1. *Попов Ю.И. Столяров А.В.* Специальные классы регулярных гиперполос. Калининград, 1992.
2. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос. Калининград, 1983.
3. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

A. Eliseeva

TANGENT EQUIPPED HYPERSTRIPS H_m IN THE AFFINE SPACE A_n

Tangent equipped hyperstrips in the affine space are investigated. Fields of equipping planes generates adjoint field of planes aboute asimptotic bunch of tensors for the hyperstrip. Bunches of Blaschke's normals of the 1-st kind are adjoined in the interior manner. Two biectios Bompiani – Pantasi are determined between normals of the 1-st and 2-nd kind. Interior affine connections of hyperstrip and normal characteristical center-affine connection are introduced. These connection curvature tensors are found. The sings of connection equiaffinety are cleared up.

УДК 514.75

О.М. Жовтенко

(Калининградский государственный университет)

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ГРУППОВЫЕ СВЯЗНОСТИ СЕМЕЙСТВА ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В проективном пространстве рассмотрено семейство плоскостей, причем размерности семейства и плоскости произвольны. С помощью способа Лаптева задана групповая связность в расслоении, ассоциированном с семейством. Групповая связность содержит проективную связность. Показано, что в случае неголономности пространства параметров объект кривизны проективной связности является тензором лишь в совокупности с объектом проективной связности и фундаментальным объектом 1-го порядка семейства. Произведено оснащение Бортолотти семейства плоскостей и доказано, что оно индуцирует 2 типа групповой связности в ассоциированном расслоении. Найдены условия совпадения этих типов.

Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному реперу $\{A, A_I\}$, инфинитезимальные перемещения которого имеют вид:

$$dA = \theta A + \omega_I A^I, \ \ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A \ \ \left(I, J, K = \overline{1, n}\right).$$

Инвариантные формы ω^I, ω_I^J, ω_I проективной группы GP(n) удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \left(\delta_J^I \omega_K + \delta_K^I \omega_J\right) \wedge \omega^K, \ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \ D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I.$$

В проективном пространстве P_n исследуем r-мерное семейство B_r ($1 \le r < (m+1)(m-1)$) m-мерных плоскостей L_m ($1 \le m < n$). Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$, помещая вершины A, A_a на плоскость L_m, причем индексы принимают значения: $a, b, c = \overline{1, m}$, $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n}$. Система уравнений семейства B_r в параметрической форме имеют вид:

$$\omega^\alpha = \Lambda_i^\alpha \theta^i, \ \ \omega_a^\alpha = \Lambda_{ai}^\alpha \theta^i. \tag{1}$$

Базисные формы θ^i, заданные в некоторой области r-мерного пространства параметров S_r [1], удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i \ \ \left(i, j, k = \overline{n+1, n+r}\right). \tag{2}$$

Продолжая систему уравнений (1), получаем

$$\Delta\Lambda_i^\alpha - \Lambda_{ai}^\alpha \omega^a = \Lambda_{ij}^\alpha \theta^j, \ \ \Delta\Lambda_{ai}^\alpha - \Lambda_i^\alpha \omega_a = \Lambda_{aij}^\alpha \theta^j.$$

Дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda_{ai}^\alpha = d\Lambda_{ai}^\alpha - \Lambda_{aj}^\alpha \theta_i^j - \Lambda_{bi}^\alpha \omega_a^b + \Lambda_{ai}^\beta \omega_\beta^\alpha.$$

Совокупность функций $\Lambda = \left\{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha\right\}$ является фундаментальным объектом 1-го порядка семейства B_r.

Дифференцируя уравнения (2) внешним образом и применяя обобщенную лемму Картана [2], найдем

$$D\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \theta^k \wedge \theta_{jk}^i, \ \ \theta_{jk}^i \wedge \theta^j \wedge \theta^k = 0.$$

Если пространство параметров S_r голономно, то формы θ_{jk}^i симметричны по нижним индексам, если же S_r -неголономно [3], то они несимметричны по нижним индексам.

С семейством B_r ассоциируется главное расслоение $G_s(B_r)$ со структурными уравнениями (2) и следующими:

$$D\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a + \theta^i \wedge \omega_i^a, \quad D\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b + \theta^i \wedge \omega_{ai}, \tag{3}$$

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \left(\delta_b^a \omega_c + \delta_c^a \omega_b\right) \wedge \omega^c + \theta^i \wedge \omega_{bi}^a, \tag{4}$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \delta_\beta^\alpha \omega_a \wedge \omega^a + \theta^i \wedge \omega_{\beta i}^\alpha,$$

$$D\omega_\alpha^a = \omega_\alpha^b \wedge \omega_b^a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^a + \omega_\alpha \wedge \omega^a,$$

$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^a \wedge \omega_a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta,$$

где

$$\omega_i^a = \Lambda_i^\alpha \omega_\alpha^a, \omega_{bi}^a = \Lambda_{bi}^\alpha \omega_\alpha^a - \delta_b^a \Lambda_i^\alpha \omega_\alpha, \omega_{ai} = \Lambda_{ai}^\alpha \omega_\alpha, \omega_{\beta i}^\alpha = -\Lambda_{ai}^\alpha \omega_\beta^a - \Lambda_i^\gamma \left(\delta_\beta^\alpha \omega_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta\right).$$

Базой главного расслоения $G_s(B_r)$ служит семейство B_r (точнее, область пространства параметров S_r), а типовым слоем – s-членная подгруппа стационарности G_s ($s=n^2-nm+m^2+n+m$) плоскости L_m. Расслоение $G_s(B_r)$ содержит подрасслоение проективных реперов (2) – (4) с той же базой, типовым слоем которого является проективная группа $GP(m)\subset G_s\subset GP(n)$, действующая на плоскости L_m.

Групповую связность в ассоциированном расслоении $G_s(B_r)$ зададим по Лаптеву [4] с помощью новых слоевых форм

$$\tilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma_{ai}\theta^i, \tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{bi}^a \theta^i, \tilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma_{ai}\theta^i, \tag{5}$$

$$\tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta i}^\alpha \theta^i, \tilde{\omega}_\alpha^a = \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha i}^a \theta^i, \tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha i}\theta^i. \tag{6}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (5), (6) и применяя теорему Картана-Лаптева [5], получим систему уравнений для компонент объекта групповой связности $\Gamma = \left\{\Gamma_{ai}, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_i^a, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{\alpha i}^a, \Gamma_{\alpha i}\right\}$, содержащего подобъект проективной связности $\Gamma_0 = \left\{\Gamma_{ai}, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_i^a\right\}$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} &\Delta\Gamma_i^a - \Gamma_{bi}^a \omega^b + \omega_i^a = \Gamma_{ij}^a \theta^j, \quad \Delta\Gamma_{ai} + \Gamma_{ai}^b \omega_b + \omega_{ai} = \Gamma_{aij}\theta^j, \\ &\Delta\Gamma_{bi}^a + \delta_b^a \left(\Gamma_{ci}\omega^c - \Gamma_i^c \omega_c\right) + \Gamma_{bi}\omega^a - \Gamma_i^a \omega_b + \omega_{bi}^a = \Gamma_{bij}^a \theta^j, \end{aligned} \tag{7}$$

С учетом (3) – (5), (7) получим структурные уравнения для форм проективной связности (5)

$$\begin{aligned} &D\tilde{\omega}^a = \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}_b^a + R_{ij}^a \theta^i \wedge \theta^j, \; D\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_a^b \wedge \tilde{\omega}_b + R_{aij}\theta^i \wedge \theta^j, \\ &D\tilde{\omega}_b^a = \tilde{\omega}_b^c \wedge \tilde{\omega}_c^a + \delta_b^a \tilde{\omega}_c \wedge \tilde{\omega}^c + \delta_c^a \tilde{\omega}_b \wedge \tilde{\omega}^c + R_{bij}^a \theta^i \wedge \theta^j, \end{aligned} \tag{8}$$

где компоненты объекта кривизны проективной связности имеют вид:

$$R_{ij}^a = \Gamma_{[ij]}^a - \Gamma_{b[i}^a \Gamma_{j]}^b, R_{aij} = \Gamma_{a[ij]} - \Gamma_{a[i}^b \Gamma_{bj]}, R_{bij}^a = \Gamma_{b[ij]}^a - \Gamma_{b[i}^c \Gamma_{cj]}^a - \Gamma_{[i}^a \Gamma_{bj]} - \delta_b^a \Gamma_{c[i}\Gamma_{j]}^c.$$

Альтернирование производится по крайним индексам в квадратных скобках. Воспользовавшись уравнениями (7) и их продолжениями, найдем дифференциальные сравнения для компонент объекта кривизны $R_0 = \{R^a_{ij}, R^a_{bij}, R_{aij}\}$ проективной связности Γ_0

$$\Delta R^a_{ij} - R^a_{bij}\omega^b - \Gamma^a_k \theta^k_{[ij]} \equiv 0, \qquad \Delta R_{aij} + R^c_{aij}\omega_c + \Gamma_{ak}\theta^k_{[ij]} \equiv 0,$$
$$\Delta R^a_{bij} - R^a_{ij}\omega_b + R_{bij}\omega^a - \Gamma^a_{bk}\theta^k_{[ij]} \equiv 0,$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм θ^i.

Теорема 1. *Объект кривизны R_0 проективной связности Γ_0 является тензором, если пространство параметров S_r голономно, и образует тензор лишь в совокупности с объектом проективной связности Γ_0 и фундаментальным объектом Λ, если S_r неголономно.*

Произведем оснащение Бортолотти [6] семейства плоскостей B_r, т.е. к каждой плоскости L_m присоединим (n-m-1)-мерную плоскость P_{n-m-1}, не имеющую общих точек с плоскостью L_m. Зададим плоскость P_{n-m-1} точками $B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A$, причем

$$\Delta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a + \omega^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha i}\theta^i, \Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha i}\theta^i.$$

Продолжая эти уравнения, найдем дифференциальные уравнения для пфаффовых производных компонент оснащающего квазитензора $\lambda = \{\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha\}$

$$\Delta\lambda^a_{\alpha i} - \lambda_{\alpha i}\omega^a + \lambda_\alpha\omega^a_i + \lambda^b_\alpha\omega^a_{bi} - \lambda^a_\beta\omega^\beta_{\alpha i} \equiv 0, \ \Delta\lambda_{\alpha i} - \lambda^a_{\alpha i}\omega_a + \lambda^a_\alpha\omega_{ai} - \lambda_\beta\omega^\beta_{\alpha i} \equiv 0.$$

Теорема 2. *Оснащение Бортолотти семейства B_r индуцирует два типа групповой связности в ассоциированном расслоении $G_s(B_r)$.*

Доказательство. Фундаментальный объект Λ семейства B_r и оснащающий квазитензор λ охватывают компоненты объекта связности Γ по формулам [7]

$$\overset{0}{\Gamma}{}^a_i = \lambda^a_\alpha\Lambda^\alpha_i, \overset{0}{\Gamma}_{ai} = \lambda_\alpha\Lambda^\alpha_{ai}, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi} = \lambda^a_\alpha\Lambda^\alpha_{bi} - \delta^a_b\Lambda^\alpha_i\lambda_\alpha, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i} = -\Lambda^\alpha_{ai}\lambda^a_\beta - \Lambda^\gamma_i\left(\delta^\alpha_\beta\lambda_\gamma + \delta^\alpha_\gamma\lambda_\beta\right), \quad (10)$$
$$\overset{1}{\Gamma}_{\alpha i} = -\lambda_\beta M^\beta_{\alpha i}, \overset{1}{\Gamma}{}^a_{\alpha i} = -\lambda^a_\beta M^\beta_{\alpha i}, \ M^\beta_{\alpha i} = \lambda^a_\alpha\Lambda^\beta_{ai} + \lambda_\alpha\Lambda^\beta_i.$$

Объект $\overset{1}{\Gamma} = \left\{\overset{0}{\Gamma}{}^a_i, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}_{ai}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{1}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{1}{\Gamma}_{\alpha i}\right\}$ назовем объектом связности 1-го типа. Компоненты $\Gamma^a_{\alpha i}$ и $\Gamma_{\alpha i}$ можно охватить иначе, с помощью формул (10) и продолженного оснащающего квазитензора $\{\lambda, \lambda^a_{\alpha i}, \lambda_{\alpha i}\}$:

$$\overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha i} = \lambda^a_{\alpha i} + \lambda^a_\beta \overset{0}{\Gamma}{}^\beta_{\alpha i} - \lambda^b_\alpha \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi} - \lambda_\alpha \overset{0}{\Gamma}{}^a_i, \; \overset{2}{\Gamma}_{\alpha i} = \lambda_{\alpha i} + \lambda_\beta \overset{0}{\Gamma}{}^\beta_{\alpha i} - \lambda^a_\alpha \overset{0}{\Gamma}_{ai}.$$

В результате получим объект связности 2-го типа $\overset{2}{\Gamma} = \left\{ \overset{0}{\Gamma}{}^a_i, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}_{ai}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{2}{\Gamma}_{\alpha i} \right\}$.

Определение. Оснащение Бортолотти называется специальным, если пфаффовы производные компонент оснащающего квазитензора λ имеют вид:

$$\lambda_{\alpha i} = \lambda_\alpha \lambda_\beta \Lambda^\beta_i + \lambda^a_\alpha \lambda_\beta \Lambda^\beta_{ai}, \lambda^a_{\alpha i} = \lambda^a_\beta \lambda_\alpha \Lambda^\beta_i + \lambda^b_\alpha \lambda^a_\beta \Lambda^\beta_{bi}. \tag{11}$$

Дифференциальные сравнения для пфаффовых производных $\lambda_{\alpha i}$ и $\lambda^a_{\alpha i}$ совпадают с дифференциальными сравнениями правых частей равенств (11) соответственно. Следовательно, введенное определение корректно.

Теорема 3. *Связности 2-х типов совпадают тогда и только тогда, когда оснащение Бортолотти специальное.*

Действительно, равенства (11) являются необходимыми и достаточным условиями совпадения двух типов охватов.

Библиографический список

Остиану Н.М. Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1996. Т. 2. С. 247-262.

Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладких многообразиях // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139-189.

Шевченко Ю.И. Оснащения голономного и неголономного гладких многообразий. Калининград, 1998. 82 с.

Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда. Л., 1964. Т. 2. С. 226-233.

Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. 248 с.

Bortolotti E. Connessioni nelle varieta luogo di spazi // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. 1993. № 3. P. 81-89.

Шевченко Ю.И. Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1978. № 9. С. 124-133.

M. Zhovtenko

INDUCED GROUP CONNECTIONS OF PLANES FAMILY IN THE PROJECTIVE SPACE

The family of planes in the projective space is considered. Dimensions of the family and plane are arbitrary. Group connection is given by means of Laptev's way in the bundle associated with the family. Group connection includes the projective one. It is shown, that in the case of non-holonomicity of parameter space the projective connection curvature object of the 1-st order. Botolotti′s equipment is tensor only with projective connection object and fundamental object of plane family is made. It is proved that it induces 2 types of group connection in the associated bundle. The coinsidence conditions of the types are found.

УДК 514.75

Н.Н. Иванищева

(Калининградский государственный университет)

АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ, ПОРОЖДЕННАЯ НЕКОТОРЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Изучается дифференцируемое отображение f: $P_m \to R(Q)$ проективного пространства P_m в многообразие гиперквадрик R(Q) проективного пространства P_n. В [1] получена порожденная в P_m отображением f аффинная связность Г, определяемая метрикой в R(Q). В настоящей работе найдена еще одна аффинная связность γ, которая является аналогом связности Г.Врэнчану [2] точечного соответствия. Изучены некоторые свойства связности γ, в том числе найдены связи между характеристическими направлениями отображения f и фокальными многообразиями семейств гиперквадрик с одной стороны и свойствами геодезических связности γ.

Система величин $\gamma^L_{IK} = V^{\alpha\beta L}\Lambda_{\alpha\beta IK}$ ($\alpha, \beta,... = \overline{0,n}$, $I, J,... = \overline{1,m}$) является аналогом объекта связности Г. Врэнчану точечного соответствия.

Теорема 1. *Формы* $\overline{\Omega}^I = \Omega^I_0$, $\overline{\Omega}^I_K = \Omega^I_K - \delta^I_K\Omega^0_0 + \gamma^I_{KL}\Omega^L_0$ *удовлетворяют уравнениям структуры пространства аффинной связности*

$$D\overline{\Omega}^I = \overline{\Omega}^T \wedge \Omega^I_T + \tfrac{1}{2}S^I_{KL}\overline{\Omega}^K \wedge \overline{\Omega}^L,\quad D\overline{\Omega}^I_K = \overline{\Omega}^T_K \wedge \overline{\Omega}^I_T + \tfrac{1}{2}R^I_{KLT}\overline{\Omega}^L \wedge \overline{\Omega}^T,$$

где S^I_{KL} *и* R^I_{KLT} *равны нулю.*

Следствие. Связность γ является локально аффинной [3].

Теорема 2. *Направление, определенное в точке P, будет характеристическим направлением для отображения f:* $P_m \to R(Q)$ *в том и только в том случае, если геодезическая l:* $R \to P_m$ *связности γ, имеющая это направление, является инфлексионной в точке P.*