4.С.П.Фиников,Теория конгруэнций.ГИТТЛ,М,1950.

5.В.С.Малаховский,Конгруэнции кривых второго порядка с неопределенными фокальными семействами.Геометрический сб.,вып. 3 (Труды Томского университета,т.160),5-14,1960

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.

Ю.И. П О П О В

ВВЕДЕНИЕ ИНВАРИАНТНОГО ОСНАЩЕНИЯ НА ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСЕ Γ_m МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_n .

Гиперполоса в n-мерном проективном пространстве P_n является многообразием,образующим элементом которого является пара фигур $F=\{F_1, F_2\}$,где F_1 –точка,а F_2 –инцидентная ей гиперплоскость .В работе изучаются оснащенные вырожденные гиперполосы ранга τ в проективном пространстве P_n .При исследовании используется аналитический аппарат и терминология,введенные в работах [2]–[7] . В целях полноты изложения в § I,(I) приведены основные обозначения и формулы работы [6] ,употребляемые в настоящей статье.

§ I. Развертывающиеся гиперполосы Γ_m .

1°.Аналитическое задание оснащенной вырожденной гиперполосы Γ_m ранга τ ($\tau<m$). В составном многообразии проективного пространства $C_{n(m)}$,базисная поверхность B_m оснащенной гиперполосы $N(\Gamma_m)$ задается тензорным полем*)

$$M_1^\alpha = M_1^\alpha (x^1, x^2, \ldots, x^m), \tag{1.1}$$

а главные касательные гиперплоскости –тензорным полем

$$T_\alpha^0 = T_\alpha^0 (x^1, x^2, \ldots, x^m). \tag{1.2}$$

Нормаль первого рода в данной точке $M_1^\alpha (x^i)$ базисной поверхности B_m гиперполосы Γ_m задается точками $X^\alpha_0 = X^\alpha_0(x^i), X^\alpha_\lambda = X^\alpha_\lambda(x^i)$ или гиперплоскостями $N^{1h}_\alpha = N^{1h}_\alpha(x^i)$, а нормаль второго рода-гиперплоскостями*)

$$P^1_\alpha = P^1_\alpha(x^i), T^0_\alpha = T^0_\alpha(x^i), T^\lambda_\alpha = T^\lambda_\alpha(x^i).$$

Оснащение гиперполосы Γ_m индуцирует в составном многообразии $C_{n(m)}$ тензоры $p_{ij}, b^0_{1ij}, b^\lambda_{1ij}, m^{1h}_{0i}, m^1_{0i}, n^\lambda_{0i}, m^{1h}_{\lambda i}, m^1_{\lambda i}$ и связность

$$\Gamma_i\{\Gamma^h_{ij}, \Gamma^1_{1i}, \Gamma^0_{0i}, \Gamma^\chi_{\lambda i}, \Gamma^\alpha_{\beta i}\},$$

которые удовлетворяют в частности следующим соотношениям**) :

$$M^\alpha_{1/ij} = p_{ij} M^\alpha_1 + b^0_{1ij} X^\alpha_0 + b^\lambda_{1ij} X^\alpha_\lambda, \tag{1.3}$$

$$X^\alpha_{0/i} = m^{1h}_{0i} M^\alpha_{1/h} + m^1_{0i} M^\alpha_1 + n^\lambda_{0i} X^\alpha_\lambda, \tag{1.4}$$

$$X^\alpha_{\lambda/i} = m^{1h}_{\lambda i} M^\alpha_{1/h} + m^1_{\lambda i} M^\alpha_1, \tag{1.5}$$

$$T^\lambda_{\alpha/j} M^\alpha_1 = 0, \ T^\lambda_{\alpha/j} M^\alpha_{1/i} = -b^\lambda_{1ij}, \ T^\lambda_{\alpha/j} X^\alpha_0 = -n^\lambda_{0j}, \ T^\lambda_{\alpha/j} X^\alpha_\lambda = 0, \tag{1.6}$$

$$T^0_{\alpha/i} = b^0_{1ih} N^{1h}_\alpha, \tag{1.7}$$

$$b^0_{1\underline{ij}} = 0, \ b^\lambda_{1\underline{ij}} = 0, \ p_{\underline{ij}} = R^1_{1ij}, \tag{1.8}$$

$$R^h_{ijk} + \delta^h_i R^1_{1jk} = p_{i\underline{j}} \delta^h_{\underline{k}} + b^0_{1i\underline{j}} m^{1h}_{0\underline{k}} + b^\lambda_{1i\underline{j}} m^{1h}_{\lambda\underline{k}}, \tag{1.9}$$

$$b^0_{1i\underline{j/k}} = 0, \tag{1.10}$$

$$m^{1h}_{\lambda\underline{i}} b^0_{1h\underline{j}} = 0. \tag{1.11}$$

---

*). См. [6], [7]. Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что индексы принимают следующие обозначения: $\alpha, \beta, \gamma \ldots = 1,2,\ldots,n+1$; $i,j,k \ldots = 1,2,\ldots,m$; $i_1, j_1, k_1, \ldots = 1,2,\ldots,\tau$; $i_2, j_2, k_2, \ldots = \tau, \tau+1, \ldots, m$;

$$\chi, \lambda, \sigma, \ldots = 1,2,\ldots,n-m-1.$$

**). Обозначения для тензоров и связности те же, что и в работе [6]. Символ „/" обозначает ковариантное дифференцирование относительно связности Γ_i. Для альтернирования принимаем обозначение $2\varphi_{[ij]} = \varphi_{\underline{ij}}$.

При изменении оснащения*)

$$\bar{N}^{1h}_\alpha = N^{1h}_\alpha - \psi^{1h}_0 T^0_\alpha, \ M^\alpha_{1//i} = M^\alpha_{1/i} + h_i M^\alpha_1 \tag{1.12}$$

тензор b^0_{1ij} не изменяется, а связность Γ_i меняется по формулам:

$$\bar{\Gamma}^1_{1i} = \Gamma^1_{1i} - h_i, \ \bar{\Gamma}^0_{0i} = \Gamma^0_{0i} + \psi^{1h}_0 b^0_{1hi}, \ \bar{\Gamma}^\chi_{\lambda i} = \Gamma^\chi_{\lambda i}, \tag{1.13}$$

$$\bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + h_i \delta^h_j + h_j \delta^h_i - b^0_{1ij} \psi^{1h}_0. \tag{1.14}$$

Вырожденная гиперполоса Γ_m характеризуется тем, что ранг матрицы $\| b^0_{1ij} \|$ равен τ , поэтому при фиксировании координатных систем в ассоциированных пространствах составного многообразия $C_{n(m)}$ базисное пространство с тензором b^0_{1ij} и связностью Γ^h_{ij} является примером пространства $B_m (m=n)$, рассмотренного в работе [5], § I. Как известно, в этом случае в базисном многообразии B_m существует система координат, в которой выполняется условие :

$$b^0_{1ij_2} = 0^{**)} \tag{1.15}$$

Всякая система координат, удовлетворяющая этому условию, называется к а н н о н и ч е с к о й [5], §I. Формулы преобразования канонических систем координат базисного многообразия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x^{i'_1} &= x^{i'_1}(x^1, x^2, \ldots, x^\tau), \\ x^{i'_2} &= x^{i'_2}(x^1, x^2, \ldots, x^\tau, x^{\tau+1}, \ldots, x^m) \end{aligned}\right\}$$

Обратные формулы имеют аналогичный вид. Будем предполагать в дальнейшем изложении, что все рассматриваемые системы координат многообразия B_m канонические.

---

*). Черта сверху говорит о том, что соответствующая величина индуцируется новым оснащением. Дифференцирование относительно связности $\bar{\Gamma}_i$ обозначается символом „//". Нормаль второго рода задается также точками $M^\alpha_{1/i}$.

**). См. [I], теорема [3, 4] .

Базисная поверхность B_m вырожденной гиперполосы образована из ∞^{τ} систем плоских $(m-\tau)$-мерных образующих [1]. Выбор канонической координатной системы в B_m геометрически означает, что плоская образующая оснащенной гиперполосы Γ_m, проходящая через точку $(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{\tau}, x_0^{\tau+1}, \dots, x_0^m)$, задается уравнениями $x^{i_1} = x_0^{i_1}$ и, следовательно, уравнением $M_1^{\alpha} = M_1^{\alpha}(x_0^1, \dots, x_0^{\tau}, x^{\tau+1}, \dots, x^m)$ в P_n. Отсюда вытекает, что линейно независимые точки $M_1^{\alpha}, M_{1/i_2}^{\alpha}$ принадлежат $(m-\tau)$ - мерной плоской образующей, проходящей через M_1^{α}, и полностью её определяют.

Для оснащенной вырожденной гиперполосы Γ_m ранга τ компоненты $\Gamma_{i_2 j}^{h_1}$ образуют геометрический объект и преобразуются по закону:

$$\Gamma_{i_2' j'}^{h_1'} = \Gamma_{i_2 j}^{h_1} \frac{\partial x^{h_1'}}{\partial x^{h_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i_2'}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}$$

Отсюда следует, что если компоненты $\Gamma_{i_2 j}^{h_1}$ равны нулю в одной канонической системе координат, то они равны нулю и в любой другой канонической системе координат. Связность Γ_{ij}^{h} базисного многообразия B_m, для которой $\Gamma_{i_2 j}^{h_1} = 0$ в любой канонической системе координат, называется к-связностью [5], § I.

Далее, компоненты $\Gamma_{i_2 j_2}^{h_1}$ связности Γ_{ij}^{h} тождественно равны нулю. Действительно, из уравнения (I.8), полагая $i = i_2$, $j = j_2$ и учитывая соотношение (I.I4), находим

$$\Gamma_{i_2 j_2}^{h_1} \equiv 0. \tag{1.16}$$

Компоненты $\Gamma_{i_2 j_2}^{h_2}$ образуют геометрический объект и преобразуются по закону:

$$\Gamma_{i_2' j_2'}^{h_2'} \frac{\partial x^{\kappa_2}}{\partial x^{h_2'}} = \frac{\partial^2 x^{\kappa_2}}{\partial x^{i_2'} \partial x^{j_2'}} + \Gamma_{p_2 t_2}^{\kappa_2} \frac{\partial x^{p_2}}{\partial x^{i_2'}} \frac{\partial x^{t_2}}{\partial x^{j_2'}}.$$

Для к-связности Γ_{ij}^{h} аналогичное утверждение имеет место и относительно компонент $\Gamma_{i_1 j_1}^{h_1}$.

2°. **m-конические развертывающиеся гиперполосы.**

О п р е д е л е н и е. Гиперполоса Γ_m, вложенная в проективное пространство, называется развертывающейся гиперполосой ранга τ, если её базисная поверхность состоит из ∞^{τ} $(m-\tau)$-мерных плоских образующих, вдоль каждой из которых касательная m-плоскость постоянна (то есть B_m представляет собой развертывающуюся поверхность ранга τ).

Сформулируем тензорный признак развертывающейся гиперполосы Γ_m.

Т е о р е м а [I.I]. Для того, чтобы оснащенная вырожденная гиперполоса была развертывающейся гиперполосой ранга τ, необходимо и достаточно, чтобы

$$b_{1 i j_2}^{\lambda} = 0, \quad n_{o j_2}^{\lambda} = 0. \tag{1.17}$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Заметим, что для всякой вырожденной гиперполосы, как следует из (I.7), вдоль плоской образующей $x^{i_1} = x_0^{i_1}$ поле гиперплоскостей $T_{\alpha}^{o} = T_{\alpha}^{o}(x_0^1, \dots, x_0^{\tau}, x^{\tau+1}, \dots, x^m)$ постоянно*):

$$T_{\alpha/i_2}^{o} = 0. \tag{1.18}$$

Тогда условие постоянства касательной плоскости $\{T_{\alpha}^{o}, T_{\alpha}^{\lambda}\}$ вдоль плоской образующей развертывающейся гиперполосы запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} T_{\alpha/i_2}^{o} &= 0, \\ T_{\alpha/j_2}^{\lambda} &= \psi_{j_2} T_{\alpha}^{\lambda} \end{aligned}\right\}. \tag{1.19}$$

Подставляя (I.I9) в соотношения (I.6), находим**):

$$b_{1 i j_2}^{\lambda} = 0, \quad n_{o j_2}^{\lambda} = 0.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. В силу условий (I.I7) из (I.6) следует, что $T_{\alpha/j_2}^{\lambda} = 0$. Отсюда, учитывая ещё (I.I8), приходим к выводу, что касательная плоскость вдоль плоской образующей $x_0^{i_1} = x^{i_1}$ постоянна.

---

*). См. [2], §6, стр. 29.

**). См. [6], стр. 29.

В дальнейшем изложении воспользуемся предложениями :

Л е м м а [1.2]. Если оснащение вырожденной гиперполосы индуцирует в B_m к-связность Γ^h_{ij}, то имеют место следующие условия*):

а). $b^{0}_{1ij/k}$ — к-тензор типа $\left\{ {0 \atop a} \right\}$, где $a \leq 1$,

б). $u^i_{/k}$ — к-тензор типа $\left\{ {a \atop 0} \right\}$, где $a \leq 1$.

Если для некоторого оснащения вырожденной гиперполосы имеет место по крайней мере одно из условий а) и б), то связность, индуцируемая этим оснащением, является к-связностью.

Л е м м а [1.3]. Для того, чтобы существовало оснащение вырожденной гиперполосы, индуцирующее в рассматриваемой области базисной поверхности B_m к-связность Γ^h_{ij}, необходимо и достаточно, чтобы для любого оснащения гиперполосы Γ_m в этой области B_m выполнялось равенство

$$b^{0}_{1ij/k_2} = \varphi_{k_2} b^{0}_{1ij}, \qquad (1.20)$$

где φ_{k_2}—подтензор некоторого ковариантного вектора базисного пространства B_m.

Л е м м а [1.4]. Для всякой развертывающейся гиперполосы имеет место равенство :

$$b^{\lambda}_{1ki} u^i = 0, \qquad (1.21)$$

где u^i—к-тензор типа $\left\{ {1 \atop 0} \right\}$.

Доказательство лемм [1.2] и [1.3] проводим совершенно аналогично предложениям [2.1] и [2.2] работы [5]. Равенство (1.21) выполняется в силу соотношения (1.17).

О п р е д е л е н и е . Развертывающаяся гиперполоса Γ_m называется M-конической, все плоские образующие которой имеют общую ($m-\tau-1$)-мерную плоскость (вершину гиперполосы).

---

*) См. [5], §1.

M-конические развертывающиеся гиперполосы Γ^{τ}_m характеризуются следующими признаком.

Т е о р е м а [1.5]. Для того, чтобы развертывающаяся гиперполоса Γ^{τ}_m ранга τ в n-мерном проективном пространстве P_n была M-конической, необходимо и при $\tau > 1$ достаточно, чтобы для любого оснащения в базисном многообразии B_m существовал подтензор φ_{k_2}, удовлетворяющий соотношению (1.20).

Учитывая лемму [1.4], эту теорему можно доказать аналогично теореме [2.3] работы [5].

Непосредственно из теоремы [1.5] и леммы [1.3] вытекает следующее предложение :

Т е о р е м а [1.6]. Для того, чтобы развертывающаяся гиперполоса Γ_m ранга τ в n-мерном проективном пространстве P_n была M-конической, необходимо и при $\tau > 1$ достаточно, чтобы существовало оснащение данной гиперполосы, индуцирующее в базисном многообразии B_m к-связность Γ^h_{ij}.

§ 2. К-оснащения вырожденной гиперполосы.

Введем в рассмотрение симметрический тензор b^{1ij}_{0}, определяемый соотношением :

$$b^{0}_{1ij} b^{1jk}_{0} = \Delta^k_i, \qquad (2.1)$$

где Δ^k_i — к-тензор типа $\left\{ {0 \atop 1} \right\}$, характеризующийся следующими условиями*):

$$\Delta^k_{i_2} = 0, \; \Delta^{k_1}_{i_1} = \delta^{k_1}_{i_1}, \quad \Delta^{k_2}_{i_1}\text{—произвольные функции } x^i \quad (2.2)$$

Компоненты $b^{1j_1k_2}_{0}$ этого тензора, как следует из (2.1) и (2.2), определяются однозначно заданным тензором Δ^k_i, компоненты $b^{1j_1k_1}_{0}$ не зависят от выбора Δ^k_i, а компоненты $b^{1j_2k_2}_{0}$—произвольные.

---

*). См. [5], §1.

Как известно*), тензор $b^{0}_{1ij/k}$ является к-тензором типа $\begin{Bmatrix}0\\ b\end{Bmatrix}$, где $b\leq 2$, то есть $b^{0}_{1ij_2/k_2}=0$.

Следовательно, подтензор K_{i_2} чебышевского вектора**) $K_i=\frac{1}{\tau+2}b^{0}_{1ijk}b^{ijk}_{0}$ вырожденной гиперполосы ранга τ не зависит от компонент $b^{ijk_2}_{0}$ тензора b^{ijk}_{0}.

О п р е д е л е н и е . Оснащение вырожденной гиперполосы, индуцирующее ковариантный к-вектор K_i (компоненты K_{i_2} равны нулю), называется к-оснащением.

Рассмотрим некоторые свойства к-оснащений вырожденной гиперполосы Γ_m ранга τ.

Т е о р е м а [2.I] . На всякой вырожденной гиперполосе Γ_m существует к-оснащение.

Д о к а з а т е л ь с т в о . На основании соотношений (I.I3) и (I.I4) получаем, что при изменении оснащения подтензор b^{0}_{1mk/i_2} меняется по формуле

$$b^{0}_{1mk//i_2}=b^{0}_{1mk/i_2}-h_{i_2}b^{0}_{1mk}.$$

Умножив это равенство на $\frac{1}{\tau+2}b^{mk}_{0}$ и свернув по m и k, приходим к выводу :

$$\overline{K}_{i_2}=K_{i_2}-\frac{\tau}{\tau+2}h_{i_2} \qquad (2.4)$$

Отсюда, при $h_{i_2}=\frac{\tau+2}{\tau}K_{i_2}$ получаем $\overline{K}_{i_2}=0$, то есть новое оснащение является к-оснащением.

Т е о р е м а [2.2]. Для того, чтобы данное оснащение вырожденной гиперполосы Γ_m было к-оснащением, необходимо и достаточно, чтобы индуцированная им связность Γ^{h}_{ij} удовлетворяла условию:

$$\Gamma^{s_1}_{i_2s_1}=0. \qquad (2.5)$$

---

*).См. [5] ,§ I ,теорема [I.5] .

**).См. [6] .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из выражения ковариантной производной тензора b^{0}_{1ij} относительно связности Γ_i следует, что

$$b^{0}_{1i_2j/k}=-\Gamma^{s}_{i_2k}b^{0}_{1sj}$$

Учитывая (I.I6), из полученного соотношения находим :

$$(\tau+2)K_{i_2}=-\Gamma^{s}_{i_2k}\Delta^{k}_{s}=-\Gamma^{s_1}_{i_2s_1}$$

Значит, равенства $K_{i_2}=0$ и $\Gamma^{s_1}_{i_2s_1}=0$ эквивалентны, что и доказывает теорему.

Т е о р е м а [2.3] . Для того, чтобы некоторое оснащение M-конической развертывающейся гиперполосы было к-оснащением, необходимо и достаточно, чтобы оно индуцировало к-связность.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Умножив (I.20) на b^{1ij}_{0} и свернув по i и j , получим $\varphi_{k_2}=\frac{\tau+2}{\tau}K_{k_2}$. Поэтому для M-конических развертывающихся гиперполос при любом оснащении выполняется равенство

$$b^{0}_{1ij/k_2}=\frac{\tau+2}{\tau}K_{k_2}b^{0}_{1ij} \qquad (2.6)$$

Из леммы [I.2] и соотношения (2.6) вытекает справедливость доказываемого предложения.

Т е о р е м а [2.4] .Для всех к-оснащений нормали второго рода, рассматриваемые в одной и той же точке базисной поверхности B_m вырожденной гиперполосы пересекают соответствующую плоскую образующую по одной и той же $(m-\tau-1)$ — мерной плоскости (Эта плоскость называется к-плоскостью).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из (2.4) следует, что при переходе от одного к-оснащения к другому $h_{i_2}=0$. Подставляя $h_{i_2}=0$ в (I.II) получаем :

$$M^{\alpha}_{1//i_2}=M^{\alpha}_{1/i_2}. \qquad (2.7)$$

Точки M^{α}_{1/i_2} определяют $(m-\tau-1)$-мерную плоскость, по которой нормаль второго рода пересекается с плоской образующей, проходящей через рассматриваемую точку базисной поверхности B_m гиперполосы.

Соотношение (2.7) показывает, что все к-оснащения индуцируют в рассматриваемой точке базисной поверхности гиперполосы одну и ту же плоскость (к-плоскость). Теорема доказана.

Итак, каждой точке базисной поверхности гиперполосы соответствует некоторая к-плоскость. Следовательно, всякой линии общего положения базисной поверхности B_m соответствует $(m-1)$-мерная поверхность B_{m-1}, вложенная в B_m. Поверхность B_{m-1}, состоящая из τ-параметрического семейства $(m-\tau-1)$-мерных плоских образующих (к-плоскостей), называется подповерхностью, индуцированной данной линией общего положения на B_m.

Следующие предложения характеризуют геометрическую структуру к-оснащений конических развертывающихся гиперполос с ρ-мерной вершиной ($\rho \le m-\tau-1$).

Теорема [2.5]. Вершина любой конической развертывающейся гиперполосы Γ_m принадлежит всем к-плоскостям.

Доказательство. Пусть $\underset{\tau}{R}{}^{\alpha}_{1}$ ($\tau=1,2,\dots,\rho+1$) линейно независимые постоянные точки, определяющие ρ-мерную вершину развертывающейся гиперполосы:

$$\underset{\tau}{R}{}^{\alpha}_{1/i} = \underset{\tau}{e}_i \underset{\tau}{R}{}^{\alpha}_{1}. \qquad (2.8)$$

С другой стороны имеем:

$$\underset{\tau}{R}{}^{\alpha}_{1} = \underset{\tau}{\lambda} M^{\alpha}_{1} + \underset{\tau}{u}{}^{s} M^{\alpha}_{1/s}, \qquad (2.9)$$

где $\underset{\tau}{u}{}^{s}$ — линейно независимые контравариантные к-векторы. Дифференцируя (2.9) и принимая во внимание (1.3), (2.8), (2.9), (1.21), $\overset{\circ}{b}_{1ij} u^j = 0$, получаем:

$$\underset{\tau}{e}_i \underset{\tau}{\lambda} - \underset{\tau}{\lambda}_{/i} - \underset{\tau}{u}{}^{s} p_{si} = 0,$$

$$\underset{\tau}{e}_i \underset{\tau}{u}{}^{s} - \underset{\tau}{u}{}^{s}_{/i} - \underset{\tau}{\lambda} \delta^{s}_{i} = 0 \qquad (2.10)$$

Далее, дифференцируя равенство $\overset{\circ}{b}_{1is} \underset{\tau}{u}{}^{s} = 0$, а затем преобразовывая полученное соотношение с помощью (2.10), находим:

$$\overset{\circ}{b}_{1is/t} \underset{\tau}{u}{}^{s} - \underset{\tau}{\lambda} \overset{\circ}{b}_{1it} = 0 \qquad (2.11)$$

Наконец, умножив (2.11) на $\overset{\circ}{b}{}^{1it}$ и свернув по i и t, приходим к равенству

$$K_s \underset{\tau}{u}{}^{s} = \underset{\tau}{\lambda} \tau \qquad (2.12)$$

При произвольном к-оснащении из (2.12) получаем, что $\underset{\tau}{\lambda}=0$. Подставляя $\underset{\tau}{\lambda}=0$ в (2.9), будем иметь

$$\underset{\tau}{R}{}^{\alpha}_{1} = \underset{\tau}{u}{}^{s_2} M^{\alpha}_{1/s_2},$$

то есть вершина конической развертывающейся гиперполосы принадлежит к-плоскостям.

Из доказанной теоремы [2.5] непосредственно вытекают предложения:

Теорема [2.6]. Для того, чтобы данное оснащение M-конической развертывающейся гиперполосы было к-оснащением, необходимо и достаточно, чтобы все $(m-\tau-1)$-мерные плоскости, по которым нормали второго рода этого оснащения пересекают соответствующие плоские образующие, совпадали с вершиной.

Теорема [2.7]. Для того, чтобы подповерхность, индуцированная любой кривой общего положения на базисной поверхности B_m развертывающейся гиперполосы, была конической с ρ-мерной вершиной, необходимо и достаточно, чтобы данная развертывающаяся гиперполоса была конической с ρ-мерной вершиной.

Рассматривая предыдущую теорию для случая $m=n-1$, то есть когда базисная поверхность гиперполосы является вырожденной гиперповерхностью, мы приходим к результатам работы [5], § 3.

§ 3. Полувнутренние и внутренние Δ-оснащения вырожденной гиперполосы.

I. Полувнутреннее Δ-оснащение.

Определение. Оснащение, для которого чебышевский вектор K_i равен нулю, назовем полувнутренним Δ-оснащением вырожденной гиперполосы Γ_m.

Полувнутреннее Δ-оснащение не зависит от произвола $b_0^{1i_2j_2}$, но, вообще говоря, зависит от выбора Δ^i_j. Исключение, например, составляют M-конические развертывающиеся гиперполосы, на которых к-оснащение индуцирует к-связность.

Т е о р е м а [3.1]. Для всякой вырожденной гиперполосы Γ_m существует полувнутреннее Δ-оснащение.

При переходе от одного к-оснащения к другому тензору K_i меняется по закону:
$$\overline{K}_i = K_i + \psi_o^{1h} b^o_{1hi} - h_i \qquad (3.1)$$

Следовательно, h_i и ψ_o^{1h} всегда можно подобрать так, что $\overline{K}_i = 0$. Теорема доказана.

В дальнейшем изложении будем предполагать, что рассматриваемые оснащения являются полувнутренними Δ-оснащениями.

Равенство
$$h_i = \psi_o^{1k} b^o_{1ik}, \qquad (3.2)$$

которое мы получаем из (3.1), характеризует переход от одного полувнутреннего Δ-оснащения к другому полувнутреннему Δ-оснащению. Подставляя полученное равенство в соотношение
$$b^o_{1it//j} = b^o_{1it/j} + \psi_o^{1s} b^o_{1sj} + \psi_o^{1s} b^o_{1st} b^o_{1ij} + \psi_o^{1s} b^o_{1is} b^o_{1tj} -$$
$$- h_j b^o_{1it} - h_i b^o_{1jt} - h_t b^o_{1ij},$$

приходим к выводу :

Т е о р е м а [3.2]. Тензор $b^o_{1ij/k}$ есть инвариант полувнутренних Δ-оснащений.

Из (3.2) находим, что компоненты $\psi_o^{1k_1}$ тензора ψ_o^{1k} (задает новую нормаль первого рода (2.12)) однозначно определяются заданием h_i, а компоненты $\psi_o^{1k_2}$ могут быть выбраны произвольно. Поэтому полувнутреннее Δ-оснащение каждой к-нормализации второго рода ставит в соответствие единственное поле ($n-r$)-мерных направлений, определяемых гиперплоскостями $N^{1k_1}_\alpha$ (это поле называется н о р м а л ь н ы м полем ($n-r$) -мерных направлений *)). Плоскость P_{n-r} нормального поля, как следует из соотношения $N^{1i}_\alpha M^\alpha_{1/k} = \delta^i_k$ **), в данной точке B_m содержит плоскую

---

*) См. [5] , § 4.

**) См. [6] , стр 29.

образующую и, кроме того, соответствующую нормаль первого рода.

О п р е д е л е н и е . Оснащение вырожденной гиперполосы Γ_m ранга r , в каждой точке базисной поверхности B_m которой заданы нормаль второго рода и ($n-r$) -мерная плоскость P_{n-r} нормального поля, называется о б о б щ е н н ы м о с н а щ е н и е м данной гиперполосы.

Если от данного оснащения требуется перейти к полувнутреннему обобщенному Δ-оснащению определенного вида, то достаточно найти либо $\psi_o^{1i_1}$, либо h_i соответствущие этому новому оснащению. Очевидно, два оснащения вырожденной гиперполосы Γ_m ранга r , индуцирующие на ней одно и то же о б о б щ е н н о е оснащение, отличаются друг от друга только положением нормалей первого рода в соответствующих нормальных плоскостях.

2 . Внутренняя Δ-нормализация M-конических развертывающихся гиперполос.

Найдем аналитические условия, характеризующие инвариантное обобщенное оснащение M-конической развертывающейся гиперполосы. Предварительно сформулируем две леммы, необходимые для дальнейших исследований :

Л е м м а [3.3]. Тензор p_{ij} , индуцируемый на M-конической развертывающейся гиперполосе к-оснащением, удовлетворяет условию
$$p_{i_2 j} = 0 \qquad (3.3)$$

Л е м м а [3.4]. Для всякой вырожденной гиперполосы выполняется соотношение
$$m^{1h_1}_{1i_2} = 0 \qquad (3.4)$$

Равенство (3.3) вытекает из теоремы [1.5] , если учесть, что для к-оснащения M-конической развертывающейся гиперполосы $u^{k_1}_{r_2/i} = 0$ ($r_2 = 1,2,\ldots, m-r$) , а равенство (3,4) непосредственно следует из соотношения (1.11).

Так как полувнутреннее оснащение M-конической развертывающейся гиперполосы всегда индуцирует соотношение $\overset{o}{b}_{1i_2j/k}=0$, то все оснащения, рассматриваемые нами в данном параграфе, индуцируют тензор $\overset{o}{b}_{1ij}$, все производные которого удовлетворяют условию:

$$\overset{o}{b}_{1ij_2/k\ell\ldots s}=0 \tag{3.5}$$

Наконец, используя леммы [3.3], [3.4] и соотношения (3.5), (I.IO), (I.8), (I.9), получаем следующее выражение для тензора $\overset{o}{b}_{1ij/k\ell_2}$:

$$\overset{o}{b}_{1ij/k\ell_2}=\overset{o}{b}_{1ij}S_{k\ell_2}+\overset{o}{b}_{1ik}S_{j\ell_2}+\overset{o}{b}_{1jk}S_{i\ell_2}, \tag{3.6}$$

где

$$S_{k\ell_2}=m^{1s}_{o\ell_2}\overset{o}{b}_{1sk}-P_{k\ell_2}.$$

Введем теперь в рассмотрение тензор

$$\Omega^1_{op}=\alpha\mathcal{L}^1_{op}+\beta B^1_{op}-\alpha S^1_{op}, \tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1_{op}&=\overset{o}{b}_{1ij/k\ell}\overset{o}{b}_{1sq/p}\,b^{1is}_o b^{1k\ell}_o b^{1qj}_o,\\ B^1_{op}&=\overset{o}{b}_{1ij/kp}\overset{o}{b}_{1mn/q}\,b^{1mi}_o b^{1nj}_o b^{1qk}_o,\\ S^1_{op}&=\overset{o}{b}_{1ij/ps}\overset{o}{b}_{1mn/q}\,b^{1ik}_o b^{1jn}_o b^{1sq}_o,\end{aligned} \tag{3.8}$$

а α и β — произвольные параметры, не равные одновременно нулю. С помощью соотношений (3.7), (3.3)-(3.6), (2.I) можно получить следующие свойства тензора Ω^1_{op}, индуцированного полувнутренним оснащением на M-конической развертывающейся гиперполосе:

а). Ω^1_{op} не зависит от выбора компонент $b^{1i_2j_2}_o$ тензора b^{1ij}_o,

б). Ω^1_{op} есть к-тензор типа $\left\{\begin{smallmatrix}0\\ b\end{smallmatrix}\right\}_o$, где $b\le$ I.

При изменении полувнутренних оснащений M-конической развертывающейся гиперполосы тензор Ω^1_{op} меняется по формуле:

$$\overline{\Omega}^1_{op}=\Omega^1_{op}+\psi^{1s_1}_o\left[\alpha(\tau+2)\ell_{s_1p}+(\alpha-\beta)\mathcal{J}^1_o\overset{o}{b}_{1ps_1}\right] \tag{3.9}$$

где

$$\ell_{sp}=\overset{o}{b}_{1ij/s}\overset{o}{b}_{1k\ell/p}\,b^{1ik}_o b^{1j\ell}_o,$$

$$\mathcal{J}^1_o=\ell_{sp}b^{1sp}_o.$$

На основании теоремы [3.2] мы утверждаем, что тензоры ℓ_{sp}, $\mathcal{J}^1_o$ и, следовательно, коэффициент при $\psi^{1s_1}_o$ в формуле (3.9) являются инвариантами полувнутренних оснащений M-конической развертывающейся гиперполосы. Кроме того, так как $\overset{o}{b}_{1ij/k}$ — к-тензор типа $\left\{\begin{smallmatrix}0\\ b\end{smallmatrix}\right\}$, где $b\le$ I, то ℓ_{sp} и $\mathcal{J}^1_o$ не зависят от выбора Δ^i_j.

Потребуем, чтобы для нового оснащения имело место равенство $\overline{\Omega}^1_{op}=0$. Тогда мы получаем следующую систему уравнений относительно компонент $\psi^{1s_1}_o$:

$$\Omega^1_{op}+\psi^{1s_1}_o\left[\alpha(\tau+2)\ell_{s_1p}+(\alpha-\beta)\mathcal{J}^1_o\overset{o}{b}_{1s_1p}\right]=0 \tag{3.10}$$

Эта система имеет одно и только одно решение, если

$$\left|\alpha(\tau+2)\ell_{s_1p}+(\alpha-\beta)\mathcal{J}^1_o\overset{o}{b}_{1ps_1}\right|\ne 0, \tag{3.11}$$

то есть оснащение, удовлетворяющее условию $\overline{\Omega}^1_{op}=0$, существует. Причем, как видно из равенства (3.IO), двух таких оснащений построить нельзя.

Т е о р е м а [3.5]. Если для M-конической развертывающейся гиперполосы Γ_m при полувнутреннем оснащении имеет место соотношение (3.II), то при фиксированных параметрах α,β на этой гиперполосе существует единственное обобщенное оснащение, не зависящее от исходного выбора Δ^i_j, и от произвола $b^{1i_2j_2}_o$ и удовлетворяющее равенствам

$$K_i=0,\ \Omega^1_{op}=0. \tag{3.12}$$

Обощенное оснащение, определенное в теореме [3.5] назовем в н у т р е н н и м о б о б щ е н н ы м о с н а щ е н и е м (α,β) M-конической развертывающейся гиперполосы, удовлетворяющей при полувнутреннем оснащении соотношению (3.II). Из определения обощенного оснащения видно, что оснащения индуцирующие одно и то же внутреннее обобщенное оснащение (α,β), отличаются друг от друга только положением нормалей первого рода во внутренних нормальных плоскостях $P_{n-\tau}$. Для краткости оснащения, удовлетворяющие условиям (3.12) при фиксированных α и β, будем называть Ω-оснащениями (α,β).

Следует отметить, что проведенные рассуждения не проходят в случае, когда базисной поверхностью гиперполосы служит гиперповерхность второго порядка, а также для вырожденных р а з в е р т ы в а ю щ и х с я гиперполос ранга один. Для этих гиперполос полувнутреннее оснащение, как легко показать, индуцирует нулевой тензор $\overset{0}{b}_{1ij/k}$.

Перейдем теперь к построению специальной нормали первого рода во внутренней нормальной плоскости P_{n-r}. Для этой цели предварительно выясним, как меняются производные второго, третьего порядков тензора $\overset{0}{b}_{1ij}$ при изменении Ω-оснащений.

Т е о р е м а [3.6]. Тензор $\overset{0}{b}_{1ij/kp}$ есть инвариант Ω-оснащений (α,β).

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании теоремы [3.2] и формулы (3.2) тензор $\overset{0}{b}_{1ij/kp}$ при изменении полувнутренних оснащений меняется по формуле:

$$\overset{0}{b}_{1ij//kp}=\overset{0}{b}_{1ij/kp}-\overset{0}{b}_{1is}\psi_0^{1S}\overset{0}{b}_{1pj/k}+\overset{0}{b}_{1ip}\psi_0^{1S}\overset{0}{b}_{1Sj/k}-\overset{0}{b}_{1jS}\psi_0^{1S}\overset{0}{b}_{1ip/k}-$$

$$-\overset{0}{b}_{1pS}\psi_0^{1S}\overset{0}{b}_{1ij/k}+\overset{0}{b}_{1jp}\psi_0^{1S}\overset{0}{b}_{1iS/k}-\overset{0}{b}_{1Sk}\psi_0^{1S}\overset{0}{b}_{1ij/p}+\overset{0}{b}_{1kp}\psi_0^{1S}\overset{0}{b}_{1ij/S}. \qquad (3.13)$$

С другой стороны, при переходе от одного Ω-оснащения к другому $\psi_0^{1S_1}=0$. Учитывая, что $\psi_0^{1S_1}=0$ и $\overset{0}{b}_{1ij/k}$ – к-тензор типа $\left\{\begin{smallmatrix}0\\ b\end{smallmatrix}\right\}$, где $b\le 1$, из (3.13) находим: $\overset{0}{b}_{1ij//kl}=\overset{0}{b}_{1ij/kl}$.

Теорема доказана.

Из теоремы [3.6] и соотношений (3.5), $\psi_0^{1S_1}=0$, $h_i=0$ следует, что для Ω-оснащений (α,β) имеет место равенство

$$\overset{0}{b}_{1ij//kpt}=\overset{0}{b}_{1ij/kpt}+\psi_0^{1S_2}\overset{0}{b}_{1pt}\overset{0}{b}_{1ij/kS_2},$$

которое в силу (3.6) можно представить в следующем виде:

$$\overset{0}{b}_{1ij//kpt}=\overset{0}{b}_{1ij/kpt}+\psi_0^{1S_2}\overset{0}{b}_{1pt}\overset{0}{b}_{1(ij}S_{k)S_2}. \qquad (3.14)$$

Из (3.14) получаем, что все подтензоры типа $\left\{\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right\}$ тензора $\overset{0}{b}_{1ij/kpt}$ являются инвариантами Ω-оснащений (α,β), то есть

$$\overset{0}{b}_{1ij//kpt}=\overset{0}{b}_{1ij/kpt}, \qquad (3.15)$$

если хотя бы один латинский индекс принимает значение большее r.

Рассмотрим тензор

$$\Pi_{oop}^{11}=\overset{0}{b}_{1ij/kpmn}\overset{0}{b}_{1tq/s}b_0^{1km}b_0^{1it}b_0^{1jq}b_0^{1nS}. \qquad (3.16)$$

Так как для Ω-оснащенной M-конической развертывающейся гиперполосы $\overset{0}{b}_{1ij_2/k}=0$, $\overset{0}{b}_{1ij_2/kpmn}=0$, то тензор Π^{11} не зависит от компонент $b_0^{1i_2j_2}$, то есть вполне определяется заданным тензором Δ_j^i.

При изменении Ω-оснащений (α,β) подтензор $\Pi_{oop_2}^{11}$ меняется по закону:

$$\overline{\Pi}_{oop_2}^{11}=\Pi_{oop_2}^{11}+\psi_0^{1S_2}\overset{0}{b}_{1ij/tp_2S_2}\overset{0}{b}_{1lq/n}b_0^{1il}b_0^{1jq}b_0^{1tn}. \qquad (3.17)$$

Очевидно, коэффициент при $\psi_0^{1S_2}$ в (3.17) не зависит от выбора Δ_j^i и на основании (3.15) является инвариантом Ω-оснащений (α,β) M-конической развертывающейся гиперполосы.

Т е о р е м а [3.7]. Для всякой M-конической развертывающейся гиперполосы, на которой Ω-оснащение (α,β) индуцирует невырожденную матрицу

$$\left\| \overset{0}{b}_{1ij/tp_2S_2}\overset{0}{b}_{1lq/n}b_0^{1il}b_0^{1jq}b_0^{1tn} \right\| \qquad (3.18)$$

существует единственное Ω-оснащение (α,β), для которого

$$\overline{\Pi}_{oop_2}^{11}=0. \qquad (3.19)$$

Ω-оснащение (α,β), удовлетворяющее условию (3.19), назовем в н у т р е н н и м Δ-о с н а щ е н и е м (α,β,Π) всякой M-конической развертывающейся гиперполосы, на которой Ω-оснащение (α,β) индуцирует невырожденную матрицу (3.18).

3°. Внутреннее Δ-оснащение вырожденной гиперполосы, не являющейся M-конической развертывающейся гиперполосой.

Введем в рассмотрение тензор

$$Y_{os}^{1}=\Phi_{os}^{1}-\frac{(r+2)}{2}\psi_{os}^{1}, \qquad (3.20)$$

где
$$\left.\begin{aligned}\Phi^{1}_{os} &= b^{o}_{1ij/k\ell}\, b^{o}_{1tm/n}\, \Delta^{i}_{s}\Delta^{j}_{p}\Delta^{k}_{q}\Delta^{t}_{z}\, b^{1\ell p}_{o}\, b^{1qm}_{o}\, b^{1nz}_{o},\\ \Psi^{1}_{os} &= b^{o}_{1ij/k\ell}\, b^{o}_{1tm/n}\, \Delta^{\ell}_{s}\Delta^{i}_{p}\Delta^{j}_{q}\Delta^{t}_{z}\, b^{1kp}_{o}\, b^{1qm}_{o}\, b^{1nz}_{o}.\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

Легко видеть, что Y^{1}_{os} не зависит от компонент $b^{1i_2j_2}_{o}$, то есть вполне определяется заданием Δ^{i}_{j}, и кроме того, $Y^{1}_{os_2} = 0$.

При изменении полувнутренних Δ-оснащений z-вырожденной гиперполосы Γ_m тензор Y^{1}_{os} меняется по формуле :

$$\overline{Y}^{1}_{os} = Y^{1}_{os} + \psi^{1t_1}_{o} W_{t_1 s}, \tag{3.22}$$

где

$$\begin{aligned} W_{t_1 s} = {} & \frac{z}{2}\, b^{o}_{1hm/n}\, b^{o}_{1\ell j/k}\, b^{o}_{1st_1}\, \Delta^{j}_{p_1}\Delta^{k}_{q_1}\Delta^{h}_{z_1}\, b^{1\ell p_1}_{o}\, b^{1mq_1}_{o}\, b^{1nz_1}_{o} + \\ & + \frac{z}{2}\, b^{o}_{1hm/n}\, b^{o}_{1ij/\ell}\, \Delta^{m}_{t_1}\Delta^{i}_{s}\Delta^{j}_{p}\Delta^{h}_{z_1}\, b^{1\ell p_1}_{o}\, b^{1nz_1}_{o} + \\ & + z\, b^{o}_{1hm/n}\, b^{o}_{1i\ell/k}\, \Delta^{\ell}_{t_1}\Delta^{i}_{s}\Delta^{k}_{q_1}\Delta^{h}_{z_1}\, b^{1mq_1}_{o}\, b^{1nz_1}_{o} - \\ & - \frac{z+2}{2}\, b^{o}_{1hm/n}\, b^{o}_{1it_1/k}\, \Delta^{m}_{s}\Delta^{i}_{p_1}\Delta^{h}_{z_1}\, b^{1kp_1}_{o}\, b^{1nz_1}_{o}. \end{aligned}$$

Матрица $\| W_{t_1 s} \|$ в силу теоремы [3.2] является инвариантом полувнутренних Δ-оснащений. Кроме того, $W_{t_1 s_2} = 0$.

Т е о р е м а [3.8] Все полувнутренние Δ-оснащения, удовлетворяющие условию

$$Y^{1}_{os} = 0, \tag{3.23}$$

индуцируют на вырожденной гиперполосе с невырожденной при полувнутреннем Δ-оснащении матрицей $\| W_{t_1 s} \|$ одно и тоже обобщенное оснащение.

Далее, рассмотрим тензор

$$H^{1}_{os} = b^{o}_{1ij/kn}\, b^{o}_{1\ell m/s}\, \Delta^{i}_{p}\Delta^{j}_{q}\Delta^{k}_{t}\, b^{1p\ell}_{o}\, b^{1qm}_{o}\, b^{1tn}_{o}, \tag{3.24}$$

который вполне определяется заданием тензора Δ^{i}_{j}. При полувнутренних Δ-оснащениях удовлетворяющих условию (3.23), имеем

$$\overline{H}^{1}_{os_2} = H^{1}_{os_2} + (z+2)\,\psi^{1t_2}\, \ell_{t_2 s_2} \tag{3.25}$$

Т е о р е м а [3.9] Для каждой z-вырожденной гиперполосы, на которой полувнутреннее Δ-оснащение индуцирует невырожденные матрицы $\| W_{t_1 s_1} \|$ и $\| \ell_{t_2 s_2} \|$, существует единственное полувнутреннее Δ-оснащение, удовлетворяющее условиям

$$Y^{1}_{os} = 0, \quad H^{1}_{os} = 0. \tag{3.26}$$

Полувнутреннее Δ-оснащение, удовлетворяющее условиям (3.26), назовем в н у т р е н н и м Δ-оснащением всякой вырожденной гиперполосы ранга z, на которой полувнутреннее Δ-оснащение индуцирует невырожденные матрицы $\| W_{t_1 s_1} \|$ и $\| \ell_{t_2 s_2} \|$.

Применяя полученную теорию к частному виду вырожденных гиперполос – к гиперповерхностям Γ_{n-1} ($m = n-1$), мы приходим к результатам работы [5], §4.

Л и т е р а т у р а.

1. Атанасян Л.С., Оснащенные многообразия частного вида в многомерном аффинном пространстве. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, т.9 (1952г), 351-410.
2. Атанасян Л.С., К теории оснащенных поверхностей многомерного проективного пространства. Ученые записки МГПИ им. В.И.ЛЕНИНА, т.108, вып.2, 1957, 3-44.
3. Воронцова Н.С., Некоторые вопросы теории оснащенных гиперповерхностей многомерного проективного пространства. Сборник статей по математике и методике преподавания математики в ср.школе Челябинского пединститута, т.5, вып.3, 1960, 286-296.
4. Атанасян Л.С. и Воронцова Н.С., Специальные нормализации вырожденных гиперповерхностей (n+1)-мерного проективного пространства. Волжский математический сборник, вып.I, Куйбышев, 1963.
5. Атанасян Л.С. и Воронцова Н.С., Построение инвариантного оснащения z-вырожденной гиперповерхности многомерного проективного пространства. .Ученые записки МГПИ им В.И.ЛЕНИНА, 1965, 243, 5-28.

6. Попов Ю.И., Сферические гиперполосы многомерного проективного пространства P_n. Ученые записки Калининградского государственного университета, 1969, вып. I, 27-57.

7. Попов Ю.И., К теории оснащенных регулярных гиперполос многомерного проективного пространства. Тезисы докладов 4 Всесоюзной Межвузовской конференции, Тбилиси, 1969, 209-210.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Б.А. АНДРЕЕВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ ПАР ФИГУР В ТОЧЕЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Пусть F -пара фигур ранга N [I], состоящая из невырожденной гиперквадрики q n-мерного проективного пространства P_n и неинцидентной ей точки p. Исследуется биективное дифференцируемое отображение φ пространства этой пары $R(F)$ в точечное проективное N-мерное пространство P_N. Найден основной объект отображения, построены и геометрически охарактеризованы различные поля геометрических объектов, охватываемые полем основного объекта.

§ I. Построение системы фундаментальных объектов отображения.

Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $\tau=\{\bar{\tau}_0,\bar{\tau}_1,\dots,\bar{\tau}_n\}$, а пространство P_N к реперу $R=\{\bar{R}_0,\bar{R}_1,\dots,\bar{R}_N\}$. Деривационные формулы реперов τ и R имеют соответственно вид:

$$d\bar{\tau}_{i'}=\omega_{i'}^{j'}\bar{\tau}_{j'} \qquad (i',j',k',\dots=0,1,\dots,n), \qquad (1.1)$$

$$d\bar{R}_{\mathcal{J}'}=\Omega_{\mathcal{J}'}^{\varkappa'}\bar{R}_{\varkappa'} \qquad (\mathcal{J}',\varkappa',\mathcal{L}',\dots=0,1,\dots,N), \qquad (1.2)$$

где формы Пфаффа $\omega_{i'}^{j'}$, $\Omega_{\mathcal{J}'}^{\varkappa'}$ подчинены структурным уравнениям Картана:

$$\mathcal{D}\omega_{i'}^{j'}=\omega_{i'}^{k'}\wedge\omega_{k'}^{j'}, \quad \mathcal{D}\Omega_{\mathcal{J}'}^{\varkappa'}=\Omega_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{L}'}\wedge\Omega_{\mathcal{L}'}^{\varkappa'}. \qquad (1.3)$$

Поместим нулевую вершину $\bar{\tau}_0$ репера τ в точку p, вершины $\bar{\tau}_i$ ($i,j,k,\dots=1,2,\dots,n$) в полярную гиперплоскость π точки p относительно гиперквадрики q.

При таком расположении вершин репера уравнение гиперквадри-