ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

В.С.Малаховский

ПОВЕРХНОСТИ,НОРМАЛИ КОТОРЫХ ОРТОГОНАЛЬНО ПЕРЕСЕКАЮТ ЛИНИЮ

В трехмерном евклидовом пространстве E_3, рассматривается поверхность,все нормали которой ортогонально пересекают линию $\mathcal{L}$ (поверхность $\mathcal{K}$ с осевой линией $\mathcal{L}$).Дано приложение метода внешних форм и подвижного репера к установлению характеристического признака такой поверхности.Именно показано,что поверхность $S \in E_3$ тогда и только тогда является поверхностью $\mathcal{K}$ с осевой линией $\mathcal{L}$,когда она образована окружностями постоянного радиуса с центрами на линии $\mathcal{L}$ и плоскостями,ортогональными линии $\mathcal{L}$. Как частный случай получен характеристический признак тора.

§ I. Поверхность $\mathcal{K}$

Определение 1. Поверхностью $\mathcal{K}$ называется поверхность в трехмерном евклидовом пространстве E_3,все нормали которой ортогонально пересекают линию $\mathcal{L}$.Линия $\mathcal{L}$ называется осевой линией поверхности $\mathcal{K}$.

Обозначим буквой B точку пересечения с линией $\mathcal{L}$ нормали к поверхности $\mathcal{K}$ в текущей ее точке A .Отнесем поверхность $\mathcal{K}$ к ортонормированному реперу $\{A, \bar{e}_i\}$ $(i,j,k = 1,2,3)$,где орт $\bar{e}_3$ направлен по нормали AB ,а орт $\bar{e}_1$ коллинеарен касательной к линии $\mathcal{L}$ в точке B .

Положим:

$$\bar{B} = \bar{A} + \frac{1}{c}\bar{e}_3, \quad c \neq 0 . \tag{1.1}$$

Дифференцируя (1.1),находим

$$d\bar{B} = (\omega^1 - \frac{1}{c}\omega_1^3)\bar{e}_1 + (\omega^2 - \frac{1}{c}\omega_2^3)\bar{e}_2 - \frac{dc}{c^2}\bar{e}_3, \tag{1.2}$$

где ω^i, ω_i^k -компоненты деривационных формул

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i , \quad d\bar{e}_i = \omega_i^k \bar{e}_k \tag{1.3}$$

репера $\{A,\bar{e}_i\}$,удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i , \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j . \tag{1.4}$$

Так как $d\bar{B} \parallel \bar{e}_1$,то

$$\omega_2^3 = c\omega^2, \quad dc = 0 . \tag{1.5}$$

Поверхность $\mathcal{K}$ удовлетворяет системе уравнений Пфаффа:

$$\omega^3 = 0, \ \omega_1^3 = -a\omega^1, \ \omega_2^3 = c\omega^2, \ \omega_1^2 = k\omega^1 + b\omega^2, \ dc = 0, \tag{1.6}$$

причем

$$a - c \neq 0 , \tag{1.7}$$

так как линия $\mathcal{L}$ не вырождается в точку.

Замыкая уравнения (1.5) с учетом (1.6),(1.4),находим

$$k = 0 \tag{1.8}$$

Теорема 1.1.Поверхности $\mathcal{K}$ существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.

Доказательство.Замкнутая система уравнений поверхности $\mathcal{K}$ состоит из пфаффовых уравнений

$$\omega^3=0,\ \omega_1^3=a\omega^1,\ \omega_2^3=c\omega^2,\ \omega_1^2=h\omega^1,\ dc=0 \tag{1.9}$$

и внешних квадратичных уравнений

$$\begin{aligned} da\wedge\omega^1+h(a-c)\,\omega^1\wedge\omega^2=0,\\ dh\wedge\omega^1+(h^2+ac)\,\omega^1\wedge\omega^2=0.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Система (1.9),(1.10)-в инволюции и определяет поверхности $\mathcal{K}$ с произволом двух функций одного аргумента. Геометрически этот произвол интерпретируется произволом задания осевой линии $\mathcal{L}$ в E_3.

Назовем координатные линии $\omega^2=0,\ \omega^1=0$ на поверхности $\mathcal{K}$ соответственно линиями $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$.

Обозначим

$$ds=\omega^2\big|_{\omega^1=0}. \tag{1.11}$$

Перемещение репера $\{A,\bar e_i\}$ вдоль $\mathcal{F}_2$ характеризуется следующими деривационными формулами:

$$\frac{d\bar A}{ds}=\bar e_2,\quad \frac{d\bar e_1}{ds}=0,\quad \frac{d\bar e_2}{ds}=c\bar e_3,\quad \frac{d\bar e_3}{ds}=-c\bar e_2. \tag{1.12}$$

Сравнивая формулы (1.12) с деривационными формулами репера Френе линии $\mathcal{F}_2$:

$$\frac{d\bar A}{ds}=\bar t,\quad \frac{d\bar t}{ds}=\rho\bar n,\quad \frac{d\bar n}{ds}=-\rho\bar t+\tau\bar b,\quad \frac{d\bar b}{ds}=-\tau\bar n, \tag{1.13}$$

где $\bar t,\bar n,\bar b$ -орты касательной, главной нормали и бинормали линии $\mathcal{F}_2$, ρ -ее кривизна, τ-кручение в точке A, убеждаемся, что

$$\bar t=\bar e_2,\quad \bar n=\bar e_3,\quad \bar b=\bar e_1, \tag{1.14}$$

$$\rho=|c|=\mathrm{const},\quad \tau=0. \tag{1.15}$$

Следовательно, линии $\mathcal{F}$ -окружности постоянного радиуса $r=\frac{1}{|c|}$ с центрами B на линии $\mathcal{L}$ и плоскостями, ортогональными линии $\mathcal{L}$. Справедливо обратное утверждение. Мы приходим к следующей теореме.

Т е о р е м а 1.2. Поверхность S тогда и только тогда является поверхностью $\mathcal{K}$ с осевой линией $\mathcal{L}$, когда она образована окружностями постоянного радиуса с центрами на линии $\mathcal{L}$ и плоскостями, ортогональными линии $\mathcal{L}$.

В частности, если линия $\mathcal{L}$ -прямая, то поверхность это прямой круговой цилиндр с осью $\mathcal{L}$ [1].

§2. Поверхности T

О п р е д е л е н и е 2. Поверхностью T называется поверхность в трехмерном евклидовом пространстве E_3, все нормали которой ортогонально пересекают окружность $\mathcal{L}\in E_3$.

Из определения следует, что поверхность T является поверхностью $\mathcal{K}$, у которой осевая линия - окружность.

Обозначим

$$\tilde\omega^1=\left(1-\frac{a}{c}\right)\omega^1. \tag{2.1}$$

Так как $\mathcal{D}\tilde\omega^1=0$, то форма Пфаффа $\tilde\omega^1$ является полным дифференциалом:

$$\tilde\omega^1=d\sigma. \tag{2.2}$$

Вдоль линии $\mathcal{L}$ справедливы формулы

$$\frac{d\bar B}{d\sigma}=\bar e_1,\quad \frac{d\bar e_1}{d\sigma}=\frac{c}{c-a}\,(h\bar e_2+a\bar e_3). \tag{2.3}$$

Следовательно, орты

$$\bar{t}_1 = \bar{e}_1, \quad \bar{n}_1 = \frac{h\bar{e}_2 + a\bar{e}_3}{\sqrt{h^2+a^2}}, \quad \bar{b}_1 = \frac{h\bar{e}_3 - a\bar{e}_2}{\sqrt{h^2+a^2}} \qquad (2.4)$$

являются соответственно ортами касательной, главной нормали и бинормали линии $\mathcal{L}$ в точке B, а ее кривизна ρ_1 определяется формулой

$$\frac{\rho_1^2}{c^2} = \frac{h^2+a^2}{(c-a)^2}. \qquad (2.5)$$

Так как осевая линия $\mathcal{L}$ поверхности T -окружность, то

$$d\rho_1 = 0, \quad d\bar{b}_1 = 0. \qquad (2.6)$$

Из (2.5),(2.6) с учетом (1.6) находим:

$$da = h(a-c)\omega^2, \quad dh = (ac+h^2)\omega^2. \qquad (2.7)$$

Т е о р е м а 2.1. Поверхности T существуют и определяются с произволом семи постоянных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Квадратичные уравнения (1.10) в силу (2.7) удовлетворяются тождественно. Система пфаффовых уравнений (1.9),(2.7) вполне интегрируема. Следовательно, ее общее решение зависит от семи произвольных постоянных.

Произвол решения системы (1.9),(2.7) интерпретируется следующим образом: шесть констант определяют положение осевой окружности $\mathcal{L}$ в пространстве E_3, , а седьмая константа определяет радиус окружности с центром на $\mathcal{L}$, порождающей поверхность T.

Из (1.9),(2.7) следует, что вторая полость эволюты поверхности T также вырождается, причем вырождается в прямую ℓ, ортогональную плоскости окружности $\mathcal{L}$ и проходящую через ее центр. Значит, T -поверхность вращения с осью ℓ [1], причем ее меридианы-линии $\mathcal{F}_2$ -являются окружностями постоянного радиуса $\tau = \frac{1}{|c|}$. Пусть R -радиус окружности $\mathcal{L}$. Если $R > \tau$, то поверхность T -это тор. Наоборот, все нормали тора пересекают ортогонально его осевую окружность.

Получаем теорему

Т е о р е м а 2.2. Поверхность $S \in E_3$ тогда и только тогда является тором, когда все ее нормали ортогонально пересекают окружность $\mathcal{L}$ радиуса $R > \tau$, где τ -отрезок нормали к S до окружности $\mathcal{L}$.

Из (1.9),(2.7) следует, что на торе вдоль линий $\mathcal{F}_1$ все инварианты a, b, c постоянны.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. О характеристических признаках некоторых классов поверхностей. -В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6. Калининград, 1975, с.79-89.