УДК 514.76

***Г. А. Банару*[1]**
[1] *Смоленский государственный университет, Россия*
mihail.banaru@yahoo.com

О почти контактной метрической структуре косимплектического типа на гиперповерхности келерова многообразия

Установлено, что матрица второй квадратичной формы погружения гиперповерхности келерова многообразия, на которой индуцирована почти контактная метрическая структура косимплектического типа, имеет специальный вид.

***Ключевые слова**:* келерово многообразие, почти контактная метрическая структура, структура косимплектического типа, вторая квадратичная форма.

1. Почти контактная метрическая структура относится к числу важнейших дифференциально-геометрических структур. Напомним, что под почти контактной метрической структурой на многообразии N мы понимаем систему тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, для которой выполняются такие условия [1]:

$$\eta(\xi)=1;\ \Phi(\xi)=0;\ \eta\circ\Phi=0;\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y),\ X,Y\in\aleph(N).$$

Поступила в редакцию 25.04.2018 г.

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.

Известно, что многообразие, допускающее почти контактную метрическую структуру, является нечетномерным и ориентируемым. Важнейшими примерами почти контактной метрической структуры являются косимплектическая структура, слабо косимплектическая структура (или структура Эндо), а также структуры Сасаки и Кенмоцу [6]. Эти структуры и различные их обобщения служат предметом многочисленных исследований, проводимых как геометрами, так и специалистами в области теоретической физики.

В работе [2] В. Ф. Кириченко и И. В. Ускорев ввели в рассмотрение новый тип почти контактных метрических структур — структуру косимплектического типа. Она определяется как почти контактная метрическая структура с замкнутой контактной формой.

В [2] показано, что структура косимплектического типа инвариантна относительно канонических конформных преобразований. Напомним, что конформным преобразованием почти контактной метрической структуры $\{\Phi,\ \xi,\ \eta,\ g\}$ на многообразии N называют переход к почти контактной метрической структуре $\{\tilde{\Phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g}\}$, где $\tilde{\Phi}=\Phi$, $\tilde{\xi}=e^{f}\xi$, $\tilde{\eta}=e^{-f}\eta$ и $\tilde{g}=e^{-2f}g$. Здесь f — некоторая гладкая функция на многообразии N.

2. Важнейшими примерами почти контактных метрических структур являются структуры на пространствах так называемых главных T^1-расслоений над почти эрмитовыми многообразиями, а также на ориентируемых гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий [3].

В статьях [4; 5] авторами рассматривалась первая группа структурных уравнений почти контактной метрической структуры на гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести:

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} + i\sigma^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta} \wedge \omega + i\sigma^{\alpha\beta}\omega_{\beta} \wedge \omega;$$

$$d\omega_{\alpha} = -\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} - i\sigma^{\beta}_{\alpha}\omega_{\beta} \wedge \omega - i\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\beta} \wedge \omega; \qquad (1)$$

$$d\omega = -i\sigma^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta} \wedge \omega_{\alpha} + i\sigma_{n\beta}\omega \wedge \omega^{\beta} - i\sigma^{\beta}_{n}\omega \wedge \omega_{\beta}.$$

Здесь $\{\omega^{\alpha}\}$, $\{\omega_{\alpha}\}$ — компоненты форм смещения $(\omega^{n} = \omega)$; $\{\omega^{k}_{j}\}$ — компоненты форм римановой связности; $\omega_{\alpha} = \omega^{\hat{a}}$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n-1$; $a, b, c = 1, \ldots, n$; $\hat{a} = a + n$; σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в келерово многообразие M^{2n}, $n \geq 3$.

В. Ф. Кириченко и И. В. Ускорев [2] показали, что равенство

$$d\omega = 0$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы почти контактная метрическая структура оказалась структурой косимплектического типа. Поэтому, принимая во внимание (1), мы можем сделать следующий вывод: выполнение условий

$$1)\ \sigma^{\alpha}_{\beta} = 0;\ 2)\ \sigma^{\beta}_{n} = 0;\ 3)\ \sigma_{n\beta} = 0$$

является критерием того, чтобы почти контактная метрическая структура на гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести оказалась структурой косимплектического типа. Отличными от нуля могут быть лишь компоненты вида $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ и σ_{nn}. Таким образом, установлен следующий результат.

Теорема. *Матрица второй квадратичной формы погружения гиперповерхности* N^{2n-1}*, на которой индуцирована почти контактная метрическая структура косимплектического типа в келерово многообразие* M^{2n}, $n \geq 3$ *имеет вид:*

$$\left(\sigma_{ps}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \sigma_{\alpha\beta} & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0\dots0 & \sigma_{nn} & 0\dots0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & \sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \end{array}\right), p, s = 1, \dots, 2n-1.$$

Список литературы

1. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

2. *Кириченко В. Ф., Ускорев И. В.* Инварианты конформного преобразования почти контактных метрических структур // Математические заметки. 2008. Т. 84, №6. С. 838—850.

3. *Кириченко В. Ф., Банару М. Б.* Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2014. Т. 127. С. 5—40.

4. *Степанова Л. В., Банару Г. А.* О почти контактной метрической структуре на вполне омбилической гиперповерхности келерова многообразия // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 140—145.

5. *Степанова Л. В., Банару Г. А., Банару М. Б.* О квазисасакиевых гиперповерхностях келеровых многообразий // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. №1. С. 86—89.

G. Banaru[1]
[1] *Smolensk State University*
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com

On the almost contact metric structure of cosymplectic type on a hypersurface of a Kähler manifold

Submitted on April 25, 2018

It is proved that the matrix of the second fundamental form of the immersion of a hypersurfaces of a Kähler manifold, equipped with an almost contact metric structure of cosymplectic type, is of special kind.

Keywords: Kähler manifold, almost contact metric structure, structure of cosymplectic type, second fundamental form.

References

1. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa: Pechatnyi Dom, 2013 (in Russian).
2. *Kirichenko, V.F., Uskorev, I.V.:* Invariants of conformal transformations of almost contact metric structures. Mathematical Notes. **84**: 5, 783—794 (2008).
3. *Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.:* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds // J. Math. Sci., **207**:4, 513—537 (2015).
4. *Stepanova, L.V., Banaru, G.A.:* On the almost contact metric structure on a totally umbilical hypersurface of a Kählerian manifold. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 47, 140—145 (2016) (in Russian).
5. *Stepanova, L.V., Banaru, G.A., Banaru, M.B.:* On quasi-Sasakian hypersurfaces of Kähler manifolds. Russian Mathematics. **60**:1, 73—75 (2016).