УДК 514.75

В.С. Малаховский

(Российский государственный университет им. Иммануила Канта)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ КВАДРИК ДАРБУ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется двупараметрическое семейство (конгруэнция) D_h^0 квадрик Дарбу Q_h индекса $h \neq 0$ гладкой нелинейчатой поверхности S, имеющее на каждой квадрике $Q_h \in D_h^0$ фокальную точку Φ_1^h на первой директрисе Вильчинского A_0A_3, отличную от четырехкратной фокальной точки $A_0 \in S$.

Доказано, что конгруэнции D_h^0 существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа. Фокальные точки Φ_2^h, Φ_3^h, Φ_4^h квадрики Q_h, не совпадающие с A_0, обладают следующими свойствами: прямая $\Phi_3^h\ \Phi_4^h$ пересекает вторую директрису Вильчинского A_1A_2 поверхности S в ее фокусе $M_2 = A_1 - A_2$; прямая $\Phi_2^h\ N_1^h$, где N_1^h — четвертая гармоническая точке M_2 относительно пары точек Φ_3^h, Φ_4^h, пересекает вторую директрису Вильчинского в ее фокусе $M_1 = A_1 + A_2$, а первую директрису Вильчинского в точке $M^h = h(4h+1)A_0 + A_3$.

§1. Конгруэнции квадрик Дарбу.

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 гладкую нелинейчатую поверхность S, отнесенную к реперу С.П. Финикова $\{ A_\alpha \}$ $(\alpha, \beta, \quad \gamma = 0, 1, 2, 3)$. Деривационные формулы $dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta$ такого репера определяются матрицей (см. [1, с. 4—7]):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} p_k \omega^k & \omega^1 & \omega^2 & 0 \\ a_k \omega^k & \frac{1}{6}(p_2\omega^2 - p_1\omega^1) & \omega^1 & \omega^2 \\ b_k \omega^k & \omega^2 & \frac{1}{6}(p_1\omega^1 - p_2\omega^2) & \omega^1 \\ b_2\omega^1 + a_1\omega^2 & b_k \omega^k & a_k \omega^k & -\frac{1}{2} p_k \omega^k \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

где $\omega^i \stackrel{\text{def}}{=} \omega_o^i \quad (i, j, k = 1,2).$ (1.2)

Уравнение квадрики Дарбу Q_h индекса h в репере С.П. Финикова имеет вид [2, с. 75]:

$$F_h \stackrel{\text{def}}{=} x^1 x^2 - x^0 x^3 + h(x^3)^2 = 0. \quad (1.3)$$

Обозначим:

$$m_1 = hp_1 + b_2, \quad m_2 = hp_2 + a_1. \quad (1.4)$$

Используя формулы

$$dx^\alpha = -x^\beta \omega_\beta^\alpha,$$

находим:

$$-dF_h = F_{h,k}\omega^k, \quad (1.5)$$

где

$$F_{h,i} \stackrel{\text{def}}{=} (x^i)^2 + 2hx^j x^3 - m_i (x^3)^2. \quad (1.6)$$

Здесь и в дальне йшем $i, j, k=1,2$; $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится. Символом D_h обозначим конгруэнцию квадрик Дарбу.

Из (1.3), (1.5) следует, что фокальные точки квадрики Дарбу $Q_h \in D_h$ определяются системой алгебраических уравнений

$$F_h = 0, \quad F_{h,1} = 0, \quad F_{h,2} = 0. \tag{1.7}$$

Конгруэнция квадрик Ли (случай h=0) подробно рассмотрена в [3]. В данной работе исследуются конгруэнции квадрик Дарбу ненулевого индекса, т.е. $h \neq 0$.

def

Теорема 1.1. *Поверхность* $S = (A_0)$ *является четырехкратной фокальной поверхностью конгруэнции* D_h. *Четыре фокальные точки* Φ_α^h *квадрики Дарбу* $Q_h \in D_h$, *отличные от точки* A_0, *определяются формулой*

$$\Phi_\alpha^h = \xi_\alpha^0 A_0 + \xi_\alpha^1 A_1 + \xi_\alpha^2 A_2 + A_3, \tag{1.9}$$

где $(\xi_\alpha^0, \xi_\alpha^1, \xi_\alpha^2)$ — *решения системы уравнений:*

$$\begin{cases} \xi^0 = \xi^1\xi^2 + h, \quad (\xi^1)^2 + 2h\xi^2\xi^3 - m_1 = 0, \\ (\xi^1)^4 - 2m_1(\xi^1)^2 + 8h^3\xi^1 + m_1^2 - 4h^2 m_2 = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Доказательство. Из (1.7) следует

$$(x^3)^2((x^0 - hx^3)^2 - (m_1x^3 - 2hx^2)(m_2x^3 - 2hx^1)) = 0. \tag{1.11}$$

Уравнения

$$x^1x^2 = 0, \; (x^1)^2 = 0, \; (x^2)^2 = 0, \quad (x^3)^2 = 0 \tag{1.12}$$

определяют четырехкратную фокальную точку A_0.

Пусть $x^3 \neq 0$. Обозначим

$$\xi^0 = \frac{x^0}{x^3}, \quad \xi^1 = \frac{x^1}{x^3}, \quad \xi^2 = \frac{x^2}{x^3}. \tag{1.13}$$

Приравнивая нулю второй множитель уравнения (1.11) и учитывая (1.7), (1.13), получим систему (1.10), определяющую фокальные точки Φ_α^h.

§2. Конгруэнции D_h^0

Определение 2.2. *Конгруэнцией* D_h^0 *называется конгруэнция* D_h *с фокальными точками* Φ_1^h*, которые не совпадают с* A_0 *на первой директрисе Вильчинского* A_0A_3.

Теорема 2.1. *Конгруэнции* D_h^0 *существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.*

Доказательство. Первая директриса Вильчинского пересекает квадрику Дарбу (1.3) в точке A_0 и точке

$$\Phi_1^h = hA_2 + A_3 \quad (h \neq 0). \tag{2.1}$$

Из (1.7) следует, что точка Φ_1^h тогда и только тогда является фокальной точкой квадрики $Q \in D_h$, когда

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 0. \tag{2.2}$$

Обозначим

$$a_2 = a. \tag{2.3}$$

Учитывая (1.4), (2.2), (2.3), приводим систему уравнений Пфаффа конгруэнции D_h^0 к виду:

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0,\ \omega_0^0 + \omega_3^3 = 0,\ \ \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0,\ \omega_i^j = \omega^i,\ \omega_i^3 = \omega^j, \\ \omega_3^i = \omega_j^0,\ 2\omega_0^0 = p_k\omega^k,\ 6\omega_2^2 = p_1\omega^1 - p_2\omega^2, \\ \omega_i^0 = -hp_j\omega^i + a\omega^j,\ \ \omega_3^0 = 2h\omega_3^3. \end{cases} \tag{2.4}$$

Осуществляя четырехкратное продолжение системы (2.4), получим:

$$\begin{cases} dp_i = p_{ii}\omega^i + (3 - 6a - \frac{1}{3}p_i p_j)\omega^j, \\ da + (hp_{22} + ap_1 + \frac{2}{3}hp_2^2)\omega^1 + (hp_{11} + ap_2 + \frac{2}{3}hp_1^2)\omega^2, \\ dp_{11} = s\omega^1 + (6hp_{22} + 4hp_2^2 + 6ap_1 - \frac{2}{3}p_2 p_{11})\omega^2, \\ dp_{22} = (6hp_{11} + 4hp_1^2 + 6ap_2 - \frac{2}{3}p_1 p_{22})\omega^1 + \\ + (\frac{8}{9}(p_1^3 - p_2^3) + \frac{8}{3}(p_1 p_{11} - p_2 p_{22}) + s)\omega^2, \\ ds = s_1\omega^1 + s_2\omega^2, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$(3a + 18h^2 + 4)(\frac{2}{3}(p_2^3 - p_1^3) + p_2 p_{22} - p_1 p_{11}) = 0, \tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned} s_1 &= 36h^2 p_{22} + 24h^2 p_2^2 + 24hp_1 + 10ap_{22} - 8hp_2 p_{11} - 4ap_2^2 - \\ &- p_1 s - \frac{16}{3}hp_1^2 p_2 - 12hap_1 - 2p_{22}, \\ s_2 &= 36h^2 p_{11} + 24h^2 p_1^2 + 24hp_2 - 6ap_{11} + 8hp_1 p_{22} - \\ &- 4ap_1^2 - \frac{11}{3}p_2 s - \frac{16}{3}p_2^2 p_{22} - 12hap_2 - \frac{8}{3}p_{22}^2 - \frac{8}{9}p_2^4. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Анализируя алгебраическое уравнение (2.6), убеждаемся, что при

$$p_1 = p_2 \overset{\text{def}}{=} p \tag{2.8}$$

оно обращается в тождество. Действительно, из условий (2.8), (2.5) следует:

$$p_{11} = p_{22} = 3 - 6a - \frac{1}{3}p^2. \tag{2.9}$$

Если же

$$p_1 \neq p_2, \tag{2.10}$$

то последовательное дифференцирование каждого уравнения (2.6) с учетом (2.4), (2.5) приводит к 2^k новым соотношениям на инварианты p_i, a, p_{ii}, s, где k — число дифференцирований.

Только при нулевых значениях этих инвариантов все данные соотношения обращаются в тождества. Но это противоречит неравенству (2.10). Следовательно, возможен только случай (2.8). Конгруэнция D_h^0 определяется следующей вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа:

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0,\ \omega_0^0 + \omega_3^3 = 0,\quad \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0,\quad \omega_i^j = \omega^i,\quad \omega_i^3 = \omega^j, \\ \omega_3^i = \omega_j^0,\ 2\omega_0^0 = p(\omega^1 + \omega^2),\ 6\omega_2^2 = p(\omega^1 - \omega^2),\ \omega_3^0 = 2h\omega_3^3, \\ \omega_i^0 = -hp\omega^i + a\omega^j,\quad dp = (3 - 6a - \frac{1}{3}p^2)(\omega^1 + \omega^2), \\ da = (6ah - 3h - ap - \frac{1}{3}hp^2)(\omega^1 + \omega^2). \end{cases} \tag{2.11}$$

Теорема доказана.

Из (2.11), (2.8) следует, что

$$p \neq 0. \tag{2.12}$$

Используя формулы (2.1), (2.11), (1.10), находим фокальные точки Φ_α^h квадрик Дарбу $Q_h \in D_h^0$, не совпадающие с четырехкратной фокальной точкой $A_0 \in S$:

$$\begin{gathered} \Phi_1^h = hA_0 + A_3,\ \Phi_2^h = h(4h+1)A_0 - 2hM_1 + A_3, \\ \Phi_3^h = h(4h+1)A_0 + h(M_1 + i\sqrt{3}M_2) + A_3, \\ \Phi_4^h = h(4h+1)A_0 + h(M_1 - i\sqrt{3}M_2) + A_3, \end{gathered} \tag{2.13}$$

где

$$M_1 = A_1 + A_2,\ M_2 = A_1 - A_2 \qquad (2.14)$$

— фокусы луча A_1A_2 конгруэнции вторых директрис Вильчинского.

Обозначим:

$$M^h = h(4h+1)A_0 + A_3,\ N_1^h = \frac{1}{2}(\Phi_3^h + \Phi_4^h),\ \ N_2^h = \frac{1}{2}(\Phi_3^h - \Phi_4^h). \quad (2.15)$$

Из (2.13), (2.15) следует:

$$N_1^h = M^h + hM_1,\ \ N_2^h = ih\sqrt{3}M_2, \qquad (2.16)$$

$$\Phi_2^h = M^h + 2hM_1,\ (M_2N_1^h;\ \Phi_3^h\Phi_4^h) = -1, \qquad (2.17)$$

$$M^h = \Phi_2^h M_1 \cap A_0A_3,\ M_2 = \Phi_3^h\Phi_4^h \cap A_1A_2. \qquad (2.18)$$

Приходим к следующим результатам:

Теорема 2.2. *Прямая, проходящая через две фокальные точки* Φ_3^h, Φ_4^h *квадрики* $Q_h \in D_h^0$ *, пересекается со второй директрисой Вильчинского в ее фокусе* M_2.

Теорема 2.3. *Прямая, проходящая через фокальную точку* Φ_2^h *квадрики* $Q_h \in D_h^0$ *и четвертую гармоническую* N_1^h *точке* M_2 *относительно фокальных точек* Φ_3^h *и* Φ_4^h*, пересекается со второй директрисой Вильчинского в ее фокусе* M_1.

Из (2.18) следует простая геометрическая характеристика инвариантной точки M^h : это — точка пересечения прямой $\Phi_2^h M_1$ с первой директрисой Вильчинского A_0A_3.

Анализируя формулы (2.13), убеждаемся, что при фиксации точки $A_0 \in S$ фокальные точки Φ_1^h всех квадрик пучка Дарбу пробегают первую директрису Вильчинского A_0A_3 , а фокальные точки Φ_2^h — кубику

$$2(x^1)^2x^3 - x^1x^3 - 2x^0 = 0, \quad x^1 - x^2 = 0. \qquad (2.19)$$

Список литературы

1. *Малаховский В.С.* Конгруэнции и комплексы коник, порожденные проективной сферой // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2005. Вып. 36. С. 65—74
2. *Фиников С.П.* Проективно-дифференциальная геометрия // ОНТИ. М.; Л., 1937.
3. *Малаховский В.С.* Конгруэнции линейчатых квадрик в трехмерном проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1977. Вып. 8. С. 32—38.

V. Malakhovsky

ABOUT ONE CLASS OF CONGRUENCES OF DARBOUX'S QUADRICS

In three-dimensional projective space P_3 the congruence D_h of Darboux's quadrics Q_h of index $h \neq 0$ of the smooth nonlinear surface S is considered. A special class $D_h^0 \subset D_h$ for which one of the focal points $\Phi_1^h \notin S$ of the quadric $Q_h \in D_h^0$ is on the first directrix of Wilczynski, is investigated in detail/ It is proved that congruences D_h^0 are defined by the total integrable system of Pfaffian's equations. Some geometrical properties of congruences D_h^0 are established.

УДК 514.75

В.С. Малаховский

(Российский государственный университет им. Иммануила Канта)