УДК 514.75

О.О. Белова

(Российский государственный университет им. Иммануила Канта)

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИНДУЦИРОВАННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ ЦЕНТРИРОВАННОГО МНОГООБРАЗИЯ ГРАССМАНА

В центропроективном пространстве исследуется центрированное многообразие Грассмана. Производится оснащение Бортолотти данного многообразия. При помощи центральных проектирований и параллельных перенесений геометрически интерпретируются связности трех типов в расслоении над центрированным многообразием Грассмана.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I = 1, \ldots, n)$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I,\ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \quad (1)$$

причем формы Пфаффа $\omega^I, \omega_I, \omega_J^I$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы GP(n):

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I.$$

В пространстве P_n рассмотрим центрированное многообразие Грассмана $V^0 = Gr^0(m, n)$, т.е. многообразие всех m-мерных плоскостей, проходящих через одну фиксированную точку. Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$ $(a,\dots = 1, \dots, m;\ \alpha,\dots = m+1, \dots, n)$, помещая вершину A в данную фиксированную точку, а вершины A_a — на центрированную плоскость $L_m^* = [A, A_a]$. При фиксации точки A получим тождества $\omega^I = 0$, превращающие пространство P_n в центропроективное пространство P_n^*. Из формул (1) видно, что уравнения стационарности плоскости $L_m^* \in V^0$ имеют вид: $\omega_a^\alpha = 0$, т.е. формы ω_a^α являются базисными для центрированного многообразия Грассмана V^0 (dim $V^0 = m(n\text{-}m)$). Над многообразием V^0 возникает главное расслоение $G^*(V^0)$, типовым слоем которого является подгруппа стационарности G^* центрированной плоскости $L_m^* \in V^0$ [1]. В главном расслоении $G^*(V^0)$ задается фундаментально-групповая связность по Г.Ф. Лаптеву.

Произведем оснащение Бортолотти центрированного многообразия Грассмана V^0, которое состоит в присоединении к каждой центрированной m-плоскости L_m^* данного многообразия (n—m—1)-плоскости P_{n-m-1}, не имеющей с ней общих точек. Плоскость P_{n-m-1} зададим совокупностью точек $B_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha A$. Доказано [2], что данное оснащение индуцирует связности трех типов в ассоциированном расслоении $G^*(V^0)$.

Дадим геометрическую характеристику полученным связностям. Для этого находим дифференциалы базисных точек оснащающей плоскости

$$dB_\alpha = \theta B_\alpha + (\omega_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^a \omega_a^\beta) B_\beta + (\Delta\lambda_\alpha^a + \omega_\alpha^a - \lambda_\beta^a \lambda_\alpha^b \omega_b^\beta) A_a +$$

$$+(\Delta\lambda_\alpha+\lambda_\alpha^a\omega_a+\omega_\alpha-\lambda_\beta\lambda_\alpha^a\omega_a^\beta)A.$$

Относительно связностей трех типов эти равенства принимают следующий вид:

$$dB_\alpha=\theta B_\alpha+\overset{0}{\tilde{\omega}}{}_\alpha^\beta B_\beta+\overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha^a A_a+\overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha A, \qquad (2)$$

$$dB_\alpha=\theta B_\alpha+\overset{0}{\tilde{\omega}}{}_\alpha^\beta B_\beta+[\overset{02}{\nabla}\lambda_\alpha^a+(\lambda_{\alpha\beta}^{ab}-\lambda_\beta^a\lambda_\alpha^b)\omega_b^\beta]A_a+$$

$$+[\overset{02}{\nabla}\lambda_\alpha+(\lambda_{\alpha\beta}^a-\lambda_\beta\lambda_\alpha^a)\omega_a^\beta]A, \qquad (3)$$

$$dB_\alpha=\theta B_\alpha+\overset{0}{\tilde{\omega}}{}_\alpha^\beta B_\beta+[\overset{03}{\nabla}\lambda_\alpha^a-(\lambda_{\alpha\beta}^{ab}-\lambda_\beta^a\lambda_\alpha^b)\omega_b^\beta]A_a+$$

$$+[\overset{03}{\nabla}\lambda_\alpha-(\lambda_{\alpha\beta}^a-\lambda_\beta\lambda_\alpha^a)\omega_a^\beta]A, \qquad (4)$$

откуда вытекает

Теорема 1. *В групповой связности 1-го типа параллельное перенесение оснащающей плоскости будет связанно вырожденным, т.е. плоскость Бортолотти неподвижна при параллельном перенесении. В групповой связности 2-го и 3-го типов параллельное перенесение оснащающей плоскости будет свободно вырожденным, т.е. при обращении в нуль ковариантных производных оснащающего квазитензора* λ *специальных смещений оснащающей плоскости, вообще говоря, не выделяется.*

Теорема 2. *Простейший [3] подобъект* $\overset{0}{\Gamma}_1=\{\overset{0}{\Gamma}{}_{\alpha\gamma}^{\beta a}\}$ *объектов связностей* $\overset{01}{\Gamma}$, $\overset{02}{\Gamma}$ *и* $\overset{03}{\Gamma}$ *характеризуется центральным проектированием плоскости* $P_{n-m-1}+dP_{n-m-1}$, *смежной с оснащающей плоскостью* P_{n-m-1}, *на исходную плоскость* P_{n-m-1} *из центра — образующей плоскости* L_m^*

$$\overset{0}{\Gamma}_1 : \ P_{n-m-1} + \mathrm{d}\, P_{n-m-1} \xrightarrow{L_m^*} P_{n-m-1} . \qquad (5)$$

Действительно, из формул (2—4) видно, что проекция (5) определяется формами связности $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^{\beta}_{\alpha}$, которые выражаются с помощью подобъекта $\overset{0}{\Gamma}_1$.

Замечание. В круглых скобках выражений (3), (4) с соответствующими знаками стоят компоненты тензора деформации связностей 2-го и 3-го типов по отношению к связности 1-го типа.

Список литературы

1. *Белова О.О.* Связность в расслоении, ассоциированном с центрированным многообразием Грассмана // Тез. докл. межд. семин. “Геометрия в Одессе—2005. Диф. геом. и ее применение” Одесса, 2005. С. 13—15.

2. *Belova O.* The connections of 3-types in the fibering over centred Grassman’s manifold // The 5-th Conference of Balkan Society of Geometers. Mangalia, 2005.

3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

O. Belova

THE GEOMETRICAL CHARACTERISTIC OF INDUCED CONNECTIONS OF CENTRED GRASSMAN’S MANIFOLD

Centred Grassman’s manifold (space of centred planes, passing through one point) is considered in the centerprojective space P_n^*. Bortolotti’s clothing of the given manifold is made. Geometrical interpretation of the connections of 3 types in the fibering over the

centred Grassman's manifold is given by means of parallel displacements and mappings.

УДК 514.76

К.М. Буданов

(Пензенский государственный педагогический университет)

ЛИФТЫ ФУНКЦИЙ И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ В РАССЛОЕНИЕ ВЕЙЛЯ НАД АЛГЕБРОЙ ВЕЙЛЯ ВЫСОТЫ 2

Построены лифты функций и векторных полей в расслоение Вейля над алгеброй Вейля высоты 2.

1. Пусть **A** — алгебра Вейля — коммутативная, ассоциативная алгебра **A** с единицей, обладающая нильпотентным идеалом **I** таким, что факторалгебра **A/I** изоморфна алгебре действительных чисел **R**.

Наименьшее натуральное число r, удовлетворяющее условию $\mathbf{I}^{r+1} = 0$, называется высотой, а размерность факторалгебры $\mathbf{I}/\mathbf{I}^2$ — шириной алгебры Вейля **A** [1].

Пусть M_n — гладкое многообразие размерности n класса C^∞ и $C^\infty(M_n)$ — алгебра гладких вещественнозначных функций класса C^∞, заданных на M_n. Гомоморфизм j_p: $C^\infty(M_n)\to\mathbf{A}$ называют **A**-близкой точкой к точке $p\in M_n$, если имеет место сравнение $j_p(f) \equiv f(p)$ $(mod\ \mathbf{I})$ для всякой функции $f\in C^\infty(M_n)$.

Множество всех точек, **A**-близких к точке $p\in M_n$, обозначим через $(M_n)_p^{\mathbf{A}}$ и составим объединение $\bigcup\limits_{p\in M_n} (M_n)_p^A = M_n^A$. Определим каноническую проекцию $\pi: M_n^A \to M_n$ условием $\pi(j_p) = p$. На множестве M_n^A возникает гладкая структура, порож-