi\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x},\ \varphi\frac{\partial}{\partial z} = 0,\ \vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial z},\ \eta = dz.$$

Нетрудно проверить, что связность ∇ с коэффициентами $\Gamma_{ab}^c = 0$, $\Gamma_{na}^c = N_a^c = \delta_a^c$ является метрической N-связностью, сохраняющей структурный эндоморфизм φ.

Список литературы

1. *Букушева А.В.* О геометрии слоений на распределениях с финслеровой метрикой // Изв. Пензенского педагогического университета им. В.Г. Белинского. Физико-математические и технические науки. 2012. № 30. С. 33—38.

2. *Букушева А.В.* Нелинейные связности и внутренние полупульверизации на распределении с обобщенной лагранжевой метрикой // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 58—63.

3. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // Диф. геом. многообр. фигур. 2017. Вып. 48. С. 32—41.

4. *Галаев С.В.* Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21, № 3. С. 551—555.

5. *Галаев С.В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 3. С. 263—272.

6. *Галаев С.В.* Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, № 3 (59). С. 53—63.

7. *Гордеева И.А., Паньженский В.И., Степанов С.Е.* Многообразия Римана — Картана // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2009. Т. 123. С. 110—141.

8. *Bukusheva A.V., Galaev S.V.* Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53), № 2. P. 13—22.

9. *Galaev S.V.* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, № 1. P. 71—76.

10. *Golab S.* On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections // Tensor (N.S.). 1975. Vol. 29. P. 293—301.

11. *Kenmotsu K.A.* Class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1972. Vol. 24. P. 93—103.

12. *Pitis G.* Geometry of Kenmotsu manifolds. Brasov, 2007.

A. Bukusheva[1]
[1] *Saratov State University*
83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia
bukusheva@list.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2930-1697
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-7

On geometry of Kenmotsu manifolds with N-connection

Submitted on March 13, 2019

A Kenmotsu manifold with a given N-connection is considered. From the integrability of the distribution of a Kenmotsu manifold it follows that the N-connection belongs to the class of the quarter-symmetric connections. Among the N-connections, the class of connections adapted to the structure of the Kenmotsu manifold is specified. In particular, it is proved that an N-connection preserves the structure endomorphism φ of the Kenmotsu manifold if and only if the endomorphisms N and φ commute. A formula expressing the N-connection in terms of the Levi-Civita connection is obtained. The Chrystoffel symbols of the Levi-Civita connection and of the N-connection of the Kenmotsu manifold with respect to the adapted coordinates are computed. The properties of the invariants of the interior geometry of the Kenmotsu manifolds are investigated. The invariants of the interior geometry are the following: the Schouten curvature tensor; the 1-form η defining the distribution D; the Lie derivative $L_{\vec{\xi}}g = 0$ of the metric tensor g along the vector field $\vec{\xi}$; the tensor field P with the components given with respect to the adapted coordinate system by the formula $P^{c}_{ad} = \partial_n \Gamma^{c}_{ad}$. The field P is called in the work the Schouten — Wagner tensor. It is proved that the Schouten — Wagner tensor of the interior connection of the Kenmotsu manifold is zero. The conditions that satisfies the endomorphism N defining the metric N-connection are found. At the end of the work, an example of a Kenmotsu manifold with a metric N-connection preserving the structure endomorphism φ is given.

Keywords: Kenmotsu manifold; interior connection of an almost contact metric manifold; N-connection of an Kenmotsu manifold.

References

1. *Bukusheva, A. V.:* On the geometry of foliations on distributions with Finslerian metric. Izv. Penz. Pedagog. Univ. (Ser. fiz.-matem. i tekhn. nauki). 30, 33—38 (2012) (in Russian).

2. *Bukusheva, A. V.:* Nonlinear connections and internal semi-pulverization on a distribution with a generalized Lagrangian metric. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 46, 58—62 (2015) (in Russian).

3. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Geometry of almost contact hyperkähler manifolds. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 48, 32—41 (2017) (in Russian).

4. *Galaev, S. V.:* Smooth distributions with admissible hypercomplex pseudo-Hermitian structure. Vestnik Bashkirskogo universiteta. **21**:3, 551—555 (2016) (in Russian).

5. *Galaev, S. V.:* Admissible hypercomplex structures on distributions of Sasakian manifolds. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform. **16**:3, 263—272 (2016) (in Russian).

6. *Galaev, S. V.:* Generalized Wagner's curvature tensor of almost contact metric spaces. Chebyshevskii Sbornik, **17**:3 (59), 53—63 (2016) (in Russian).

7. *Gordeeva, I. A., Panzhensky, V. I., Stepanov, S. E.*: Riemann — Cartan manifolds. Itogi nauki i tekhn. Sovrem. Math and its app. Theme reviews. Moskow. 123, 110—141 (2009) (in Russian).

8. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Almost contact metric structures defined by connection over distribution. Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. **4**(53):2, 13—22 (2011).

9. *Galaev, S. V.:* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures, Lobachevskii Journal of Mathematics. **39**:1, 71—76 (2018).

10. *Golab, S.:* On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections, Tensor (N. S.), 29, 293—301 (1975).

11. *Kenmotsu, K. A.:* Class of almost contact Riemannian manifolds, Tohoku Math. J. 24, 93—103 (1972).

12. *Pitis, G.:* Geometry of Kenmotsu manifolds. Publishing House of Transilvania University of Brasov, Brasov (2007).