УДК 514.76

***А.Я. Султанов*[1], *Г.А. Султанова*[2]**
[1, 2] Пензенский государственный университет, Россия
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru

Аффинные преобразования касательного расслоения со связностью полного лифта над многообразием с линейной связностью специального типа

Получены точные оценки сверху размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в касательных расслоениях со связностью полного лифта в случае, когда базовое пространство является многообразием, снабженным непроективно-евклидовой линейной связностью специального типа.

Ключевые слова: дифференцируемое многообразие, касательное расслоение, полный лифт линейной связности, вертикальный лифт векторных полей, полный лифт векторных полей, вертикально-векторное поднятие аффинора, горизонтально-векторное поднятие аффинора, инфинитезимальное аффинное преобразование, алгебра Ли.

1. Основные определения и факты

Пусть M — дифференцируемое многообразие класса C^∞ размерности n, (TM, π, M) — его касательное расслоение с канонической проекцией π, $\mathrm{A} = \{a\varepsilon^0 + b\varepsilon^1 \mid a, b \in R, \varepsilon^0 = 1, (\varepsilon^1)^2 = 0\}$ — алгебра дуальных чисел со стандартным базисом $(\varepsilon^0, \varepsilon^1)$, A^* — векторное пространство линейных форм, за-

---

Поступила в редакцию 03.04.2018 г.

данных на A и принимающих значения в поле R действительных чисел. На A^* выберем дуальный базис $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ к базису $(\varepsilon^0, \varepsilon^1)$. Определим произведение $a^* \cdot b$, где $a^* \in A^*, b \in A$, условием $a^* \cdot b(c) = a^*(bc)$ для любого $c \in A$. Обозначим через $C^\infty(M)$ алгебру гладких класса C^∞ функций, заданных на *M*.

Каноническая проекция $\pi : TM \to M$ для каждой функции $f \in C^\infty(M)$ позволяет определить функцию $f_{(0)} = f \circ \pi$, называемую вертикальным лифтом функции f. Если (x^i) — локальные координаты в некоторой окрестности $U \in M$, то в $\pi^{-1}(U) \subset TM$ возникают естественные локальные координаты (x_0^i, x_1^i). Закон преобразования этих координат при переходе от локальной карты $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$ к локальной карте $(\pi^{-1}(V), \bar{x}_0^i, \bar{x}_1^i)$ имеет вид [9]

$$\bar{x}_0^i = \bar{x}_0^i(x_0^1, ..., x_0^n), \;\; \bar{x}_1^i = \frac{\partial \bar{x}_0^i}{\partial x_0^k} x_1^k. \tag{1}$$

Для каждой функции $f \in C^\infty(M)$ можно построить ее естественный лифт $f_{(1)}$, называемый полным лифтом функции f с базы M в его касательное расслоение TM, следующим образом: $f_{(1)} = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j$. Функции $f_{(0)}$ и $f_{(1)}$ позволяют определить на TM функцию f^A со значениями в A формулой $f^A = f_\alpha \varepsilon^\alpha$ $(\alpha = 0,1)$. Функция f^A называется естественным продолжением функции *f* из *M* в *TM*. Композицию $a^* \circ f^A$ обозначим через $f_{(a^*)}$. Если $a^* = a^\alpha \varepsilon_\alpha$, то $f_{(a^*)} = a^\alpha f_{(\varepsilon_\alpha)}$, причем $f_{(\varepsilon_0)} = f_{(0)}, f_{(\varepsilon_1)} = f_{(1)}$.

Введем понятия лифтов векторных полей, полного лифта линейной связности ∇, тензорных полей типа (1,1) с базы в касательное расслоение.

Определение. Пусть $X \in \Im^1_0(M)$, где $\Im^1_0(M)$ — модуль векторных полей, заданных на многообразии M над алгеброй $C^\infty(M)$, $a \in \mathrm{A}$. Единственное векторное поле $X^{(a)}$, удовлетворяющее условию $X^{(a)} f_{(b^*)} = (Xf)_{(a^* \cdot b)}$, называется *(a)-лифтом векторного поля X в касательное расслоение TM.*

Векторное поле $X^{(\varepsilon^0)}$, которое для краткости обозначим символом $X^{(0)}$, называется полным лифтом, а $X^{(\varepsilon^1)} = X^{(1)}$ — вертикальным лифтом векторного поля *X*. В локальных координатах эти векторные поля имеют вид [2; 9]

$$X^{(1)} = (X^i)_{(0)} \partial^1_i, X^{(0)} = (X^i)_{(0)} \partial^0_i + (\partial_j X^i)_{(0)} x^j_1 \partial^1_i. \qquad (2)$$

Предположим, что на многообразии M задана линейная связность ∇, компонентами которой в карте (U, x^i) являются функции Γ^i_{jk}. На касательном расслоении TM существует единственная линейная связность $\nabla^{(0)}$, называемая полным лифтом связности ∇ и удовлетворяющая условию [2]:

$$\nabla^{(0)}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\nabla_X Y)^{(ab)}, \qquad (3)$$

где $X, Y \in \Im^1_0(M), a, b \in \mathrm{A}$.

Пусть $G \in \Im^1_1(M)$, где $\Im^1_1(M)$ — $C^\infty(M)$-модуль тензорных полей типа (1,1), заданных на многообразии M .

Определение. Векторное поле $G^{V\gamma} = (G^j_i)_{(0)} x^i_1 \partial^1_j$ называется *вертикально-векторным поднятием* [7], а векторное поле $G^{H\gamma} = (G^j_i)_{(0)} x^i_1 (\partial^0_j - (\Gamma^p_{js})_{(0)} x^s_1 \partial^1_p)$ — *горизонтально-векторным поднятием* [8] *аффинора* G .

2. Инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения со связностью полного лифта

Определение [1]**.** Векторное поле $\widetilde{X} \in \Im_0^1(TM)$ называется *инфинитезимальным аффинным преобразованием связности* $\nabla^{(0)}$, если

$$L_{\widetilde{X}}\nabla^{(0)} = 0, \tag{4}$$

где $L_{\widetilde{X}}$ — символ производной Ли вдоль векторного поля $\widetilde{X} \in \Im_0^1(TM)$.

Здесь тензорное поле $L_{\widetilde{X}}\nabla^{(0)}$ типа (1, 2) определяется тождеством

$$L_{\tilde{X}}\,\nabla^{(0)}(\tilde{Y},\tilde{Z}) = L_{\tilde{X}}(\nabla^{(0)}{}_{\tilde{Y}}\,\tilde{Z}) - \nabla^{(0)}{}_{\tilde{Y}}\,L_{\tilde{X}}\tilde{Z} - \nabla^{(0)}{}_{[\tilde{X},\tilde{Y}]}\,\tilde{Z}. \tag{5}$$

В дальнейшем мы предполагаем, что линейные связности ∇ на базе M не имеют кручения, то есть для каждой связности ∇ тензорное поле кручения $T = 0$, где T задается условием $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$.

Полагая в (5) $\widetilde{Y} = \partial_j^\alpha, \widetilde{Z} = \partial_k^\beta$ и $\tilde{X} = X_\alpha^i \partial_i^\alpha, \partial_i^\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$, получим, что в координатной форме уравнение (4) равносильно системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для компонент векторного поля $\tilde{X} = X_\alpha^i \partial_i^\alpha$

$$\partial_j^\alpha \partial_k^\beta X_\sigma^i + \Gamma_{mk\sigma}^{\tau\beta i}\partial_j^\alpha X_\tau^m + \Gamma_{jm\sigma}^{\alpha\tau i}\partial_k^\beta X_\tau^m - \Gamma_{jk\tau}^{\alpha\beta m}\partial_m^\tau X_\sigma^i + X_\tau^m \partial_m^\tau \Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = 0. \tag{6}$$

Условием интегрируемости этой системы является равенство $L_{\widetilde{X}}\widetilde{R}=0$, которое в локальных координатах равносильно соотношениям

$$R^{\tau\beta\mu i}_{mkl\sigma}A^{\alpha m}_{j\tau}+R^{\alpha\tau\mu i}_{jml\sigma}A^{\beta m}_{k\tau}+R^{\alpha\beta\tau i}_{jkm\sigma}A^{\mu m}_{l\tau}-R^{\alpha\beta\mu m}_{jkl\tau}A^{\tau i}_{m\sigma}+X^{m}_{\tau}\partial^{\tau}_{m}R^{\alpha\beta\mu i}_{jkl\sigma}=0,$$

где $A^{\mu m}_{l\tau}=\partial^{\mu}_{l}X^{m}_{\tau}$.

Известно [6], что инфинитезимальное аффинное преобразование $\widetilde{X}$ связности $\nabla^{(0)}$ в TM представимо в виде

$$\widetilde{X}=X^{(0)}+Y^{(1)}+G^{V\gamma}+F^{H\gamma}, \tag{7}$$

где X,Y — векторные поля, F,G — тензорные поля типа (1,1) на многообразии *M*, удовлетворяющие условиям:

$$L_X\nabla=0;\, L_Y\nabla=0;\, \nabla G=0;\, \nabla F=0;$$

$$R^{i}_{jml}F^{m}_{k}=R^{m}_{jkl}F^{i}_{m}=0,\, R^{i}_{jml}G^{m}_{k}-R^{m}_{jkl}G^{i}_{m}=0.$$

В работе [4] было показано, что множество $\widetilde{L}$ всех инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM,\nabla^{(0)})$ относительно естественных операций сложения, умножения на скаляры из R и операции коммутирования образует алгебру Ли, которая как векторное пространство разлагается в прямую сумму векторных пространств L^{α} $(\alpha=0,1,2,3)$, причем ее размерность не больше $2n(2n+1)$, где *n* — размерность многообразия *M*. Подпространства $L^{\alpha}(\alpha=0,1,2,3)$ являются ее подалгебрами Ли векторных полей вида $X^{(0)},Y^{(1)}$, $G^{V\gamma}$, $F^{H\gamma}$ соответственно. Тогда

$$\dim\tilde{L}=\dim L^{0}+\dim L^{1}+\dim L^{2}+\dim L^{3}.$$

Размерности подалгебр L^{0} и L^{1} равны размерности алгебры Ли $g(\nabla)$ инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (M,∇).

3. Оценка размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств $(TM,\nabla^{(0)})$

В этой части работы будем исследовать алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств $(TM,\nabla^{(0)})$ над многообразием *M*, снабженным линейными связностями, тензорные поля кривизны которых удовлетворяют следующим условиям:

1) компоненты вида $R^{i_1}_{i_2 i_2 i_3}$ равны нулю в каждой координатной окрестности каждой точки $p \in M$ для попарно различных индексов i_1, i_2, i_3;

2) существует координатная окрестность (U, x^i) точки $q \in M$, в которой компонента вида $R^{i_1}_{i_2 i_3 i_4}$ в точке q отлична от нуля для некоторых попарно различных индексов i_1, i_2, i_3, i_4;

3) в тождестве Бианки в равенстве, содержащем компоненту, о которой говорится в условии (2), только два отличных от нуля слагаемых.

Оценим размерности алгебр Ли L^0 и L^1. А. Я. Султановым доказано [3], что максимальная размерность алгебр Ли $g(\nabla)$ для связностей ∇, удовлетворяющих перечисленным выше условиям (1), (2) и (3), равна точно $n^2 - 3n + 6$ $(n \geq 4)$.

Поэтому $dimL^0 + dimL^1 = 2n^2 - 6n + 12.$

Для оценки размерности подалгебры L^2 рассмотрим пространство решений уравнения $\nabla G = 0$, где $G \in \Im^1_1(M)$, равносильного системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка $\partial_j G^i_k - G^i_p \Gamma^p_{kj} + G^p_k \Gamma^i_{pj} = 0$. Условия интегрируемости $G_k^m R_{mjl}^i - G_m^i R_{kjl}^m = 0$ запишем следующим образом: $K\left(\begin{smallmatrix} i \\ kjl \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} h \\ m \end{smallmatrix}\right) G_h^m = 0$, где по определению

$$K\left(\begin{smallmatrix} i \\ kjl \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} h \\ m \end{smallmatrix}\right) = \delta_k^h R_{mjl}^i - \delta_m^i R_{kjl}^h .$$

Матрица D системы $K\left(\begin{smallmatrix} i \\ kjl \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} h \\ i \end{smallmatrix}\right) G_h^m = 0$, составленная из коэффициентов при неизвестных

$$G_1^i, G_k^2, G_k^3, G_k^4, G_2^2, G_3^3, G_4^4, G_4^2, G_2^4, G_4^3, G_3^4, G_3^2, G_2^3 \quad (i > 1, k > 4)$$

в уравнениях $\begin{pmatrix} j \\ 234 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ s34 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ s24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ s32 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 232 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 224 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 332 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 343 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 443 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 424 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 243 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 432 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 324 \end{pmatrix}$, $(j > 1, s > 4)$, имеет следующее строение:

$$D = \begin{pmatrix}
a & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & a & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & a & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & aI_{n-1} & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & aI_{n-4} & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & bI_{n-4} & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a-b & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a-b & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a-b & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-a-b)I_{n-4}
\end{pmatrix},$$

где I_k — единичная матрица порядка k, $R_{243}^1 = a$, $R_{432}^1 = b$.

Ранг матрицы D равен $4n-4$ при условии $b(a+b) \neq 0$. Тогда $dim L^2 \leq n^2 - 4n + 4$ [5].

Рассмотрим теперь случай, когда $b(a+b)=0$. Тогда имеет место одно из условий:

$$\text{(a)}\quad b=-a;$$

$$\text{(b)}\quad b=0\,.$$

Одновременно множители b и $a+b$ не могут обращаться в нуль в силу условия $a\neq 0$. Учитывая, что

$$R^1_{243}=a, R^1_{432}=b, R^1_{324}=-(a+b),$$

получим, что условие (a) имеет место тогда и только тогда, когда

$$(a')\quad R^1_{243}=a, R^1_{432}=-a, R^1_{324}=0,$$

а условие (b) равносильно следующей системе соотношений:

$$(b')\quad R^1_{243}=a, R^1_{432}=0, R^1_{324}=-a.$$

Система (b') может быть сведена к системе (a'). Учитывая это, делаем вывод, что ранг матрицы D будет равен $3n-3$. Следовательно, размерность пространства решений уравнения $\nabla G=0$ не превосходит n^2-3n+3. Поэтому $dimL^2\leq n^2-3n+3$.

Оценим размерность подалгебры L^3. Для этого исследуем пространство решений уравнения $\nabla F=0$, где $F\in\mathfrak{I}^1_1(M)$, которое равносильно в локальных координатах системе дифференциальных уравнений

$$\partial_j F^i_k - F^i_p\Gamma^p_{kj}+F^p_k\Gamma^i_{pj}=0.$$

Первую серию условий интегрируемости этой системы дифференциальных уравнений составляет система линейных однородных уравнений относительно неизвестных F^m_j:

$$F^m_j R^i_{mkl}=0, F^m_k R^i_{jml}=0, F^m_l R^i_{jkm}=0, F^i_m R^m_{jkl}=0.$$

Эту систему можно представить в виде системы $P_\alpha({}^{i}_{jkl}\big|{}^{h}_{m})F^m_h = 0\ (\alpha = 1, 2, 3)$, где по определению

$$P_1({}^{i}_{jkl}\big|{}^{h}_{m}) = \delta^h_j R^i_{mkl}, P_2({}^{i}_{jkl}\big|{}^{h}_{m}) = \delta^h_k R^i_{jml}, P_3({}^{i}_{jkl}\big|{}^{h}_{m}) = \delta^i_m R^h_{jkl}.$$

Матрица N, составленная из коэффициентов при неизвестных $F^i_1, F^2_k\ (k > 1),\ F^3_l\ (l > 1),\ F^4_p\ (p > 1)$ в уравнениях

$$P_\alpha({}^{j}_{243}\big|{}^{h}_{m}) = 0, P_\alpha({}^{1}_{s34}\big|{}^{h}_{m}) = 0, P_\alpha({}^{1}_{2s4}\big|{}^{h}_{m}) = 0, P_\alpha({}^{1}_{s32}\big|{}^{h}_{m}) = 0, (\alpha = 1,2,3, s > 1)$$

имеет следующий вид:

$$N = \begin{pmatrix} aI_n & * & * & * \\ 0 & -aI_{n-1} & * & * \\ 0 & 0 & -aI_{n-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & -aI_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен $4n - 3$. Поэтому размерность пространства решений уравнения $\nabla F = 0$ не более $n^2 - 4n + 3$. Отсюда следует, что

$$dim L^3 \le n^2 - 4n + 3 (n > 3).$$

Таким образом, размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM, \nabla^{(0)})$ $dim\widetilde{L} \le 4n^2 - 13n + 18 (n > 3).$

Для доказательства точности приведенной границы оценки рассмотрим пространство (R^n, ∇), где линейная связность ∇ определяется следующими коэффициентами: $\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = x^4$, другие $\Gamma^i_{jk} = 0$. Тензорное поле кривизны R этого пространства имеет только следующие отличные от нуля компоненты: $R^1_{234} = -R^1_{243} = -1$, а также $R^1_{342} = -R^1_{324} = -1,\ R^1_{423} = -R^1_{432} = 0$.

В случае, когда тензорное поле R связности ∇ удовлетворяет условиям (1) и (2), размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований не больше, чем n^2-3n+8. Этот факт был доказан И. П. Егоровым и Г. Врэнчану. Приведенный пример пространства для установления точности оценки n^2-3n+8 принадлежит Г. Врэнчану. Однако И. П. Егоровым было показано [1], что базис алгебры Ли $g(\mathrm{R}^n)$ инфинитезимальных аффинных преобразований исследуемого пространства (R^n,∇) составляют векторные поля:

$$\begin{gathered}\partial_1,\partial_2,\partial_3,x^1\partial_1+x^2\partial_2,x^1\partial_1+x^3\partial_3,\partial_4-x^2x^3\partial_1,x^2\partial_1,\\ x^3\partial_1,x^4\partial_1,\partial_l,x^k\partial_l\ (l>4,k\ge 1).\end{gathered}\tag{8}$$

Откуда следует, что размерность алгебры $g(\mathrm{R}^n)$ равна n^2-3n+6.

Для получения базисных векторных полей алгебр L^0,L^1 на $T\mathrm{R}^n$ со связностью $\nabla^{(0)}$ для приведенной выше связности ∇ вычислим полные и вертикальные лифты этих векторных полей.

Полные лифты векторных полей имеют вид

$$\partial_1^0,\partial_3^0,\partial_3^0,\ \ \partial_4^0-x_0^2x_1^3\partial_1^1-x_1^2x_0^3\partial_1^1,\tag{9}$$

$$x_0^1\partial_1^0+x_1^1\partial_1^1+x_0^2\partial_2^0+x_1^2\partial_2^1,x_0^1\partial_1^0+x_1^1\partial_1^1+x_0^3\partial_3^0+x_1^3\partial_1^1,$$

$$x_0^2\partial_1^0+x_1^2\partial_1^1,x_0^3\partial_1^0+x_1^3\partial_1^1,x_0^4\partial_1^0+x_1^4\partial_1^1,\partial_l^0,x_0^k\partial_l^0+x_1^k\partial_l^1\ (l>4,k\ge 1).$$

Вертикальными лифтами этих же векторных полей будут следующие векторные поля на $T\mathrm{R}^n$:

$$\begin{gathered}\partial_1^1,\partial_2^1,\partial_3^1,x_0^1\partial_1^1+x_0^2\partial_2^1,x_0^1\partial_1^1+x_0^3\partial_3^1,\partial_4^1-x_0^2x_0^3\partial_1^1,\\ x_0^2\partial_1^1,x_0^3\partial_1^1,x_0^4\partial_1^1,\partial_l^1,x_0^k\partial_l^1\ (l>4,k\ge 1).\end{gathered}\tag{10}$$

Таким образом, $dimL^0(\mathrm{R}^n)+dimL^1(\mathrm{R}^n)=2n^2-6n+12$ для $(T\mathrm{R}^n,\nabla^{(0)})$.

Для подалгебры L^2 на $(T\mathrm{R}^n,\nabla^{(0)})$ из условий интегрируемости $G_k^m R_{mjl}^i - G_m^i R_{kjl}^m = 0$ уравнения $\nabla G = 0$ имеем:

$$G_3^3 - G_1^1 = 0, G_3^2 = 0, G_2^3 = 0,$$

$$G_1^i = 0\,(i>1), G_k^2 = 0\,(k>4), G_k^3 = 0\,(k>4)\,(k>4), G_2^2 - G_1^1 = 0.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений $\nabla_j G_i^h = 0$ зависит от n^2-3n+3 произвольных постоянных и является линейной комбинацией следующих линейно независимых тензорных полей типа (1,1):

$$\begin{aligned}&\partial_1\otimes dx^1+\partial_2\otimes dx^2+\partial_3\otimes dx^3,\\&\partial_1\otimes dx^n\ (n>1),\ \ \partial_h\otimes dx^k\ (h>3,\,k>1).\end{aligned}\tag{11}$$

Базис алгебры L^2 составляют векторные поля, которые получаются из (11) с помощью $V\gamma$-лифта:

$$x_1^1\partial_1^1+x_1^2\partial_2^1+x_1^3\partial_3^1\,,x_1^n\partial_1^1\ (n>1),\ \ x_1^k\partial_h^1\ (h>3,\,k>1).\tag{12}$$

Следовательно, размерность алгебры Ли L^2 инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(T\mathrm{R}^n,\nabla^{(0)})$ равна n^2-3n+3.

Для тензорного поля $F\in\Im_1^1(\mathrm{R}^n)$ первая серия условий интегрируемости уравнения $\nabla F = 0$ сводится к соотношениям

$$F_1^i = 0\,,\ F_k^2 = 0\,(k>1), F_l^3 = 0\,(l>1), F_p^4\ (p>1).$$

Общее решение системы $\nabla_j F_i^h = 0$ зависит от n^2-4n+3 произвольных постоянных и является линейной комбинацией следующих линейно независимых тензорных полей типа (1,1):

$$\partial_1 \otimes dx^k \ (k > 1), \partial_h \otimes dx^k \ (h > 4, k > 1), \qquad (13)$$

которые составляют базис пространства решений уравнения $\nabla F = 0$.

$H\gamma$ -лифты этих тензорных полей образуют базис алгебры L^3 пространства $(T\mathrm{R}^n, \nabla^{(0)})$ и имеют вид

$$x_1^k \partial_1^0 \ (k > 1), \ x_1^k \partial_h^0 \ (h > 4, k > 1) \qquad (14)$$

Таким образом, максимальная размерность пространства решений уравнения $\nabla F = 0$, а значит, и алгебры Ли L^3 равна точно $n^2 - 4n + 3 \, (n > 3)$.

Точность оценки $dim\,\widetilde{L} \leq 4n^2 - 13n + 18 \, (n > 3)$ доказана. Имеет место

Теорема. *Максимальная размерность алгебр Ли* $\widetilde{L}$ *всех инфинитезимальных аффинных преобразований пространства* TM *со связностью полного лифта* $\nabla^{(0)}$ *над многообразием* M*, снабженным связностью* ∇ *и удовлетворяющим условиям (1) и (2), равна точно* $4n^2 - 13n + 18 \, (n \geq 4)$.

Список литературы

1. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Уч. зап. Пензенского педагогического института. Казань, 1965. С. 5—179.

2. *Султанов А.Я.* Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Изв. вузов. Матем. 1999. № 9. С. 64—72.

3. *Султанов А.Я.* Аффинные преобразования одного типа линейной связности // Современная геометрия и ее приложения : матер. школы-семинара и конф. Казань, 2017. С. 134—137.

4. *Султанова Г.А.* О некоторых подалгебрах алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения TM со связностью полного лифта // Ломоносовские чтения на Алтае: фундам. пробл. науки и образования : сб. науч. ст. междунар. конф. Барнаул, 2014. С. 378—381.

5. *Султанова Г.А.* Об оценке размерностей алгебр Ли инфинитезимальных автоморфизмов касательных расслоений со связностью полного лифта над непроективно-евклидовой базой // Диф. геом. многообр. фигур. 2016. Вып. 47. С. 146—153.

6. *Шадыев Х.* Аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении // Тр. геом. сем. Казань, 1984. Т. 16. С. 117—127.

7. *Sato K.* Complete Lifts from a Manifold to Its Cotangent Bundle // Kodai Math. Semin. Repts. 1968. Vol. 20, № 4. P. 458—468.

8. *Tanno S.* Infinitesimal isometries on the Tangent Bundles with Complete Lift Metric // Tensor (N. S.). 1974. Vol. 28. P. 139—144.

9. *Yano K., Ishihara K.* Tangent and Cotangent Bundles. Differential Geometry. N. Y., 1973.

A. Sultanov[1], G. Sultanova[2]
[1, 2] Penza State University
40 Krasnaya Sr., Penza, 440026, Russia
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru

Affine transformations of the tangent bundle with a complete lift connection over a manifold with a linear connection of special type

Submitted on April 03, 2018

In this paper we obtain exact upper bounds for the dimensions of Lie algebras of infinitesimal affine transformations in tangent bundles with a complete lift connection in the case when the base space is a manifold equipped with a non-projective Euclidean linear connection of a special type.

Keywords: Differentiable manifold, tangent bundle, complete lift of linear connection, vertical lift of vector fields, complete lift of vector fields, vertical-vector lift of affinor, horizontally-vector lift of affinor, infinitesimal affine transformation, Lie algebra.

References

1. *Egorov, I.P.:* Motions in spaces of affine connection. Kazan: Publishing house of the Kazan state university. P. 5—179 (1965) (in Russian).

2. *Sultanov, A. Ya.* Prolongations of tensor fields and connections to the Weyl fibration. Izv. universities. Mat. 9, 64—72 (1999) (in Russian).

3. *Sultanov, A. Ya.:* Affine transformations of one type of linear connection. Mater. School-Seminar and Conference «Modern Geom. and its Appl.». Kazan. P. 134—137 (2017) (in Russian).

4. *Sultanova, G. A.:* On some subalgebras of the Lie algebra of infinitesimal affine transformations of the tangent bundle with a connection of the complete lift. Collection of scientific articles of the internat. conf. «Lomonosov Readings in the Altai: Fundam. Probl. of Sci. and Educ.». Barnaul. P. 378—381 (2014) (in Russian).

5. *Sultanova, G. A.:* Estimates of the dimensions of Lie algebras of infinitesimal automorphisms of tangent bundles with a connection of a complete lift over a non-projective Euclidean base. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 47, 146—153 (2016) (in Russian).

6. *Shadyev, H.:* Affine collineation of a synectic connection in the tangent bundle. Tr. Geom. Semin. Kazan University, Kazan. 16, 117—127 (1984) (in Russian).

7. *Sato, K.:* Complete lifts from a manifold tangent bundle. Kodai Math. Semin. Repts. **20**:4, 458—468 (1968).

8. *Tanno, S.:* Infinitesimal isometries on the tangent bundles with complete lift metric. Tensor, N. S. 28, 139—144 (1974).

9. *Yano, K., Ishihara, K.:* Tangent and cotangent bundles. Differential Geometry. New York, Marcel Dekker (1973).