3. *Trautman A.* The Einstein — Cartan theory // Encyclopedia of Mathematical Physics / ed. by Francoise J.-P. et al. Oxford: Elsevier. 2006. Vol. 2. P. 189—195.

4. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

5. *Схоутен И. С., Стройк Д. Дж.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.; Л., 1939.

I. Gordeeva, S. Stepanov

ZEROS OF PSEUDO-KILLING VECTOR FIELD

Let X be a pseudo-Killing vector field in a metric manifold with torsion (M, g, ∇) (see Yano K., Bochner S. Curvature and Betti numbers — Princeton, New Jersey: Princeton university Press, 1953). If x_0 is a local maximum of $f = \frac{1}{2} g(X, X)$ and the Ricci tensor of (M, g, ∇) at x_0 is negative define, then there exists necessarily a neighborhood of this point on which X vanishes. If (in addition) the torsion tensor S of ∇ has the following property $g(S(V,Y),Z) + g(S(V,Z),Y) = 0$ then X vanishes identically on (M, g, ∇).

УДК 514.7

И. А. Долгарев

(Пензенский государственный университет)

ПОВЕРХНОСТИ С ПОСТОЯННОЙ ГАЛИЛЕЕВОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Установлено, что всякая постоянная галилеева связность является нулевой. Изометричные поверхности 3-мерного пространства-времени Галилея, имеющие постоянные коэффициенты квадратичных форм, есть галилеевы плоскости, круговые цилиндры и прямые геликоиды.

Рассматриваются регулярные класса C^3 поверхности в 3-мерном пространстве-времени Галилея Γ^3 в естественной параметризации

$$\gamma(t,u) = (t, x(t,u), y(t,u)),\ (t,u) \in D \subseteq R^2, \tag{1}$$

где **R** — поле действительных чисел; t — временной параметр, u — пространственный параметр. Первая квадратичная форма поверхности есть

$$ds^2 = \begin{cases} 1, \text{если } t \text{ изменяется;} \\ E = x_u^2 + y_u^2, \text{если } t \text{ не изменяется.} \end{cases}$$

Так задается галилеева метрика на поверхности, функция

$$E = x_u^2 + y_u^2 > 0$$

называется метрической функцией поверхности $\gamma(t,u)$. Нижние индексы t, u у некоторых величин означают, что рассматриваются их частные производные по параметрам t, u. Вторая квадратичная форма поверхности равна

$$II = Adu^2 + 2Bdudt + Cdt^2,$$

ее коэффициенты:

$$A = \gamma_{uu}\vec{n},\ B = \gamma_{ut}\vec{n},$$
$$C = \gamma_{tt}\vec{n};\ \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{E}}(-y_u, x_u). \tag{2}$$

Галилеева связность задается равенствами:

$$\Gamma_{11}^1 = 0,\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{E_t}{2E}, \Gamma_{22}^1 = \frac{E_u}{2E}, \Gamma_{ij}^2 = 0. \tag{3}$$

Основы геометрии Галилея изложены в [1, с. 46—101], свойства символов Кристоффеля изучаются в [2], в [3] доказана определяемость поверхности коэффициентами первой и второй квадратичных форм. В [4] начато исследование поверхностей с постоянной метрической функцией, ниже эти исследования продолжаются.

1. Постоянная галилеева связность. Считаем, что символы Кристоффеля Γ_{ij}^{k} постоянны.

Лемма 1. *Постоянная галилеева связность является нулевой.*

Обозначим:

$$\Gamma_{12}^{1} = g,\ \Gamma_{22}^{1} = h. \qquad (4)$$

Метрическая функция $E = E(t,u)$ является решением дифференциального уравнения с полным дифференциалом $\Gamma_{12}^{1}dt + \Gamma_{22}^{1}du = 0$, теорема 2 в [2], общее решение уравнения есть функция $L(t,u) = \ln\frac{1}{c}E(t,u)$, c — произвольная постоянная, откуда $E = ce^{L(t,u)}$. Вместо множителя $\frac{1}{c}$ в [2] здесь мы написали c, что не нарушает общности решения. По заданным значениям символов Кристоффеля (4) имеем

$$E(t,u) = ce^{gt+hu}. \qquad (5)$$

Подсчитаем символы Кристоффеля по (5), для этого сначала находим производные $E_t = cge^{gt+hu}$, $E_u = che^{gt+hu}$, теперь по (4): $\Gamma_{12}^{1} = \frac{E_t}{2E} = \frac{cge^{gt+hu}}{2ce^{gt+hu}} = \frac{g}{2}$, $\Gamma_{22}^{1} = \frac{h}{2}$. По заданным значениям (4): $\Gamma_{12}^{1} = g = \frac{g}{2}$, $\Gamma_{22}^{1} = h = \frac{h}{2}$. Равенства возможны только при $g = h = 0$, т. е. постоянная галилеева связность является нулевой. #

Теперь справедлива

Теорема 1. *Метрическая функция всякой поверхности (1) с постоянной галилеевой связностью постоянна*: $E(t,u) = c$.

По (5) на основе леммы 1 имеем $E = ce^{0} = c$.

2. Поверхности с постоянными коэффициентами квадратичных форм. Опишем поверхности, для которых коэффициенты E, A, B, C постоянны. Функции $x(t,u)$, $y(t,u)$, компоненты функции (1), согласно [3], являются решением следующей системы дифференциальных уравнений с частными производными, которая составлена по формулам (2):

$$\begin{cases} x_u^2 + y_u^2 = E, \\ -x_{uu}y_u + y_{uu}x_u = A\sqrt{E}, \\ -x_{ut}y_u + y_{ut}x_u = B\sqrt{E}, \\ -x_{tt}y_u + y_{tt}x_u = C\sqrt{E}. \end{cases} \tag{6}$$

На основании условия $E > 0$ полагаем $E = c^2$. Первому уравнению системы (6) удовлетворяют функции

$$x_u = c\cos w,\ y_u = c\sin w,\ w = w(t,u). \tag{7}$$

Лемма 2. *В равенствах (7)*: $w = Au + Bt + a$, $c = 1$.

\# Находим: $x_{uu} = -cw_u \sin w, y_{uu} = cw_u \cos w$; $x_{ut} = -cw_t \sin w$, $y_{ut} = cw_t \cos w$. По второму и третьему уравнениям системы (6) соответственно получаем: $-x_{uu}y_u + y_{uu}x_u = c^2 w_u = cA$ и $c^2 w_t = cB$; откуда $w_u = c^{-1}A$, $w_t = c^{-1}B$. Имеем дифференциальное уравнение с полным дифференциалом $Bdt + Adu = 0$, его решение $w = Bt + Au + a$. По (7) находим: $x = \int x_u du = cA^{-1}\sin w + b_1(t)$, $y = -cA^{-1}\cos w + b_2(t)$. Далее, $x_{tt} = -cB^2A^{-1}\sin w + b_1''(t)$, $y_{tt} = cB^2A^{-1}\cos w + b_2''(t)$. По четвертому уравнению системы (6) при условии $b_1'' = b_2'' = 0$ выполняется: $c^2B^2A^{-1} = cC$, значит,

$$cB^2A^{-1} - C = 0. \tag{8}$$

Согласно [1, с. 81], полная кривизна поверхности равна $K = AC - B^2$. По формуле Гаусса [1, с. 94], $K = \dfrac{E_t^2 - 2E_{tt}E}{4E}$.

Так как $E = \mathrm{const}$, то $K = 0$. Это означает, что $B^2 = AC$, и по (8) для любого C $c = 1$. #

Теорема 2. *Система уравнений (6) определяет при* $A \neq 0$:

$$\gamma(t,u) = (t, A^{-1}\cos(Bt + Au), A^{-1}\sin(Bt + Au)), \qquad (9)$$

$$\gamma(t,u) = (t, A^{-1}\cos Au, A^{-1}\sin Au),\ B = 0; \qquad (10)$$

круговой цилиндр и при $A = 0$ *— прямой геликоид:*

$$\gamma(t,u) = (t, u\cos Bt, \sin Bt); \qquad (11)$$

или галилееву плоскость при $A = B = 0$:

$$\gamma(t,u) = (t,\ u\cos a + tb_1 \sin a,\ u\sin a + tb_2 \cos a). \qquad (12)$$

При $A \neq 0$ и $a = -\pi/2$ выполняются равенства $x_u = -\sin(Bt + Au)$, $y_u = \cos(Bt + Au)$, тогда $x = A^{-1}\cos(Bt + Au) + {}$ $+ c_1$, $y = A^{-1}\sin(Bt + Au) + c_2$. Выбирая начальные условия, чтобы $c_1 = c_2 = 0$, имеем поверхность (9). u-линии этой поверхности есть $\gamma(t_0, u) = (t_0, A^{-1}\cos(Bt_0 + Au),\quad A^{-1}\sin(Bt_0 + Au))$ — окружности в плоскостях, параллельных Oxy, радиуса A^{-1} независимо от значения $t = t_0$. t-линии поверхности есть винтовые линии $\gamma(t, u_0) = (t, A^{-1}\cos(Bt + Au_0), A^{-1}\sin(Bt + Au_0))$ на цилиндре радиуса A^{-1} с образующей, параллельной оси времени Ot, шаг линии равен 1. Поверхность (9) является цилиндрической. В частности, при $B = 0$ поверхность (10) остается круговым цилиндром.

Если $A = 0$ и $a = 0$, то $x_u = \cos Bt, y_u \sin Bt$. При нулевых постоянных интегрирования имеем прямой геликоид (11).

Всякая евклидова плоскость пространства Γ^3 описывается уравнением $t = t_0$, поэтому (12) есть произвольная галилеева плоскость, ее метрическая функция $E = 1$, а для второй квадратичной формы: $A = B = C = 0$. #

Различные значения ненулевых коэффициентов A, B в функциях (9) — (11) не изменяют вида поверхностей. Выбранные значения постоянных интегрирования a, b_i, c_j также не изменяют вида поверхностей.

Поверхности с одной и той же первой квадратичной формой называются изометричными — это поверхности пространства-времени Галилея с одинаковыми метрическими функциями $E(t, u)$.

Доказанное утверждение также выражает следующий факт.

Теорема 3. *Изометричные поверхности 3-мерного пространства-времени Галилея* Γ^3*, имеющие постоянную галилееву связность и постоянные коэффициенты второй квадратичной формы, исчерпываются галилеевыми плоскостями, круговыми цилиндрами с временными образующими и прямыми геликоидами. При этом метрическая функция тождественно равна 1. Поверхности изометричны независимо от значений коэффициентов второй квадратичной формы поверхностей.*

В [4] рассмотрены поверхности пространства-времени Галилея Γ^3, метрическая функция которых постоянна, коэффициенты второй квадратичной формы — изменяющиеся или постоянные. Выше изучаются поверхности с нулевой галилеевой связностью, по лемме 1, эти поверхности относятся к классу поверхностей с постоянной метрической функцией. Теорема 3 может быть сформулирована в следующем виде.

Теорема 4. *Всякая поверхность пространства-времени Галилея, имеющая нулевую галилееву связность, получается в результате изгибания галилеевой плоскости пространства* Γ^3.

Список литературы

1. *Долгарев А. И.* Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств. Пенза, 2005.

2. *Долгарев И. А.* Поверхности пространства-времени Галилея по символам Кристоффеля // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. Пенза, 2008. №2(6). С. 39—50.

3. *Долгарев И. А.* Системы дифференциальных уравнений в частных производных для поверхностей пространства Галилея: дис. … канд. физ.-мат. наук. Пенза, 2007.

4. *Долгарев И. А.* Поверхности 3-мерного пространства Галилея с постоянной метрической функцией // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2008. Вып. 39. С. 38—43.

I. Dolgarew

SURFACES WITH CONSTANT GALILEAN CONNECTION

It is shown that any constant Galilean connection is zero. In Galilean space-time planes, circular cylinders and helicoids are isometric.

УДК 514.76

А. И. Егоров

(Пензенский государственный педагогический университет)

МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ ФИНСЛЕРОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОБОБЩЕНИЯ $(p+1)$-ЛАКУНАРНОСТИ ОСНОВНОГО СЛУЧАЯ

Находятся все метрические функции $F(x, y)$, $H(x, u)$ максимально подвижных финслеровых пространств и их обобщений определенной метрики $(p+1)$-лакунарности основного случая.

В работе определяются все метрические функции $F(x,y)$, $H(x,u)$ максимально подвижных финслеровых пространств и их обобщений определенной метрики различных лакунарностей основного случая. Исследования ведутся в локальном аспекте. Используются обозначения и понятия, введенные в работе [1]. Искомые пространства допускают в каче-