УДК 514.76

***К. В. Полякова*[1]**

[1] Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия

polyakova_@mail.ru

Аффинные связности, порожденные абсолютно параллельными полями векторов и ковекторов

Рассмотрены аффинные связности на n-мерном многообразии и в расслоении линейных реперов этого многообразия. Найдены выражения для объекта плоской связности через координаты абсолютно параллельных n векторов (ковекторов) и их пфаффовы производные, а также для объекта симметрической плоской связности через координаты абсолютно параллельных n ковекторов (полных дифференциалов n функций).

Ключевые слова: пфаффовы (обобщенные) производные, абсолютный параллелизм, плоская аффинная связность, симметрическая плоская связность.

1. Аффинная связность. В [7] найдено разложение компонент Γ^i_{jk} объекта аффинной связности в сумму тензора деформации γ^i_{jk} и слоевых координат 2-го порядка x^i_{jk} с помощью уравнений на объект связности. В [8] построены тензоры γ^i_j и γ^i со специальными полями, порождающие тензор деформации γ^i_{jk}, а следовательно, компоненты Γ^i_{jk} объекта плоской и симметрической плоской связностей с помощью операции дифференциального продолжения, состоящей в дифференцировании уравнений внешним образом и последующем

Поступила в редакцию 11.04.2018 г.

© Полякова К. В., 2018

разрешении по лемме Картана. Причем однократное продолжение объекта γ^i_j приводит к плоской связности, а двукратное продолжение объекта γ^i — к симметрической плоской связности. Данный аналитический подход имеет известную геометрическую интерпретацию [6, с. 134—136], фактически состоящую в рассмотрении абсолютно параллельных полей векторов и ковекторов.

Рассмотрим *m*-мерное гладкое многообразие X_m и его окрестность, в которой текущая точка *M* определяется локальными координатами x^i $(i, j, k, ... = \overline{1, m})$. Пусть векторные поля ε_i образуют (неголономный) базис касательного векторного пространства TX_m в точке *M*, а дифференциальные 1-формы ω^i — сопряженный ему кобазис в T^*X_m. Структурные формы ω^i многообразия X_m удовлетворяют уравнениям

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j .$$

Базисные ω^i и слоевые формы ω^i_j имеют вид [5, с. 145]

$$\omega^i = x^i_j dx^j , \quad \omega^i_j = -\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k - x^i_{jk}\omega^k \quad (x^i_k \overset{*}{x}{}^k_j = \delta^i_j).$$

Для слоевых координат x^i_j, x^i_{jk} справедливо $\det(x^i_j) \neq 0$, $x^i_{jk} = x^i_{kj}$, в остальном они произвольны и рассматриваются как независимые переменные [5, с. 149].

Уравнения на векторы ε_i имеют вид [1, с. 56; 9, с. 20]

$$d\varepsilon_i = \varepsilon_j \omega^j_i + \varepsilon_{ij}\omega^j ,$$

причем векторы ε_{ij} являются *касательными векторами 2-го порядка*, на них натянуто *касательное пространство 2-го порядка* $T^2X_m = span(\varepsilon_i, \varepsilon_{ij})$ в точке *M*.

Пусть на многообразии X_m задана скалярная функция f, тогда ее дифференциал df определяет на X_m поле ковектора. Если в некоторой окрестности имеем $df = \partial_i f\, dx^i = f_i \omega^i$, то величины $f_i = \overset{*}{x}{}_i^j \partial_j f$ являются координатами указанного ковекторного поля и называются *пфаффовыми производными* функции f по отношению к кореперу $\{\omega^i\}$ [2, с. 67], или *обобщенными частными производными* [3, с. 182]. Аналогично функциям векторы $\varepsilon_{ij} = \overset{*}{x}{}_i^k \overset{*}{x}{}_j^l \partial_{kl} + x_{ij}^k \overset{*}{x}{}_k^l \partial_l$, являющиеся коэффициентами при базисных формах ω^i, называются *пфаффовыми производными векторов* ε_i.

Зададим связность в расслоении касательных линейных реперов над многообразием X_m способом Лаптева — Лумисте [10]:

$$\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i \omega^k; \quad \Delta\Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i = \Gamma_{jkl}^i \omega^l, \tag{1.1}$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ имеет вид

$$\Delta\Gamma_{jk}^i = d\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jk}^s \omega_s^i - \Gamma_{sk}^i \omega_j^s - \Gamma_{js}^i \omega_k^s.$$

В [7] с помощью перехода в уравнениях (1.1_2) к натуральному кореперу получено разложение для компонент объекта аффинной связности $\Gamma_{jk}^i = -x_{jk}^i + \gamma_{jk}^i$ с помощью слоевых координат x_{jk}^i и тензора деформации $\gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i(x^l, x_s^l)$. При этом объекты кручения T_{jk}^i и кривизны R_{jkl}^i аффинной связности выражаются через тензор деформации γ_{jk}^i по формулам

$$\tfrac{1}{2} T_{jk}^i = \gamma_{[jk]}^i, \quad \tfrac{1}{2} R_{jkl}^i = \frac{\partial \gamma_{j[k}^i}{\partial x^s} \overset{*}{x}{}_{l]}^s - \gamma_{j[k}^s \gamma_{sl]}^i. \tag{1.2}$$

Равенство нулю тензора деформации γ^i_{jk} выделяет плоскую и симметричную связность $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$, которая названа *простейшей* [7] (*канонической плоской* [4, с. 94]).

Ковариантные производные базисных векторов ε_i относительно аффинной связности Γ^i_{jk} выражаются по формулам

$$\nabla_j \varepsilon_i = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_k \Gamma^k_{ij} . \qquad (1.3)$$

Выражение для дифференциалов этих векторов $\widetilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_k \Gamma^k_{ij}$ имеет вид

$$\Delta\widetilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_k (\Delta\Gamma^k_{ij} + \omega^k_{ij}) + \omega^k (\varepsilon_{ijk} + \Gamma^l_{ij}\varepsilon_{lk}) . \qquad (1.4)$$

Поскольку компоненты Γ^i_{jk} объекта аффинной связности удовлетворяют уравнениям (1.1_2), то уравнения (1.4) принимают вид $\Delta\widetilde{\varepsilon}_{ij} = \omega^k (\varepsilon_l \Gamma^l_{ijk} + \varepsilon_{ijk} + \Gamma^l_{ij}\varepsilon_{lk})$. Векторы $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$ относительно инвариантны, так как неподвижны в совокупности при фиксации точки $M \in X_m$, которую обеспечивают уравнения $\omega^i = 0$. На векторы $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$ натянуто *оснащающее подпространство* $HT^2 X_m = span\,(\widetilde{\varepsilon}_{ij})$ пространства $T^2 X_m$ [9, с. 49].

2. Плоская связность $\overset{f}{\Gamma}{}^l_{jk}$. Рассмотрим в касательном пространстве TX_m новый базис $\{u_i\}$, векторы (векторные поля) которого раскладываются в исходном базисе $\{\varepsilon_i\}$ по формулам $u_i = f^j_i \varepsilon_j$, причем функции $f^i_j = f^i_j(x^k, x^l_s)$ образуют невырожденную матрицу, то есть $\det(A^i_j) \neq 0$. При дифференцировании векторов u_i получим

$$du_i = (df^j_i + f^k_i \omega^j_k)\varepsilon_j + f^j_i \varepsilon_{jk}\omega^k .$$

Если функции f_j^i удовлетворяют уравнениям

$$df_j^i + f_j^k \omega_k^i = f_{jk}^i \omega^k , \qquad (2.1)$$

то каждый из векторов u_i относительно инвариантен (неподвижен при фиксации точки) и их смещения определяются уравнениями

$$du_i = u_{ik} \omega^k ,$$

где введено обозначение

$$u_{ik} = f_{ik}^j \varepsilon_j + f_i^j \varepsilon_{jk} . \qquad (2.2)$$

Из уравнений (2.1) следует, что

$$df_j^i(\varepsilon_k) = f_{jl}^i \omega^l(\varepsilon_k) - f_j^l \omega_l^i(\varepsilon_k) = f_{jk}^i + f_j^l x_{lk}^i ,$$

а учитывая равенства $\partial_{\varepsilon_k} f_j^i = \varepsilon_k(f_j^i) = df_j^i(\varepsilon_k)$, получим

$$\partial_{\varepsilon_k} f_j^i = f_{jk}^i + f_j^l x_{lk}^i . \qquad (2.3)$$

Значит, пфаффовы производные $f' = (f_{jk}^i)$ имеют вид

$$f_{jk}^i = \partial_{\varepsilon_k} f_j^i - f_j^l x_{lk}^i . \qquad (2.3')$$

Переходя в уравнениях (2.1) к натуральному кобазису, получим частные производные

$$\partial_k f_j^i = f_j^l x_{ls}^i x_k^s + x_k^l f_{jl}^i , \ \partial_k^l f_j^i = \delta_k^i f_j^s \overset{*}{x}{}_s^l . \qquad (2.4)$$

Пфаффовы производные f_{jk}^i объекта f_j^i удовлетворяют сравнениям $\Delta f_{ik}^j + f_i^l \omega_{lk}^j \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^j)$. Для обратного тензора $\overset{*}{f}{}_j^i$ $(f_k^i \overset{*}{f}{}_j^k = \delta_j^i)$ справедливы сравнения $d\overset{*}{f}{}_j^i - \overset{*}{f}{}_k^i \omega_j^k \equiv 0$.

Заменяя в уравнениях (2.1) слоевые формы ω_k^i на формы связности $\tilde{\omega}_k^i = \omega_k^i - \Gamma_{kl}^i \omega^l$, получим $\nabla f_j^i = \omega^k \nabla_k f_j^i$ [2, с. 65], где $\nabla f_j^i = df_j^i + f_j^k \tilde{\omega}_k^i$ — ковариантный дифференциал,

$$\nabla_k f_j^i = f_{jk}^i - f_j^l \Gamma_{lk}^i \tag{2.5}$$

— ковариантные производные невырожденного тензора f_j^i.

Замечание. 1. Выражение (2.5) представляет собой ковариантные производные для n контравариантных (то есть одноиндексных) тензоров, поэтому оно содержит одно слагаемое с Γ. 2. Если вместо форм связности (1.1) рассматривать формы связности с плюсом $\tilde{\omega}_k^i = \omega_k^i + \Gamma_{kl}^i \omega^l$, то выражение (2.5) совпадет с классическим выражением ковариантных производных вектора, где оба слагаемых с плюсом. В традиционном задании связности методом Лаптева формы связности задаются в виде разности слоевых форм и линейной комбинации базисных форм (см., напр., [5, с. 166]).

Внешний дифференциал от ковариантных дифференциалов ∇f_j^i приведем к виду

$$D(\nabla f_j^i) = \nabla f_j^k \wedge \omega_k^i + \tfrac{1}{2} f_j^k R_{kls}^i \omega^l \wedge \omega^s . \tag{2.6}$$

Ковариантные производные $\nabla_k f_j^i$ образуют тензор, значит, его обращение в нуль инвариантно и задает абсолютный параллелизм векторов u_i. Равенство нулю ковариантных производных $\nabla_k f_j^i$ (2.5) эквивалентно соотношению $f_{ik}^j = f_i^l \Gamma_{lk}^j$. Учитывая невырожденность коэффициентов f_i^l, из последнего соотношения можно найти выражение объекта связности $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(f, f')$ через тензор $f = (f_j^i)$ и его пфаффовы производные $f' = (f_{jk}^i)$: $\Gamma_{jk}^i = \overset{*}{f}{}^l_j \, f_{lk}^i$. При этом векторы u_i переносятся абсолютно параллельно в связности Γ^i_{jk}, значит, связность является плоской, то есть $R^i_{kls} = 0$. Тогда (2.6) упрощается и принимает вид $D(\nabla f^i_j) = \nabla f^k_j \wedge \omega^i_k$. Будем обозначать эту плоскую связность $\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk}$, то есть

$$\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk} = f^i_{lk} \overset{*}{f}{}^l_j, \tag{2.7}$$

а с учетом (2.3′)

$$\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk} = \overset{*}{f}{}^l_j \partial_{\varepsilon_k} f^i_l - x^i_{jk}. \tag{2.7′}$$

Учитывая выражение (1.3) для горизонтальных векторов, из (2.2) получим $u_{ik} = f^j_i \widetilde{\varepsilon}_{jk} + (f^j_{ik} - f^l_i \overset{f}{\Gamma}{}^j_{lk})\varepsilon_j$. Если (2.7) выполняется, то пфаффовы производные u_{ik} векторов u_i нового репера линейно выражаются через горизонтальные векторы $\widetilde{\varepsilon}_{jk}$ связности $\overset{f}{\Gamma}{}^l_{jk}$, то есть $u_{ik} = f^j_i \widetilde{\varepsilon}_{jk} \in HT^2 X_m$. При этом $du_i = f^j_i \widetilde{\varepsilon}_{jk} \omega^k$, то есть векторы u_i переносятся параллельно в связности $\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk}$, если они смещаются в горизонтальном подпространстве $HT^2 X_m$.

Утверждение. *Невырожденный тензор f^i_j, удовлетворяющий уравнениям (2.1), порождает объект $\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk}$ (2.7) плоской связности.*

Обратно, если связность является плоской, то векторы u_i переносятся абсолютно параллельно, ковариантные производные (2.5) равны нулю, а объект связности выражается по формуле (2.7), то есть объект связности порождается невырожденным тензором f^i_j.

Замечание. В [8] эта задача была решена чисто аналитически: набор тензоров f^i_j со специальными полями

$$df^i_j + f^k_j \omega^i_k = f^l_j \Gamma^i_{lk} \omega^k \quad (\det(f^i_j) \neq 0)$$

позволяет построить объект плоской связности Γ^i_{lk}, то есть аффинная связность, порожденная пфаффовыми производными этого специального невырожденного тензора, является плоской.

Замечание. Если $f^i_j = x^i_j$, то сравнивая (2.1) с dx^i_j, получим $f^i_{jk} = -x^i_{lk} x^l_j$. Тогда из (2.7) следует, что $F^i_{jk} = -x^i_{jk}$ — простейшая связность.

Подставляя (2.7) в (2.3), получим

$$\partial_{\varepsilon_l} f^i_j = f^k_j \overset{f}{\Gamma}{}^i_{kl} + f^k_j x^i_{kl} = f^k_j (\overset{f}{\Gamma}{}^i_{kl} + x^i_{kl}) . \tag{2.9}$$

Используя объект деформации $\overset{f}{\gamma}{}^i_{kl} = \overset{f}{\Gamma}{}^i_{kl} + x^i_{kl}$ связности $\overset{f}{\Gamma}{}^i_{kl}$, выражение (2.9) запишем в виде $\partial_{\varepsilon_l} f^i_j = f^k_j \overset{f}{\gamma}{}^i_{kl}$, откуда деформация $\overset{f}{\gamma}{}^i_{jk}$ связности $\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk}$ выражается по формуле

$$\overset{f}{\gamma}{}^i_{jk} = \overset{*}{f}{}^l_j \, \partial_{\varepsilon_k} f^i_l , \tag{2.10}$$

или (подробно) $\overset{f}{\gamma}{}^i_{jk} = \overset{*}{f}{}^s_j \overset{*}{x}{}^l_k \partial_l f^i_s$. Подставляя $\gamma^i_{jk} = \overset{*}{f}{}^s_j \overset{*}{x}{}^l_k \partial_l f^i_s$ в выражения (1.2) для кручения и кривизны, получим

$$\overset{f}{T}{}^i_{jk} = \overset{f}{\gamma}{}^i_{[jk]} = \overset{*}{f}{}^s_{[j} \overset{*}{x}{}^l_{k]} \partial_l f^i_s = \overset{*}{f}{}^s_{[j} \partial_{\varepsilon_k]} f^i_s , \quad \overset{f}{R}{}^i_{jkl} = 0 .$$

Симметрия и несимметрия объекта связности не связана с симметрией или несимметрией слоевых координат x^i_{jk}.

Теорема. *Невырожденный тензор* f^i_j, *удовлетворяющий уравнениям (2.1), порождает тензор деформации* $\overset{f}{\gamma}{}^i_{jk}$ *несимметрической плоской связности* $\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk} = \overset{f}{\gamma}{}^i_{jk} - x^i_{jk}$

$$\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk} + \overset{*}{f}{}^s_j \overset{*}{x}{}^l_k \partial_l f^i_s$$

с кручением $\overset{f}{T}{}^i_{jk} = \overset{*}{f}{}^s_{[j} \overset{*}{x}{}^l_{k]} \partial_l f^i_s$.

Известно, что пространства нулевой кривизны характеризуются существованием n независимых полей абсолютно параллельных векторов или ковекторов [6, с. 134—136].

Рассмотрим плоскую аффинную связность, заданную не в расслоении линейных реперов, а на самом многообразии. При таком рассмотрении компоненты объекта связности зависят от локальных координат x^i, а величины x^i_k, x^i_{jk} — это матрицы частных производных преобразования $x^i = x^i(y^j)$. Возьмем m тензоров $(f^i_1, ..., f^i_m)$, в совокупности образующих невырожденный объект $f = (f^i_j)$ $(\det(f^i_j) \neq 0)$, со следующим законом преобразования при переходе к новым координатам:

$$\bar{f}^i_j = f^k_j \overset{*}{x}{}^i_k, \qquad f^i_j = \bar{f}^k_j x^i_k, \tag{2.11}$$

при этом $f^i_j = f^i_j(x^k)$. Дифференцируя выражение (2.11$_2$) по x^k_l, получим

$$\partial^l_k f^i_j = \bar{f}^s_j \partial^l_k x^i_s = f^t_j \overset{*}{x}{}^s_t \delta^l_s \delta^i_k = \delta^i_k f^t_j \overset{*}{x}{}^l_t,$$

что совпадает с (2.4$_2$). Из (2.11$_2$) выразим $\overset{*}{\bar{f}}{}^i_j = x^k_j \overset{*}{f}{}^i_k$.

Рассмотрим объект (ср. [6, с. 135]) $F^i_{jk} = \overset{*}{f}{}^l_j \dfrac{\partial f^i_l}{\partial x^k}$, тогда, преобразуя $\overline{F}^i_{jk} = \overset{*}{\bar{f}}{}^l_j \dfrac{\partial \bar{f}^i_l}{\partial y^k}$, получим закон аналогичный закону для компонент связности (см. [8; 11, p. 246])

$$\overline{F}^i_{jk} = x^p_j x^t_k F^s_{pt} \overset{*}{x}{}^i_s - x^p_{jk} \overset{*}{x}{}^i_p .$$

Аналогично можно рассматривать абсолютно параллельные ковекторные поля $\theta^i = f^i_j \omega^j$ для плоской аффинной связности.

3. Симметрическая плоская связность $\overset{fs}{\boldsymbol{\Gamma}}{}^i_{lk}$. Абсолютно параллельные ковекторные поля $\theta^i = f^i_j \omega^j$ порождают плоскую связность, но не симметрическую. Для задания плоской и симметрической связности рассмотрим формы

$$ds^i = s^i_j \omega^j , \tag{3.1}$$

где $s^i = s^i(x^j)$ — функции базисных координат x^i, причем $\det(s^i_j) \neq 0$; $s = (s^i) = (s^1, ..., s^m)$ — набор функций. Выражение на пфаффовы (обобщенные) производные s^i_j имеет вид

$$s^i_j = \overset{*}{x}{}^k_j \partial_k s^i . \tag{3.2}$$

Равенство (3.2) можно записать в виде $s^i_j = \partial_{\varepsilon_j} s^i$, где $\partial_{\varepsilon_j} s^i = \varepsilon_j (s^i) = ds^i(\varepsilon_j)$. Продолжая (3.1), получим уравнения на производные s^i_j:

$$ds^i_j - s^i_k \omega^k_j = s^i_{jk} \omega^k \quad (s^i_{jk} = s^i_{kj}). \tag{3.3}$$

Действуя формами $ds^i = s^i_j \omega^j$ на векторы $u_i = f_i^j \varepsilon_j$, получим $ds^i(u_j) = s^i_k \omega^k (f^l_j \varepsilon_l) = s^i_k f^k_j$. Кобазис $\{ds^i\}$ сопряжен базису $\{u_i\}$, если $s^i_k f^k_i = \delta^i_j$, то есть $s^i_k = \overset{*}{f}{}^k_i$. Тогда из (3.2) следует

$$\overset{*}{s}{}^i_j = x^i_k \frac{\partial x^k}{\partial s^j}. \tag{3.4}$$

Пусть ковекторы ds^i (3.1) переносятся абсолютно параллельно. Из уравнений (3.3) следует, что ковариантные производные объекта s^i_j в связности Γ^i_{jk} имеют вид $\nabla_k s^i_j = s^i_{jk} + s^i_l \Gamma^l_{jk}$ и обращаются в нуль, если $s^i_{jk} = -s^i_l \Gamma^l_{jk}$, то есть $\Gamma^i_{jk} = -\overset{*}{s}{}^i_l s^l_{jk}$. Поскольку ковариантные производные $\nabla_k s^i_j$ равны нулю, а пфаффовы производные s^l_{jk} симметричны, то кривизна и кручение этой связности (3.5) равны нулю. Обозначим ее объект $\overset{fs}{\Gamma}{}^i_{lk}$, то есть

$$\overset{fs}{\Gamma}{}^i_{lk} = -\overset{*}{s}{}^i_l s^l_{jk}. \tag{3.5}$$

Из уравнений (3.3) следует, что $ds^i_j(\varepsilon_k) = s^i_{jk} - s^i_l x^l_{jk}$ или $\partial_{\varepsilon_k} s^i_j = s^i_{jk} - s^i_l x^l_{jk}$. Значит, пфаффовы производные s^i_{jk} имеют вид

$$s^i_{jk} = \partial_{\varepsilon_k} s^i_j + s^i_l x^l_{jk}. \tag{3.6}$$

Из соотношений (3.5, 3.6) следует, что

$$s^i_l (\overset{fs}{\Gamma}{}^i_{lk} + x^l_{jk}) = -\partial_{\varepsilon_k} s^i_j,$$

откуда для деформации $\overset{fs}{\gamma}{}^i_{jk}$ связности $\overset{fs}{\Gamma}{}^i_{lk}$ (3.5) имеем

$$\overset{fs}{\gamma}{}^i_{jk} = -\overset{*}{s}{}^i_l \partial_{\varepsilon_k} s^l_j ,$$

а с учетом (3.4) получим симметричную деформацию

$$\overset{fs}{\gamma}{}^i_{jk} = -x^i_t \frac{\partial x^t}{\partial s^l} \overset{*}{x}{}^p_j \overset{*}{x}{}^q_k \partial_{pq} s^l$$

и симметричную связность $\overset{fs}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk} - x^i_t \dfrac{\partial x^t}{\partial s^l} \overset{*}{x}{}^p_j \overset{*}{x}{}^q_k \partial_{pq} s^l$.

Если считать, что наборы $\{ds^i\}$, $\{u_i\}$ сопряжены, то есть $s^i_k = \overset{*}{A}{}^i_k$, то $\gamma^i_{jk} = -A^i_l \partial_{\varepsilon_k} \overset{*}{A}{}^l_j$, а учитывая $\delta^i_j = A^i_k \overset{*}{A}{}^k_j$, получим $\gamma^i_{jk} = \overset{*}{A}{}^l_j \partial_{\varepsilon_k} A^i_l$, что совпадает с (2.10). Но там A^i_j не являются производными, а в данном случае $s^i_j = \overset{*}{A}{}^i_j$ это пфаффовы производные.

Замечание. Если $s^i = x^i$, то $s^i_j = x^i_j$, $\overset{fs}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$. Базисные x^i и слоевые координаты x^i_j являются генераторами [8] простейшей связности $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$.

Если объект аффинной связности строится в результате двукратного вычисления пфаффовых производных объекта s^i, то кривизна и кручение этой связности равны нулю.

Обратимся снова к связности, заданной на многообразии, а не в расслоении. Рассмотрим формы

$$ds^i = s^i_j dx^j ,$$

где $s^i = s^i(x^j)$ — функции базисных координат x^i, $s^i_j = \partial_k s^i$, причем $\det(s^i_j) \neq 0$. Поскольку $s = (s^i) = (s^1, ..., s^m)$ — набор функций, то набор их градиентов s^i_j образует набор ковариантных тензоров, для которых ковариантные производные имеют вид $\nabla_k s^i_j = \partial_k s^i_j - s^i_l \Gamma^l_{jk}$. Обращение их в нуль дает $s^i_l \Gamma^l_{jk} = \partial_k s^i_j$, откуда $\Gamma^i_{jk} = \dfrac{\partial x^i}{\partial s^t} \dfrac{\partial s^t}{\partial x^j \partial x^k}$. Этот объект удовлетворяет уравнениям для компонент объекта связности; он симметричен и его кривизна равна нулю. Таким образом, справедлива

Теорема. *Объект*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial s^t} \frac{\partial s^t}{\partial x^j \partial x^k},$$

порожденный функциями $s^i = s^i(x^j)$ (*причем* $\det(\partial_k s^i) \neq 0$), *является объектом симметричной и плоской аффинной связности на многообразии.*

Список литературы

1. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.

2. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. / ВИНИТИ. Т. 9. М., 1979.

3. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. М., 1975.

4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии / пер. с англ. М., 1981. Т. 1.

5. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

6. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

7. *Полякова К.В.* Специальные аффинные связности 1-го и 2-го порядков // Диф. геом. многообр. фигур. 2015. Вып. 46. С. 114—128.

8. *Полякова К.В.* Generators of flat and symmetric flat affine connections // Abstracts of the conference: Problems of modern topology and its applications. Tashkent, 2016. P. 82—83.

9. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

10. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // Диф. геом. многообр. фигур. 2006. Вып. 37. С. 179—187.

11. *Kolář I., Michor P.W., Slovák J.* Natural operations in differential geometry. Berlin, 1993.

K. Polyakova[1]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*

14 A. Nevskogo ul., Kaliningrad, 236016, Russia

polyakova_@mail.ru

Affine connections generated by absolutely parallel vector and convector fields

Submitted on April 11, 2018

Affine connections are considered both on an n-dimensional manifold and in the linear fibre bundle over the manifold. The expressions for the flat connection object in the terms of coordinates of absolutely parallel n vectors (covektors) and their Pfaffian derivatives and also for the symmetric flat connection object in the terms of coordinates of absolutely parallel n covektors (differentials of n functions) are found.

Keywords: pfaffian (generalized) derivatives, absolute parallelism, flat affine connection, symmetric affine connection.

References

1. *Akivis, M.A.:* Multidimensional differential geometry. Kalinin (1977) (in Russian).

2. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu.G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. Journal of Soviet Mathematics, **14**:6, 1573—1719 (1980).

3. *Zulanke, R., Vintgen, P.:* Differential geometry and bundles. Mir, Moscow (1975) (in Russian).

4. *Kobayasi, S., Nomizu, K.:* Foundations of differential geometry. V. 1 (1963).

5. *Laptev, G.F.:* Main infinitesimal structures of higher orders on smooth manifold. Tr. Geom. Semin. VINITI. M., vol. 1, 139—189 (1966) (in Russian).

6. *Norden, A.P.:* Spaceswith an affine connection. Nauka, Moscow (1976) (in Russian).

7. *Polyakova, K.V.:* Special affine connection of the 1st and 2nd orders. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 46, 114—128 (2015) (in Russian).

8. *Polyakova, K.V.:* Generators of flat and symmetric flat affine connections. Abstracts of the conference: Problems of modern topology and its applications. Tashkent. Pp. 82—83 (2016).

9. *Shevchenko, Yu.I.:* Closings of holonomic and non-holonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998) (in Russian).

10. *Shevchenko, Yu.I.:* Laptev and Lumiste methods of giving connection in principal fiber bundle. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 37, 179—187 (2006) (in Russian).

11. *Kolář, I., Michor, P.W., Slovák, J.:* Natural operations in differential geometry. Springer-Verlag, Berlin (1993).