УДК 514.76

А. Я. Султанов , О. А. Монахова , О. В. Болотникова
Пензенский государственный университет, Россия
sultanovaya@rambler.ru, oxmonakh@mail.ru, olgavs3011@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-8

О дифференцированиях линейных алгебр специального типа

Изучаются алгебры Ли дифференцирований линейной алгебры, операция умножения в которой определяется с помощью линейной формы и двух фиксированных элементов основного поля. Дано определение дифференцирования линейной алгебры, получена система линейных однородных уравнений, которой удовлетворяют компоненты произвольного дифференцирования. Построено вложение алгебры Ли дифференцирований в алгебру Ли квадратных матриц порядка n над полем $\boldsymbol{P}$. Это позволило дать оценку размерности алгебры Ли дифференцирований сверху. Доказано, что размерность алгебры дифференцирований изучаемых алгебр равна n^2-n, где n — размерность алгебры. Далее приводится результат о максимальной размерности алгебры Ли дифференцирований линейной алгебры, обладающей единицей. С опорой на приведенные факты доказано, что изучаемые алгебры не могут иметь единицы.

Ключевые слова: линейная алгебра над полем, линейная форма, дифференцирование линейной алгебры, алгебра Ли дифференцирований, алгебра Ли матриц, единица линейной алгебры

Поступила в редакцию 20.04.2024 г.

1. Основные определения и понятия

Основные понятия этого пункта приводятся с использованием источников [1—6].

Линейная алгебра $\boldsymbol{A}=A(\theta, \alpha, \beta)$ определяется как векторное пространство V над полем $\boldsymbol{P}$, на котором операция умножения задается формулой

$$ab=\alpha\theta(b)a+\beta\theta(a)b \tag{1}$$

для любых a, b из векторного пространства V. В этом равенстве θ — ненулевая линейная форма, заданная на V со значениями в поле $\boldsymbol{P}$, α и β — фиксированные скаляры поля $\boldsymbol{P}$, не равные нулю одновременно. Легко установить, что введенная операция умножения линейна по каждому аргументу. *Дифференцированием линейной алгебры* $\boldsymbol{A}$ называется линейное отображение D: $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}$, удовлетворяющее условию

$$D(ab)=D(a)b+aD(b).$$

Множество $Der\ \boldsymbol{A}$ всех дифференцирований линейной алгебры $\boldsymbol{A}$ образует алгебру Ли относительно операции коммутирования [,], определяемой условием

$$[D_1, D_2]=D_1\circ D_2-D_2\circ D_1,$$

где символ $\circ$ означает композицию линейных отображений.

Будем считать, что алгебра $\boldsymbol{A}$ конечномерна, то есть $\dim \boldsymbol{A}=n$, характеристика поля $\boldsymbol{P}$ отлична от 2. Тогда в силу первого условия можно выбрать произвольный базис (e_1, e_2, …, e_n). Для произвольного дифференцирования D найдем разложения образов базисных элементов $D(e_i)$ по элементам выбранного базиса:

$$D(e_i)=x_i^k e_k \text{ (по индексу } k \text{ ведется суммирование от 1 до } n).$$

Набор скаляров x_i^k однозначно определяет отображение D. Матрица $M(D)=\| x_i^k \|$, где нижний индекс i указывает номер столбца, а верхний индекс k — номер строки, называется матрицей дифференцирования D относительно базиса $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Как известно, пространство $Mat(n, \boldsymbol{P})$ квадратных матриц над полем $\boldsymbol{P}$ является алгеброй Ли относительно операции коммутирования $[A, B] = AB - BA$ для матриц $A, B \in Mat(n, \boldsymbol{P})$. Можно доказать, что отображение h: $Der\,\boldsymbol{A} \to Mat(n, \boldsymbol{P})$, заданное условием $h(D) = M(D)$, является изоморфизмом, что влечет соотношение $\dim(Der\,\boldsymbol{A}) \leq n^2$.

2. Размерность алгебры *Der A* дифференцирований алгебры *A*

Пусть D — произвольное дифференцирование алгебры $\boldsymbol{A}$. Тогда, подействовав этим дифференцированием на левую и правую части равенства (1), получим

$$D(a)b + aD(b) = \alpha\theta(b)D(a) + \beta\theta(a)D(b).$$

В левой части полученного равенства вычислим произведения по формуле (1). Тогда

$$\alpha\theta(b)D(a) + \beta\theta(D(a))b + \alpha\theta(D(b))a + \beta\theta(a)D(b) =$$
$$= \alpha\theta(b)D(a) + \beta\theta(a)D(b).$$

Отсюда следует, что

$$\alpha\theta(D(b))a + \beta\theta(D(a))b = 0.$$

Подставив вместо элементов a и b базисные элементы алгебры $\boldsymbol{A}$, получим

$$\alpha\theta(D(e_j))e_i + \beta\theta(D(e_i))e_j = 0.$$

Учитывая, что $D(e_i) = x_i^k e_k$, из последнего соотношения найдем

$$\alpha x_j^k \theta_k e_i + \beta x_i^k \theta_k e_j = 0,$$

где $\theta_k = \theta(e_k)$. Считая, что единица алгебры $\boldsymbol{A}$ отождествляется с единицей поля $\boldsymbol{P}$, положим, что $e_i = \delta_i^h e_k$, где δ_i^h — символ Кронекера:

$$\delta_i^h = \begin{cases} 1, \text{ если } i = h; \\ 0, \text{ если } i \neq h. \end{cases}$$

Здесь 1 — единица поля $\boldsymbol{P}$. Тогда получим следующие равенства:

$$\alpha x_j^k \theta_k \delta_i^h + \beta x_i^k \theta_k \delta_j^h = 0. \qquad (2)$$

В равенствах (2) выполним операцию свертки: сначала по индексам h, i, затем по индексам h, j. Тогда

$$(\alpha n + \beta) x_i^k \theta_k = 0 \text{ и}$$

$$(\alpha + \beta n) x_i^k \theta_k = 0 \ .$$

В этих равенствах $\alpha n + \beta$ или $\alpha + \beta n$ не всегда одновременно равны нулю. В противном случае будем иметь

$$\alpha n + \beta = 0,$$

$$\alpha + \beta n = 0.$$

Решая данную систему и учитывая, что $\begin{vmatrix} n & 1 \\ 1 & n \end{vmatrix} = n^2 + 1 \neq 0$, получим $\alpha = \beta = 0$, чего быть не может по определению алгебры $\boldsymbol{A}$.

Отсюда следует, что размерность пространства решений системы линейных однородных уравнений (2), задающей дифференцирования алгебры $\boldsymbol{A}$, равна $n^2 - n$. Действительно, система (2) равносильна системе $x_i^k \theta_k = 0$. Поскольку θ — ненулевая линейная форма, то хотя бы одна компонента θ_k отлична от нуля. Поэтому система линейных уравнений $x_i^k \theta_k = 0$ имеет ранг, равный n. Таким образом,

$$\dim_P (Der\, \boldsymbol{A}) = n^2 - n.$$

3. Исследование существования единицы алгебры *A* с умножением, определенным равенством (1)

Как известно, элемент δ алгебры $\boldsymbol{A}$ называется единицей (единичным элементом) алгебры $\boldsymbol{A}$, если выполняются условия $x\delta = \delta x = x$ для любого элемента $x \in \boldsymbol{A}$.

В работе [7] доказано, что если алгебра $\boldsymbol{A}$ размерности n обладает единицей, то

$$\dim(Der\,\boldsymbol{A}) \leq (n-1)^2$$

при условии, что характеристика поля $\boldsymbol{P}$ не равна 2.

На основании этого результата и результата, полученного в пункте 2, докажем, что ни в одной алгебре $A(\theta, \alpha, \beta)$ не существует единицы.

Действительно, если допустим существование единицы в алгебре $A(\theta, \alpha, \beta)$, то в силу того, что $\dim_P(Der\,\boldsymbol{A}) \leq (n-1)^2$ и с другой стороны $\dim_P(Der\,\boldsymbol{A}) = n^2 - n$, получим $n^2 - n \leq (n-1)^2$. Но $n^2 - n - (n-1)^2 = n - 1 > 0$ при $n \geq 2$. То есть равенство размерностей не достигается. Это противоречие и доказывает, что в алгебре $A(\theta, \alpha, \beta)$ нет единицы.

Список литературы

1. *Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М., 1978.

2. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру : в 3 ч. М., 2000.

3. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. М., 1970.

4. *Мельников О.В., Ремесленников В.А., Романьков В.А. и др.* Общая алгебра. Т. 1. М., 1990.

5. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. М., 1986.

6. *Султанов А.Я.* О дифференцированиях линейных алгебр // Движения в обобщенных пространствах : межвуз. сб. науч. тр. Пенза, 2005. С. 111—136.

7. *Султанов А.Я., Глебова М.В., Султанова Г.А.* Дифференцирование линейных алгебр с единицей над полем // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 54—62.

Для цитирования: *Султанов А.Я., Монахова О.А., Болотникова О.В.* О дифференцированиях линейных алгебр специального типа // ДГМФ. 2024. №55 (1). С. 74—80. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-8.

MSC 2010:16P10

A. Ya. Sultanov, *O. A. Monakhova*, *O. V. Bolotnikova*
Penza State University
37, Lermontova St., Penza, 440026, Russia
sultanovaya@rambler.ru, oxmonakh@mail.ru, olgavs3011@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-8

On derivations of linear algebras of a special type

Submitted on April 20, 2024

In this work, Lie algebras of differentiation of linear algebra, the operation of multiplication in which is defined using a linear form and two fixed elements of the main field are studied. In the first part of the work, a definition of differentiation of linear algebra is given, a system of linear homogeneous equations is obtained, which is satisfied by the components of arbitrary differentiation. An embedding of the Lie algebra of differentiations into the Lie algebra of square matrices of order n over the field $\boldsymbol{P}$ is constructed. This made it possible to give an upper bound for the dimension of the Lie algebra of derivations. It has been proven that the dimension of the algebra of differentiation of the algebras under study is equal to n^2-n, where n is the dimension of the algebra. Next we give a result on the maximum dimension of the Lie algebra of derivations of a linear algebra with identity. Based on the above facts, it is proven that the algebras under study cannot have a unit.

Keywords: linear algebra over a field, linear form, differentiation of linear algebra, Lie algebra of differentiation, Lie algebra of matrices, unit of linear algebra

References

1. *Zhevlakov, K. A., Slinko A. M., Shestakov, I. P., Shirshov, A. I.:* Rings close to associative. Moscow (1978).
2. *Kostrikin, A. I.:* Introduction to algebra, parts 1—3. Moscow (2000).
3. *Maltsev, A. I.:* Basics of linear algebra. Moscow (1970).

4. *Melnikov, O. V., Remeslennikov, V. A., Romankov, V. A. et al.:* General algebra, 1. Moscow (1990).

5. *Pierce, R.:* Associative algebras. Moscow (1986).

6. *Sultanov, A. Ya.:* On differentiations of linear algebras. Movements in generalized spaces. Interuniversity collection of scientific papers. Penza, 111—136 (2005).

7. *Sultanov, A. Ya., Glebova, M. V., Sultanova, G. A.:* Differentiation of linear algebras with a unit over a field. DGMF, **54**:2, 54—62 (2023).

For citation: Sultanov, A. Ya., Monakhova, O. A., Bolotnikova, O. V. On derivations of linear algebras of a special type. DGMF, 55 (1), 74—80 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-8.