Рассмотрим случай II.

II. $1-\gamma^2 \neq 0$.

Тогда из уравнений (12) и (8) имеем:

$$b = \ell, \quad \ell(1+\gamma^2) = \gamma, \tag{15}$$

$$d\lambda_1 = 2\left(\lambda_1\lambda_2 - \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2}\right)\vartheta_1 - \lambda_1(\omega_3^3 - \omega_2^2) - (\lambda_1)^2\vartheta_2, \tag{16}$$

$$d\lambda_2 = 2\left(\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{1+\gamma^2}\right)\vartheta_2 - \lambda_2(\omega_3^3 - \omega_1^1) - (\lambda_2)^2\vartheta_1. \tag{17}$$

Осуществляя последовательные замыкания системы (I6), (I7), получим соотношения

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0,$$

противоречащие (6).

Итак, не существует пар M_o, в которых точки A_3 и A_4 являются характеристическими точками плоскостей коник C_1 и C_2, а прямая A_3A_4 не инцидентна касательным плоскостям к поверхностям (A_i). Следовательно, если A_3 и A_4 -характеристические точки плоскостей коник C_1 и C_2, то пара M_o является парой B. Теорема доказана.

Список литературы

I.М а л а х о в с к и й В.С. Расслояемые пары конгруэнций фигур.- Тр.геометрич.семинара .М., ВИНИТИ, 3, I97I, с. I93-220.

2.К о р с а к о в а Л.Г. Расслояемые пары конгруэнций коник в P_3 -В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7, Калининград, I976, с.46-53.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.IO 1979

УДК 513.73

М.В.К р е т о в

КОМПЛЕКСЫ ЭЛЛИПСОИДОВ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном аффинном пространстве A_3 рассматриваются комплексы K_3 эллипсоидов. Найден основной геометрический объект [1] комплекса K_3. Показано, что центр эллипсоида $\tilde{Q}$ является его характеристической точкой [2]. Доказано существование инвариантной поверхности четвертого порядка, ассоциированной с комплексом K_3, которая содержит характеристическое многообразие эллипсоида. Рассмотрен специальный класс комплексов K_3.

§I. Основной геометрический объект комплекса K_3

Отнесем комплекс K_3 эллипсоидов к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где A -центр эллипсоида $\tilde{Q}$. Деривационные формулы репера R запишутся в виде

$$d\bar{A} = \omega^i\bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j\bar{e}_j \quad (i,j,k = 1,2,3), \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{1.2}$$

Уравнение эллипсоида $\tilde{Q}$ имеет вид

$$F \equiv a_{ij}x^i x^j - 1 = 0. \tag{1.3}$$

Пусть векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ направлены по тройке сопряженных диаметров эллипсоида, причем концы их лежат на эллипсоиде. Тогда уравнение эллипсоида $\tilde{Q}$ запишется в виде

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0 . \qquad (1.4)$$

Обозначим символом δ дифференцирование по вторичным параметрам, а символом π_i^j значения форм ω_i^j при фиксированных первичных параметрах. Тогда из соотношений $\delta \bar{A} = 0$, $\delta F = \lambda F$ будем иметь:

$$\pi^1 = \pi^2 = \pi^3 = 0 , \quad \pi_1^1 = \pi_2^2 = \pi_3^3 = 0 ,$$
$$\pi_1^2 + \pi_2^1 = 0 , \quad \pi_3^1 + \pi_1^3 = 0 , \quad \pi_3^2 + \pi_2^3 = 0 . \qquad (1.5)$$

Из формул (1.5) следует, что структурными формами эллипсоида $\tilde{Q}$ являются формы Пфаффа: ω^i, ω_i^i (по i не суммировать!).

Рассмотрим общий случай, когда многообразие центров эллипсоидов трехмерное, т.е.

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0 . \qquad (1.6)$$

Принимая формы ω^i за независимые первичные, запишем систему уравнений Пфаффа комплекса K_3 в виде

$$\omega_i^i = a_{ik}\,\omega^k , \quad \omega_i^{i+1} + \omega_{i+1}^i = b_{ik}\,\omega^k , \qquad (1.7)$$

где

$$\omega_{i+3}^{j+3} \stackrel{def}{=} \omega_i^j .$$

Замыкаем систему (1.7), получаем

$$\Delta a_{ik} \wedge \omega^k = 0 , \quad \Delta b_{ik} \wedge \omega^k = 0 , \qquad (1.8)$$

где

$$\Delta a_{ik} = d a_{ik} - a_{ij}\,\omega_k^j - b_{ik}\,\omega_i^{i+1} - b_{i+2,k}\,\omega_i^{i+2} ,$$
$$\Delta b_{ik} = d b_{ik} - b_{ij}\,\omega_k^j - b_{i+1,k}\,\omega_i^{i+2} - b_{i+2,k}\,\omega_{i+1}^{i+2} + \qquad (1.9)$$
$$+ a_{ik}\,\omega_i^{i+1} - a_{i+1,k}\,\omega_i^{i+1} - a_{ik}\,\omega_{i+1}^i + a_{i+1,k}\,\omega_{i+1}^i .$$

Из формул (1.9) следует, что

$$\delta a_{ik} = a_{ij}\,\pi_k^j + b_{ik}\,\pi_i^{i+1} + b_{i+2,k}\,\pi_i^{i+2} ,$$

$$\delta b_{ik} = b_{ij}\,\pi_k^j + b_{i+1,k}\,\pi_i^{i+2} + b_{i+2,k}\,\pi_{i+1}^{i+2} -$$
$$- a_{ik}\,\pi_i^{i+1} + a_{i+1,k}\,\pi_i^{i+1} + a_{ik}\,\pi_{i+1}^i - a_{i+1,k}\,\pi_{i+1}^i . \qquad (1.10)$$

Анализ формул (1.10) позволяет утверждать, что геометрический объект $\Gamma = \{a_{ij}, b_{ij}\}$ является основным геометрическим объектом комплекса K_3.

§ 2. Характеристическое многообразие эллипсоида $\tilde{Q}$, принадлежащего комплексу K_3

Т е о р е м а 2.1. Центр эллипсоида $\tilde{Q}$ является его характеристической точкой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\frac{1}{2}\,dF = F_k\,\omega^k , \qquad (2.1)$$

где

$$F_k = a_{1k}(x^1)^2 + a_{2k}(x^2)^2 + a_{3k}(x^3)^2 +$$
$$+ b_{1k}\,x^1 x^2 + b_{2k}\,x^2 x^3 + b_{3k}\,x^1 x^3 + x^k . \qquad (2.2)$$

Характеристическое многообразие эллипсоида $\tilde{Q}$ задается следующей системой уравнений:

$$F_1 = 0 , \quad F_2 = 0 , \quad F_3 = 0 . \qquad (2.3)$$

Из системы (2.3) и формул (2.2) следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 2.2. Существует инвариантная поверхность Φ четвертого порядка, ассоциированная с комплексом K_3, содержащая характеристическое многообразие эллипсоида $\tilde{Q}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим поверхность Φ четвертого порядка, определяемую уравнением:

$$\tilde{\Phi} \equiv F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0 . \qquad (2.4)$$

Используя формулы (1.5) и (1.10), находим

$$\delta F_1 = \pi_1^2 F_2 + \pi_1^3 F_3 ,$$

$$\delta F_2 = \pi_2^1 F_1 + \pi_2^3 F_3 ,$$
$$\delta F_3 = \pi_3^1 F_1 + \pi_3^2 F_2 . \qquad (2.5)$$

Откуда $\delta \widetilde{\Phi} = 0$.Таким образом,поверхность Φ является инвариантной.

Так как равенство $\widetilde{\Phi} = 0$ является следствием системы уравнений (2.3),то поверхность Φ содержит характеристическое многообразие эллипсоида $\widetilde{Q}$.Теорема доказана.

§ 3. Комплексы K_3^o

О п р е д е л е н и е.Комплекс эллипсоидов K_3 ,в котором на квадрике $\widetilde{Q}$ имеются,по крайней мере,три характеристические точки A_i , которые не лежат на одной прямой и на одной плоскости,проходящей через центр,называется комплексом K_3^o ,если прямая,проходящая через центр и одну из точек A_i,описывает цилиндрическую поверхность.

Т е о р е м а 3.I. Комплекс K_3^o существует и определяется с произволом трех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Пусть цилиндрическую поверхность описывает прямая (AA_1).Тогда специализируем репер R таким образом,чтобы концы векторов $\overline{e}_i$ совпадали соответственно с характеристическими точками A_i .Такой репер будет каноническим.Из определения комплекса K_3^o следует,что

$$a_{ik} = -1 , \qquad (3.1)$$

$$\omega_1^2 = 0 , \quad \omega_1^3 = 0 . \qquad (3.2)$$

Система уравнений Пфаффа комплекса K_3^o запишется в виде

$$\omega_i^i = -\omega^1 - \omega^2 - \omega^3 , \quad \omega_1^2 = 0 , \quad \omega_1^3 = 0 , \qquad (3.3)$$

$$\omega_i^j = b_{ik}^j \omega^k , \text{ где } \quad i \neq j , \ i \neq 1 . \qquad (3.4)$$

Замыкая уравнения (3.3),получим следующие соотношения:

$$b_{21}^1 + b_{21}^3 = 0 ,$$
$$b_{32}^1 + b_{32}^2 = b_{23}^1 + b_{23}^3 ,$$
$$b_{31}^1 + b_{31}^2 = 0 ,$$
$$b_{22}^3 \cdot b_{31}^2 = b_{21}^3 \cdot b_{32}^2 , \qquad (3.5)$$
$$b_{23}^3 \cdot b_{32}^2 = b_{22}^3 \cdot b_{33}^2 ,$$
$$b_{23}^3 \cdot b_{31}^2 = b_{21}^3 \cdot b_{33}^2 .$$

Учитывая условия (3.5),получим систему уравнений Пфаффа комплекса K_3^o в виде

$$\omega_i^i = -\omega^1 - \omega^2 - \omega^3 , \quad \omega_1^2 = 0 , \ \omega_1^3 = 0 ,$$
$$\omega_2^1 = -b_{21}^3 \omega^1 + b_{22}^1 \omega^2 + b_{23}^1 \omega^3 ,$$
$$\omega_3^1 = -\lambda b_{21}^3 \omega^1 + (b_{23}^1 + b_{23}^3 - \lambda b_{22}^3)\omega^2 + b_{33}^1 \omega^3 , \qquad (3.6)$$
$$\omega_2^3 = b_{2k}^3 \omega^k ,$$
$$\omega_3^2 = \lambda \omega_2^3 .$$

Чистое замыкание [3] системы (3.6) имеет вид:

$$-d b_{21}^3 \wedge \omega^1 + d b_{22}^1 \wedge \omega^2 + d b_{23}^1 \wedge \omega^3 + c_{11} \omega^2 \wedge \omega^3 +$$
$$+ c_{12} \omega^1 \wedge \omega^3 + c_{13} \omega^1 \wedge \omega^2 = 0 , \qquad (3.7)$$
$$(-b_{21}^3 d\lambda + \lambda d b_{21}^3) \wedge \omega^1 + (d b_{23}^1 + d b_{23}^3 - b_{22}^3 d\lambda -$$
$$-\lambda d b_{22}^3) \wedge \omega^2 + d b_{33}^1 \wedge \omega^3 + c_{21} \omega^2 \wedge \omega^3 + c_{22} \omega^1 \wedge \omega^3 +$$
$$+ c_{23} \omega^1 \wedge \omega^2 = 0 , \qquad d\lambda \wedge \omega_2^3 = 0 ,$$
$$d b_{21}^3 \wedge \omega^1 + d b_{22}^3 \wedge \omega^2 + d b_{23}^3 \wedge \omega^3 + c_{31} \omega^2 \wedge \omega^3 + c_{32} \omega^1 \wedge \omega^3 + c_{33} \omega^1 \wedge \omega^2 = 0 ,$$

где

$$c_{11} = 2 b^1_{23} b^3_{23} + b^3_{21} b^3_{23} + (b^3_{23})^2 - b^3_{22} b^1_{33} - \lambda b^3_{21} b^3_{22} -$$
$$- \lambda b^1_{22} b^3_{22} - \lambda b^3_{23} b^3_{22} - b^1_{22} + b^1_{23},$$

$$c_{12} = b^3_{21} + b^1_{23} - b^3_{21} b^1_{33} - \lambda (b^3_{21})^2 - \lambda b^1_{22} b^3_{21} - \lambda b^3_{23} b^3_{21},$$

$$c_{13} = b^3_{21} + b^1_{22} - b^3_{21} \cdot b^1_{23} - b^3_{21} \cdot b^3_{23} - (b^3_{21})^2 - b^1_{23} \cdot b^3_{21},$$

$$c_{21} = \lambda b^3_{22} + \lambda b^3_{21} b^1_{23} + \lambda b^3_{21} b^3_{23} + \lambda^2 (b^3_{22})^2 + b^1_{33} b^3_{23} +$$
$$+ b^3_{23} b^1_{22} + b^1_{33} - \lambda b^3_{21} b^1_{23} - \lambda^2 b^3_{21} b^3_{22} - \lambda b^1_{23} b^3_{22} -$$
$$- \lambda b^3_{23} b^3_{22} - b^3_{22} b^1_{23} - b^1_{23} - b^3_{23},$$

$$c_{22} = \lambda^2 b^3_{22} b^3_{21} + \lambda b^3_{21} + b^1_{33} - \lambda^2 (b^3_{21})^2 - \lambda b^1_{23} b^3_{21} -$$
$$- \lambda b^3_{23} b^3_{21} - b^3_{21} b^1_{23} - b^3_{23} b^3_{21},$$

$$c_{23} = \lambda b^3_{21} + b^3_{23} + b^1_{23} - \lambda (b^3_{21})^2 - \lambda b^3_{22} - b^3_{21} b^1_{22} - b^1_{33} b^3_{21} - b^3_{21} b^3_{22},$$

$$c_{31} = \lambda b^3_{21} b^3_{22} + (b^3_{23})^2 + b^3_{23} - \lambda (b^3_{22})^2 - b^3_{21} b^3_{23} - b^3_{22},$$

$$c_{32} = \lambda (b^3_{21})^2 + b^3_{23} - \lambda b^3_{22} b^3_{21} - b^3_{21},$$

$$c_{33} = (b^3_{21})^2 + b^3_{22} - b^3_{23} b^3_{21} - b^3_{21}.$$

Из (3.6) и (3.7) следует, что

$$S_1 = 4, \ S_2 = 3, \ S_3 = 0, \ N = Q = 10. \qquad (3.8)$$

Система (3.6), (3.7) - в инволюции и определяет комплексы K^0_3 с произволом трех функций двух аргументов. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.2. Если индикатриса векторов $\bar{e}_2$ является поверхностью с касательной плоскостью, коллинеарной векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, то индикатриса векторов $\bar{e}_3$ тоже является поверхностью с касательной плоскостью, коллинеарной векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_3$. Справедливо также обратное утверждение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$d\bar{e}_2 = \omega^1_2 \bar{e}_1 + \omega^2_2 \bar{e}_2 + \omega^3_2 \bar{e}_3, \qquad (3.9)$$

$$d\bar{e}_3 = \omega^1_3 \bar{e}_1 + \omega^2_3 \bar{e}_2 + \omega^3_3 \bar{e}_3. \qquad (3.10)$$

Если $\omega^3_2 = 0$, то из последнего уравнения системы (3.6) следует, что $\omega^2_3 = 0$, т.е.

$$d\bar{e}_3 = \omega^1_3 \bar{e}_1 + \omega^3_3 \bar{e}_3. \qquad (3.11)$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.- Тр.Моск.матем.о -ва, 1953, т.2, с.275-382.

2. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.- Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ, 1974, 6, с.113-133.

3. М а л а х о в с к и й В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.