УДК 514.75

М.А. Чешкова
(Алтайский государственный университет)

К ГЕОМЕТРИИ РЕЗНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Изучается резная гиперповерхность в евклидовом пространстве E^n.

Резными называются поверхности, у которых плоскости одного семейства плоских линий кривизны ортогональны поверхности. Семейство плоских линий кривизны рассматриваемой поверхности будет геодезическим [1, с.374]. Резную поверхность можно рассматривать как поверхность, составленную из ортогональных траекторий однопараметрического семейства плоскостей. Дадим следующее

Определение. Гиперповерхность M называется резной, если одна линия кривизны – геодезическая, а $(n-2)$-распределение Δ, ортогональное касательному к ней, является инволютивным.

В этом случае геодезическая линия кривизны γ – плоская, а интегральные многообразия инволютивного распределения Δ определяют $(n-2)$-мерные ортогональные траектории Q.

Обозначим через $X_i (i=1,\dots,n-2), U$ – орты главных направлений, $k_i, \bar{k}$ – главные кривизны гиперповерхности M, причем $U, \bar{k}$ соответствуют геодезической линии γ. Если главные кривизны отличны от нуля, то определены фокальные гиперповерхности $(F^i),(F)$ конгруэнции нормалей гиперповерхности M, где $F^i = r + \frac{1}{k_i} n;\ F = r + \frac{1}{\bar{k}} n;\ k_i \bar{k} \neq 0;\ i=1,\dots,n-2;$ r – радиус-вектор текущей точки гиперповерхности $M;$ n-орт нормали. Ранее были получены следующие результаты [2].

Теорема А. *Если резная гиперповерхность в E^n не имеет равных главных кривизн, то n-2 фокальные гиперповерхности $(F^i), i=1,\dots,n-2$ конгруэнции нормалей – 1-параболические.*

Теорема В. *Если резная гиперповерхность в E^n не имеет равных главных кривизн, то прямолинейные образующие фокальных гипер-*

поверхностей $(F^i), i=1,\dots,n-2$ *конгруэнции нормалей принадлежат 2-плоскости, содержащей геодезическую линию кривизны.*

В данной работе продолжается исследование гиперповерхностей $(F^i),(F)$.

Теорема 1. *Если резная гиперповерхность* M *в* E^n *не имеет равных главных кривизн и* $\bar{k} \neq 0$, *то фокальная гиперповерхность* (F) *конгруэнции нормалей – резная.*

Теорема 2. *Если все фокальные гиперповерхности* (F^i), $i=1,\dots,n-2$ *цилиндрические, то прямолинейные образующие цилиндров параллельны.*

Теорема 3. *Если все фокальные гиперповерхности* (F^i), $i=1,\dots,n-2$ *цилиндрические, то (n-2)-поверхности Q принадлежат параллельным гиперплоскостям, ортогональным прямолинейным образующим цилиндров.*

1. Основные формулы. Рассмотрим гладкую гиперповерхность в евклидовом пространстве E^n. Обозначим $F(M)$ – R-алгебру дифференцируемых на M функций; T_s^q – F-модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q,s); $\chi(M)$ – алгебру Ли векторных полей на M; ∂ – дифференцирование; $\langle , \rangle$ – скалярное произведение в E^n.

Формулы Гаусса-Вейнгартена гиперповерхности M имеют вид [3, с. 36]

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + \beta(X,Y)n, \partial_X n = -AX, \tag{1}$$

где $A \in T_1^1(M), X,Y \in \chi(M), \beta(X,Y) = g(AX,Y)$ – вторая фундаментальная форма, A – оператор Вейнгартена; ∇ – связность Леви-Чивита метрики $g(X,Y) = \langle X,Y \rangle$.

Выполняются уравнения Гаусса-Кодацци

$$R(X,Y)Z = \beta(Y,Z)AX - \beta(X,Z)AY,\ dA(X,Y) = 0, \tag{2}$$

где $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ – тензор кривизны связности ∇; $dA(X,Y) = \nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X,Y]$ – внешний дифференциал поля A в связности ∇.

Так как $X_i, i-1,\dots,n-2, U$ – орты главных направлений, $k_i, \bar{k}$ – главные кривизны гиперповерхности M, причем $U, \bar{k}$ соответствуют геодезической линии γ, то

$$AX_i = k_i X_i, AU = \bar{k}\ U, \nabla_U U = 0. \qquad (3)$$

Кроме того,

$$\langle \nabla_U X_i, U \rangle = 0,\ \langle \nabla_{X_i} U, U \rangle = 0,\ \langle \nabla_U X_i, X_i \rangle = 0;$$

$$\langle \nabla_{X_i} X_j, U \rangle + \langle \nabla_{X_i} U, X_j \rangle = 0. \qquad (4)$$

Из равенства $dA(X_i, U) = 0$ в силу (3; 4) получим

$$X_i \bar{k} = 0, i = 1, \dots, n-2; \qquad (5)$$

$$(\nabla_{X_i} U)^i = h_i X_i, h_i = -\frac{Uk_i}{k_i - \bar{k}}; \qquad (6)$$

$$(\bar{k} - k_j)(\nabla_{X_i} U)^j - (k_i - k_j)(\nabla_U X_i)^j = 0, i \neq j, \qquad (7)$$

где $(.)^j$ – составляющая, параллельная X_i. Так как по условию $(n-2)$– распределение Δ, определяемое полями $X_1, \dots, X_{n-2}$, инволютивное, то

$$[X_i, X_j]^\perp = (\nabla_{X_i} X_j)^\perp - (\nabla_{X_j} X_i)^\perp = 0, \qquad (8)$$

где $(.)^\perp$ – составляющая, параллельная U. Рассмотрим

$$dA(X_i, X_j) = \nabla_{X_i} AX_j - \nabla_{X_j} AX_i - A[X_i, X_j] = (X_i k_j) X_j +$$

$$+ k_j \nabla_{X_i} X_j - (X_j k_i) X_i - k_i \nabla_{X_j} X_i - A[X_i, X_j] = 0.$$

Используя (8) и приравнивая нулю составляющую, параллельную U, получим

$$k_j (\nabla_{X_i} X_j)^\perp - k_i (\nabla_{X_j} X_i)^\perp = 0. \qquad (9)$$

При $k_i - k_j \neq 0$ из (8; 9) имеем

$$(\nabla_{X_i} X_j)^\perp = 0, i \neq j. \qquad (10)$$

Из равенств (4; 10) имеем $\langle X_j, \nabla_{X_i} U \rangle = 0, i \neq j.$ В силу (6; 4) получим

$$\nabla_{X_i} U = h_i X_i, h_i = -\frac{Uk_i}{k_i - \bar{k}}. \qquad (11)$$

Из (4; 7; 11) следует, что

$$\nabla_U X_i = 0. \qquad (12)$$

Рассмотрим $R(X_i, U)U = \nabla_{X_i} \nabla_U U - \nabla_U \nabla_{X_i} U - \nabla_{[X_i U]} U.$ Имеем

$$[X_i, U] = \nabla_{X_i} U - \nabla_U X_i = h_i X_i,\ R(X_i, U)U = -(Uh_i + h_i^2) X_i.$$

С другой стороны, в силу (2) $R(X_i, U)U = k_i \bar{k} X_i$. Откуда

$$Uh_i = -k_i \bar{k} - h_i^2. \tag{13}$$

2. Доказательство теоремы 1. Если $\bar{k} \neq 0$, то рассмотрим фокальную гиперповерхность (F). Имеем

$$\partial_{X_i} F = \frac{\bar{k} - k_i}{\bar{k}} X_i, \ \partial_U F = -\frac{U\bar{k}}{\bar{k}^2} n. \tag{14}$$

Таким образом, $U = n^F$ есть орт нормали к гиперповерхности (F).

Рассмотрим отображение $f : M \to F$. Имеем

$$dfX_i = \frac{\bar{k} - k_i}{\bar{k}} X_i, \ dfU = -\frac{U\bar{k}}{\bar{k}^2} n;$$

$$\partial_{X_i} n^F = \partial_{X_i} U = \nabla_{X_i} U + b(X_i, U)n = h_i X_i = \bar{\bar{k}}_i dfX_i, \quad \bar{\bar{k}}_i = \frac{h_i \bar{k}}{\bar{k} - k_i};$$

$$\partial_U n^F = \partial_U U = \nabla_U U + b(U, U)n = \bar{k} n = \bar{\bar{k}} dfU, \quad \bar{\bar{k}} = \frac{-\bar{k}^3}{U\bar{k}}.$$

Главные направления X_i, U гиперповерхности M при отображении df перешли в главные направления dfX_i, dfU гиперповерхности (F), вектор n есть орт главного направления dfU, а линия $\tilde{\gamma} = f(\gamma)$ есть линия кривизны на (F). Соприкасающаяся плоскость $\Pi(\tilde{\gamma})$ кривой $\tilde{\gamma}$ определяется векторами $n, \partial_U n$, т.е. $\Pi(\tilde{\gamma}) = \{n, U\}$. Плоскость $\Pi(\tilde{\gamma})$ проходит через нормаль $n^F = U$. Таким образом, линия кривизны $\tilde{\gamma} = f(\gamma)$ есть геодезическая, а гиперповерхность (F) есть резная гиперповерхность.

Следствие. Линия $\tilde{\gamma} = f(\gamma) -$ плоская.

Доказательство. Рассмотрим соприкасающуюся плоскость $\Pi(\tilde{\gamma}) = \{n, U\}$ кривой $\tilde{\gamma} = f(\gamma)$. Так как $\partial_U n \in \Pi(\tilde{\gamma})$, $\partial_U U \in \Pi(\tilde{\gamma})$, то соприкасающаяся плоскость Π есть постоянная вдоль кривой $\tilde{\gamma} = f(\gamma)$, следовательно, кривая $\tilde{\gamma} = f(\gamma) -$ плоская.

3. Доказательство теоремы 2. Так как

$$\partial_{X_i} F^i = (X_i \frac{1}{k_i})n, \ \partial_{X_j} F^i = (X_j \frac{1}{k_i})n + \frac{k_i - k_j}{k_i} X_j, i \neq j, \ \partial_U F^i = \frac{k_i - \bar{k}}{k_i^2}(k_i U + h_i n),$$

$$\partial_U (k_i U + h_i n) = (Uk_i)U + k_i(\nabla_U U + \beta(U, U)n) + (Uh_i)n - h_i \bar{k} U = -h_i(k_i U + h_i n),$$

то нормалью n^i к гиперповерхности F^i является орт X_i. А так как $\partial_U n^i = \partial_U X_i = 0,$ то гиперповерхность (F^i) имеет нулевую главную кривизну, т.е. является 1-параболической [4]. Интегральной кривой поля U на гиперповерхности (F^i) соответствует прямая линия с направляющим вектором $l_i = k_i U + h_i n.$

Потребуем, чтобы гиперповерхность (F^i) была цилиндрической. Тогда $\partial_{X_j} l_i // l_i$. Имеем

$$\partial_{X_j} l_i = (X_j k_i)U + k_i(\nabla_{X_j} U + \beta(X_j, U)n) + (X_j h_i)n - h_i k_j X_j =$$
$$= (X_j k_i)U + (k_i h_j - h_i k_j)X_j + (X_j h_i)n // k_i U + h_i n.$$

Таким образом,

$$k_i h_j = k_j h_i, \quad \frac{X_j k_i}{k_i} = \frac{X_j h_i}{h_i}. \tag{15}$$

Положим $\dfrac{h_i}{k_i} = \dfrac{h_j}{k_j} = t.$ Формулы (15) примут вид:

$$h_i = t k_i, \quad X_j t = 0. \tag{16}$$

Таким образом, $l_i = k_i(U + tn)$ и все образующие цилиндров параллельны.

4. Доказательство теоремы 3. Рассмотрим соприкасающееся пространство $\Pi(Q)$ к (n-2)-поверхности Q. Оно определяется векторами $X_i, \partial_{X_j} X_i$. Имеем в силу (10) $\partial_{X_j} X_i \in \Delta,\ i \neq j$. Дифференцируя равенство $\langle X_i, U \rangle = 0$ вдоль X_i и используя (11), получим $(\nabla_{X_i} X_i)^{\perp} = -h_i U$, $\partial_{X_i} X_i = -h_i U + k_i n = k_i(-tU + n)$. Откуда следует, что вектор $l = U + tn$ есть нормаль $\Pi(Q)$, он постоянный и $Q \in \Pi(Q)$.

Список литературы

1. *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., 1963. 540 с.

2. *Чешкова М.А.* Резные гиперповерхности // Материалы четвертой краевой конференции по математике. Барнаул, 2001. С. 14.

3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 2. 414 с.

4. *Борисенко А.А.* О полных параболических поверхностях // Укр. геом. сб. 1985. Вып. 28. С. 8 – 19.

M. Cheshkova

ON GEOMETRY OF CUT HYPERSURFACES

The cut hypersurface in Euclidean space E^n examined.

УДК 514.76

Ю.И. Шевченко
(Калининградский государственный университет)

ТРИ РАССЛОЕНИЯ ПРОЕКТИВНОЙ ГРУППЫ

Рассмотрена группа преобразований GP(n) n-мерного проективного пространства P_n, выделяемая факторизацией из линейной группы GL(n+1). Проективная группа GP(n) содержит аффинную группу GA(n), коаффинную группу $GA^*(n)$ и линейную группу GL(n), являющиеся подгруппами стационарности гиперплоскости P_{n-1}, точки A и 0-пары (A,P_{n-1}), $A\notin P_{n-1}$. Показано, что проективная группа GP(n) представляется в виде трех главных расслоений, типовыми слоями которых являются подгруппы GA(n), $GA^*(n)$ и GL(n): 1) аффинных реперов над двойственным проективным пространством гиперплоскостей $P_n^* = Gr(n-1,n)$ – многообразием Грассмана гиперплоскостей; 2) коаффинных реперов над исходным проективным пространством $P_n = Gr(0,n)$ – многообразием Грассмана точек; 3) линейных реперов со связностью над 2n-мерным пространством 0-пар Π_{2n} – подмножеством неинцидентных пар (A,P_{n-1}) прямого произведения $P_n \times P_n^* = Gr(0,n)\times Gr(n-1,n)$.

1. Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A,A_I\}$ ($I,J,K,L = \overline{1,n}$). Деривационные формулы вершин репера имеют вид

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \tag{1}$$

причем базисные формы $\omega^I, \omega_J^I, \omega_I$ эффективно действующей в пространстве P_n проективной группы GP(n) удовлетворяют структурным уравнениям (см., например. [1, с. 173]):