УДК 550.338

† *С. Б. Лебле, Е. С. Смирнова*

# О ДИАГНОСТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ АКУСТИЧЕСКОЙ И ЭНТРОПИЙНОЙ МОДАМИ

Поступила в редакцию 13.10.2021 г.
Рецензия от 29.10.2021 г.



*Аналитически установлены соотношения, связывающие возмущения для акустического и энтропийного (стационарного) режимов, и получены решаемые диагностические уравнения. Эти уравнения задают акустические и энтропийные режимы в произвольном стратифицированном газе при условии устойчивости. Диагностические соотношения не зависят от времени и определяют акустический и энтропийный режимы. Они предоставляют возможность однозначно разложить общий вектор возмущений на акустическую и неакустическую (энтропийную) части в любой момент в пределах всего доступного диапазона высот.*

*The relations connecting the disturbances for the acoustic and entropy (stationary) modes are analytically established, and the diagnostic equations to be solved are obtained. These equations define the acoustic and entropy modes in an arbitrary stratified gas under the condition of stability. The diagnostic relationships are independent of time and determine the acoustic and entropy modes and provide the ability to unambiguously decompose the general disturbance vector into acoustic and non-acoustic (entropy) parts at any time within the entire available range of heights.*

**Ключевые слова:** акустика неоднородных сред, диагностика волнового режима, энтропийный режим, инициализация гидродинамического поля

**Keywords:** acoustics of non-uniform media, wave mode diagnostics, entropy mode, initialization of hydrodynamic field

## Введение

В данной работе рассматривается динамика плоского возмущения идеального атмосферного газа на фоне равновесной температуры, зависящей от высоты, под действием гравитационного поля. Существует три типа движения в одномерной (1D) экспоненциальной атмосфере: две акустические моды с разным направлением распространения и энтропийная мода, соответствующая нулевой частоте в линейном потоке без потерь [1; 2].

Основная цель исследования — диагностика как разложение суммарного возмущения на волновые и неволновые моды в случае произвольной устойчивой стратификации. Такое разделение полезно при интерпретации экспериментальных данных, относящихся к сильно возмущенной атмосфере, а также при валидации численного моделирования [3]. Особенно это важно при установлении местоположения источников волн и моделировании потепления атмосферы [4; 5], связанного с волновым нагревом атмосферного газа. Предлагаемый метод позволяет выделять энтропийную моду из общего поля возмущения как функцию высоты и оценивать ее вклад в общую энергию возмущения. Ввиду того что эволюция энтропийной моды определяет изменение параметров фонового состояния среды распространения, что, в свою очередь, может напрямую влиять на процесс распространения акустических волн в этой среде, например на скорость ее распространения, выделение энтропийной компоненты является важной задачей диагностики экспериментальных данных.



Теоретическая основа диагностики опирается на уравнения баланса и физически обоснованные граничные условия. В данной работе, развивающей идеи [6], режимы плоского течения определяются с помощью соотношений между конкретными возмущениями, которые не зависят от времени. Мы называем такие отношения «*диагностическими соотношениями*». Они справедливы для произвольной зависимости равновесной температуры от координаты в случае стабильной атмосферы. Эти соотношения дают возможность в любой момент аналитически различать моды из общего поля, решая диагностические уравнения, которые являются прямым следствием упомянутых диагностических соотношений. Это служит инструментом для прогнозирования их динамики и оценки энергии мод (которая остается постоянной во времени). Это, несомненно, важно для приложений в метеорологии и диагностике динамики атмосферы, включая понимание таких явлений, как вариации равновесной температуры стратосферы, например так называемое потепление [6], обычно понимаемое как среднее за период. Такое явление, также называемое «хитингом», можно объяснить в рамках нелинейного взаимодействия акустических волн и энтропийных мод при наличии диссипации [5; 7]. Вся экспозиция также важна для диагностики волновых и неволновых режимов, чтобы следовать экспериментальным наблюдениям и численному моделированию [3] как элементу мониторинга динамики атмосферы [8]. Авторы [8] подчеркивают, что акустическая составляющая возмущения первой достигает ионосферных высот.

## Базовые уравнения

Случай неэкспоненциальной атмосферы в равновесии позволяет зафиксировать энтропию и акустический режим без разделения на акустические волны, направленные «вверх» и «вниз» [6; 9]. Главный функциональный параметр в данном случае — высота однородной атмосферы $H(z)$, зависящая от высоты, как, например, в [10]. Плотность фона, поддерживающая равновесное распределение температуры $T(z)$, принимает вид

$$\bar{\rho}(z)=\frac{\bar{\rho}(0)H(0)}{H(z)}\cdot\exp\left(-\int_0^z\frac{dz'}{H(z')}\right), \tag{1}$$

где

$$H(z) = \frac{\overline{p}}{\overline{\rho} g} = \frac{T(z)(\mathrm{Cp} - \mathrm{Cv})}{g}. \quad (2)$$

Здесь используются обычные параметры газа: $g$ – ускорение свободного падения, $C_p, C_v$ — молярные теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно. Удобно ввести величину $\varphi'$ вместо возмущения плотности $\rho'$:

$$\varphi' = p' - \gamma \frac{\overline{p}}{\overline{\rho}} \rho', \quad (3)$$

где параметр $\gamma = C_p / C_v$. Так как в пределе при $g = 0$ и постоянной фоновой температуре $T$ величина $\varphi'$ отвечает за отклонение энтропии идеального газа от равновесного значения [11; 12], назовем $\varphi'$ возмущением энтропии.

Как и в [13], воспользуемся классическим набором переменных:

$$P = p' \cdot \exp\left( \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{2\mathrm{H}(z')} \right), \quad (4)$$

$$\Phi = \varphi' \cdot \exp\left( \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{2\mathrm{H}(z')} \right), \quad (5)$$

$$U = V \cdot \exp\left( -\int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{2\mathrm{H}(z')} \right), \quad (6)$$

где $P$, $\Phi$, $U$ — новые величины, которые представляют возмущение давления $p'$, возмущение энтропии $\varphi'$ и вертикальную скорость потока $V$ соответственно. Система уравнений баланса количества движения, энергии и массы в новых переменных имеет следующий вид (см.: [9; 13]):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\overline{\rho}(0)} \left( \frac{\gamma - 2}{2\gamma H(0)} - \frac{H(0)}{H(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right) P + \frac{\Phi}{\gamma H(0) \overline{\rho}(0)}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\gamma H(0) \overline{\rho}(0) \frac{\partial U}{\partial z} - g H(0) \overline{\rho}(0) \frac{\gamma - 2}{2H(z)} U, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\nu(z)}{H(z)} g H(0) \overline{\rho}(0) U, \quad (9)$$

где

$$\nu(z) = \gamma - 1 + \gamma \frac{dH(z)}{dz} > 0. \quad (10)$$

## Диагностические соотношения

Связь между возмущениями давления и энтропии в акустической моде для произвольной устойчивой стратификации одномерной атмосферы может быть получена путем подстановки уравнения (9) в уравнение (8) [13]. В результате диагностическая связь между возмущениями давления и энтропии в акустической моде следующая:

$$P_a = \left( \frac{\gamma - 2}{2\nu(z)} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \frac{H(z)}{\nu(z)} \right) \Phi_a. \tag{11}$$

Первое уравнение базовой системы (7) при $U_0 = 0$ фиксирует диагностическое соотношение в стационарном (энтропийном) режиме:

$$\Phi_0 = \left( -\frac{\gamma - 2}{2} + \gamma H(z) \frac{\partial}{\partial z} \right) P_0. \tag{12}$$

Соотношения (11) и (12) можно переписать в виде

$$P_a + D_a \Phi_a = 0, \tag{13}$$

$$\Phi_0 + D_0 P_0 = 0, \tag{14}$$

где определены дифференциальные операторы первого порядка:

$$D_a = -\left( \frac{\gamma - 2}{2\nu(z)} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \frac{H(z)}{\nu(z)} \right), \tag{15}$$

$$D_0 = \left( -\frac{\gamma - 2}{2} + \gamma H(z) \frac{\partial}{\partial z} \right). \tag{16}$$

Мы называем уравнения (13) и (14) *диагностическими соотношениями*. Они определяют акустический и энтропийный режимы в одномерной атмосфере с произвольной стратификацией.

## Диагностические уравнения

Введем операторнозначный двухкомпонентный вектор

$$\begin{pmatrix} 1 & D_a \end{pmatrix} \tag{17}$$

и столбец, представляющий вектор состояния:

$$\begin{pmatrix} P \\ \Phi \end{pmatrix} \tag{18}$$

Действие (17) на (18) определяет обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, которое мы назовем *диагностическим*:

$$(1 - D_a D_0) P_0 = \mathrm{P} + D_a \Phi = f_0(z). \tag{19}$$

Функция $f_0(z)$ задается экспериментальными или численными данными возмущения параметров среды с использованием соотношений (4–6).

Аналогичным образом, подействовав операторнозначным вектором $(D_0 \quad 1)$ на вектор состояния, получим второе диагностическое уравнение для акустических компонент:

$$\left(D_a D_0 - 1\right) P_a = D_a D_0 P + D_a \Phi = f_a(z). \tag{20}$$



Решение дифференциальных уравнений (19) и (20) с соответствующими граничными условиями позволяет выделить акустическую и энтропийную моды из общего поля возмущения давления.

## Заключение

Предложенный метод диагностики возмущения атмосферного газа, основанный на аналитически установленых соотношениях, заложенных в системе уравнений гидротермодинамики, позволяет оценить вклады акустической и энтропийной мод в суммарное волновое возмущение.

В качестве перспективы развития данного диагностического аппарата важно упомянуть, что после диагностики отдельных параметров возмущения можно провести оценку энергетических вкладов каждой компоненты с помощью уже известной формулы для полной энергии [9].

*Исследование выполнено при финансовой поддержке БФУ им. Канта в рамках научного проекта №122051300013-8.*

## Список литературы

1. *Kovasznay L.S.G.* Turbulence in Supersonic Flow // J. Aeronaut. Sci. 1953. №20. P. 657–674. doi: 10.2514/8.2793.

2. *Chu B.-T., Kovásznay L.S.G.* Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas // J. Fluid Mech. 1958. №3. P. 494. doi: 10.1017/S0022112058000148.

3. *Leble S., Vereshchagina I.* Problem of disturbance identification by measurement in the vicinity of a point // Task Q. 2016. №20. P. 131–141.

4. *Butler A.H., Sjoberg J.P., Seidel D.J., Rosenlof K.H.* A sudden stratospheric warming compendium // Earth Syst. Sci. Data. 2017. №9. P. 63–76.

5. *Karpov I.V., Kshevetsky S.P., Borchevkina O.P. et al.* Disturbances of the upper atmosphere and ionosphere caused by acoustic-gravity wave sources in the lower atmosphere // Russ. J. Phys. Chem. B. 2016. №10. P. 127–132.

6. *Brezhnev Y., Kshevetsky S., Leble S.* Linear initialization of hydrodynamical fields // Atmos. Ocean. Phys. 1994. №30. P. 84–88.

7. *Perelomova A.* Weakly nonlinear dynamics of short acoustic waves in exponentially stratified gas // Arch. Acoust. 2009. №34.P. 127–143.

8. *Zettergren M.D., Snively J.B.* Ionospheric response to infrasonic-acoustic waves generated by natural hazard events // J. Geophys. Res. Space Phys. 2015. №120. P. 8002–8024. doi: 10.1002/2015JA021116.

9. *Leble S., Perelomova A.* Problem of proper decomposition and initialization of acoustic and entropy modes in a gas affected by the mass force // Appl. Math. Model. 2013. №37. P. 629—635.

10. *U. S. Standard* Atmosphere / U.S. Government Printing Office. Washington, 1976.

11. *Perelomova A.* Nonlinear dynamics of directed acoustic waves in stratified and homogeneous liquids and gases with arbitrary equation of state // Arch. Acoust. 2000. №25. P. 451—463.

12. *Perelomova A.* Nonlinear dynamics of vertically propagating acoustic waves in a stratified atmosphere // Acta Acoust. 1998. №84. P. 1002—1006.

13. *Leble S., Perelomova A.* Decomposition of acoustic and entropy modes in a non-isothermal gas affected by a mass force // Arch. Acoust. 2018. №43. P. 497—503.



## Об авторах

Сергей Борисович Лебле — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: lebleu@mail.ru

Екатерина Сергеевна Смирнова — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: smirnova.ekaterina.serg@gmail.com

## The authors

Prof. Sergey B. Leble, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: lebleu@mail.ru

Ekaterina S. Smirnova, PhD Student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: smirnova.ekaterina.serg@gmail.com