УДК 514.75

А. В. Кулешов

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ШЕСТЬ ТИПОВ ИНДУЦИРОВАННОЙ ГРУППОВОЙ СВЯЗНОСТИ НА СЕМЕЙСТВЕ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Исследуется семейство центрированных плоскостей в проективном пространстве. Описаны фактор-расслоения главного расслоения, ассоциированного с данным семейством. Показано, что композиционное оснащение семейства, состоящее в задании полей аналогов плоскостей Картана и нормалей 2-го рода Нордена, индуцирует 6 пучков групповой связности, в каждом из которых выделяется по одной связности.

§ 1. Понятие многообразия B_r центрированных плоскостей

Индексы в работе принимают следующие значения:

$$I, J, K = \overline{1, n};\ a, b, c = \overline{1, m};\ \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n};\ i, j, k = \overline{1, r}.$$

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I,\ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A. \qquad (1.1)$$

Структурные уравнения P_n запишем в виде

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\ D\omega_I = \omega_I^K \wedge \omega_K,$$
$$D\omega_K^I = \omega_K^J \wedge \omega_J^I + \omega^J \wedge (-\delta_K^I \omega_J - \delta_J^I \omega_K), \qquad (1.2)$$

где $\omega^I, \omega_I, \omega_J^I$ — структурные формы проективной группы $GP(n)$.

В пространстве P_n рассмотрим m-мерную $(1 \le m < n)$ центрированную плоскость $L_m^* = (L_m, C)$. Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$, помещая вершину A в центр C плоскости L_m^*, а вершины A_a — на плоскость L_m^*. Система уравнений r-мерного многообразия B_r $(1 \le r < m(n-m)+n)$ центрированных плоскостей L_m^* в параметрической форме имеет вид [1]

$$\omega^a = \Lambda_i^a \theta^i, \; \omega^\alpha = \Lambda_i^\alpha \theta^i, \; \omega_a^\alpha = \Lambda_{ai}^\alpha \theta^i, \tag{1.3}$$

где формы Пфаффа θ^i являются структурными формами r-мерного гладкого многообразия V_r — пространства параметров и удовлетворяют уравнениям

$$D\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i. \tag{1.4}$$

Дифференцируя уравнения (1.4) внешним образом и применяя обобщенную лемму Картана, получим

$$D\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \theta^k \wedge \theta_{jk}^i, \; \theta_{jk}^i \wedge \theta^j \wedge \theta^k = 0. \tag{1.5}$$

Из [3] следует, что

$$\theta_{[jk]}^i \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, \theta^i\right). \tag{1.6}$$

Продолжая систему уравнений (1.3) с учетом (1.2) и (1.4), получим

$$\Delta\Lambda_i^a + \Lambda_i^\alpha \omega_\alpha^a = \Lambda_{ij}^a \theta^j, \; \Delta\Lambda_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \theta^j, \; \Delta\Lambda_{ai}^\alpha - \Lambda_i^\alpha \omega_a = \Lambda_{aij}^\alpha \theta^j, \tag{1.7}$$

где Δ — дифференциальный оператор, действующий по закону

$$\Delta\Lambda_{ai}^\alpha = d\Lambda_{ai}^\alpha - \Lambda_{bi}^\alpha \omega_a^b - \Lambda_{aj}^\alpha \theta_i^j + \Lambda_{ai}^\beta \omega_\beta^\alpha,$$

причем

$$\Lambda_{[ij]}^a = 0, \; \Lambda_{ij}^\alpha = \hat{\Lambda}_{ij}^\alpha - \Lambda_i^a \Lambda_{aj}^\alpha, \; \hat{\Lambda}_{[ij]}^\alpha = 0, \; \Lambda_{a[ij]}^\alpha = 0. \tag{1.8}$$

Из уравнений (1.7) следует

Теорема 1.1. *Совокупность функций* $\Lambda = \{\Lambda_i^a, \Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha\}$ *образует тензор, содержащий 3 подтензора* Λ_i^α, $\{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_i^a\}$, $\{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha\}$.

Систему функций $\Lambda = \{\Lambda_i^a, \Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha\}$ назовем фундаментальным тензором 1-го порядка многообразия B_r, заданного параметрическими уравнениями (1.3).

§ 2. Расслоение, ассоциированное с многообразием B_r

Из уравнений (1.2) следует, что с многообразием B_r ассоциируется главное расслоение $G_s(B_r)$ со структурными уравнениями (1.4) и следующими:

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \theta^i \wedge \omega_{bi}^a, \tag{2.1}$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \theta^i \wedge \omega_{\beta i}^\alpha, \tag{2.2}$$

$$D\omega_\alpha^a = \omega_\alpha^b \wedge \omega_b^a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^a + \theta^i \wedge \omega_{\alpha i}^a, \tag{2.3}$$

$$D\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b + \theta^i \wedge \omega_{ai}, \tag{2.4}$$

$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \omega_\alpha^a \wedge \omega_a, \tag{2.5}$$

где

$$\omega_{bi}^a = \Lambda_{bi}^\alpha \omega_\alpha^a - \delta_b^a (\Lambda_i^\alpha \omega_\alpha + \Lambda_i^c \omega_c) - \Lambda_i^a \omega_b, \tag{2.6}$$

$$\omega_{\beta i}^\alpha = -\Lambda_{ai}^\alpha \omega_\beta^a - \delta_\beta^\alpha (\Lambda_i^\gamma \omega_\gamma + \Lambda_i^a \omega_a) - \Lambda_i^\alpha \omega_\beta, \tag{2.7}$$

$$\omega_{ai} = \Lambda_{ai}^\alpha \omega_\alpha, \ \omega_{\alpha i}^a = -\Lambda_i^a \omega_\alpha. \tag{2.8}$$

Базой главного расслоения $G_s(B_r)$ является многообразие B_r, а типовым слоем — s-членная подгруппа стационарности G_s ($s = n(n+1) - m(n-m)$) плоскости L_m^*. Число s равно количеству форм $\omega_b^a, \omega_\beta^\alpha, \omega_\alpha^a, \omega_a, \omega_\alpha$.

Ассоциированное расслоение имеет 2 простейших и 2 простых [5] фактор-расслоения со структурными уравнениями:

1) (1.4, 2.1) — фактор-расслоение плоскостных линейных реперов $L_{m^2}(B_r)$ с типовым слоем — линейной фактор-группой L_{m^2} группы G_s, которая действует неэффективно в пространстве направлений плоскости L_m^*, т. е. в пространстве прямых плоскости L_m^*, проходящих через точку A;

2) (1.4, 2.2) — фактор-расслоение нормальных линейных реперов $L_{(n-m)^2}(B_r)$ с типовым слоем — линейной группой $L_{(n-m)^2}$, которая действует неэффективно в $(n-m-1)$-мерном проективном пространстве $P_{n-m-1} = P_n / P_m$ [5], возникающем при факторизации по коллинеарности из $(n-m)$-мерного линейного фактор-пространства $L_{n-m} = L_{n+1} / L_{m+1}$, причем линейное пространство L_{n+1} и его подпространство L_{m+1} порождают проективное пространство P_n и его подпространство P_m;

3) (1.4, 2.1, 2.4) — фактор-расслоение центропроективных реперов $C_{m(m+1)}(B_r)$ с типовым слоем — центропроективной группой $C_{m(m+1)}$, которая действует эффективно в плоскости L_m^*;

4) (1.4, 2.1, 2.2, 2.3) — фактор-расслоение $H_{m^2-mn+n^2}(B_r)$ с типовым слоем — группой $H_{m^2-mn+n^2}$, которая действует неэффективно во множестве направлений центропроективного пространства $P_n^* = (P_n, A)$ с выделенным подмножеством направлений плоскости L_m^*.

§ 3. Ассоциированные связности на многообразии

Групповую связность в главном расслоении $G_s(B_r)$ зададим с помощью форм

$$\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{bi}^a \theta^i, \quad \tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta i}^\alpha \theta^i, \quad \tilde{\omega}_\alpha^a = \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha i}^a \theta^i,$$
$$\tilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma_{ai} \theta^i, \quad \tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha i} \theta^i. \tag{3.1}$$

Компоненты объекта групповой связности $\Gamma^1 = \{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{\alpha i}^a, \Gamma_{ai}, \Gamma_{\alpha i}\}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\Delta\Gamma_{bi}^a + \omega_{bi}^a = \Gamma_{bij}^a \theta^j, \ \Delta\Gamma_{\beta i}^\alpha + \omega_{\beta i}^\alpha = \Gamma_{\beta ij}^\alpha \theta^j, \tag{3.2}$$

$$\Delta\Gamma_{ai} + \Gamma_{ai}^b \omega_b + \omega_{ai} = \Gamma_{aij} \theta^j, \tag{3.3}$$

$$\Delta\Gamma_{\alpha i}^a - \Gamma_{bi}^a \omega_\alpha^b + \Gamma_{\alpha i}^\beta \omega_\beta^a + \omega_{\alpha i}^a = \Gamma_{\alpha ij}^a \theta^j, \tag{3.4}$$

$$\Delta\Gamma_{\alpha i} + \Gamma_{\alpha i}^a \omega_a + \Gamma_{\alpha i}^\beta \omega_\beta - \Gamma_{ai} \omega_\alpha^a = \Gamma_{\alpha ij} \theta^j. \tag{3.5}$$

Из этих уравнений видно, что объект Γ^1 содержит 2 простейших и 2 простых подобъекта: 1) Γ_{bi}^a — объект плоскостной линейной связности; 2) $\Gamma_{\beta i}^\alpha$ — объект нормальной линейной связности; 3) $\{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ai}\}$ — объект центропроективной связности; 4) $\{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{\alpha i}^a\}$ — объект линейно-групповой связности. Эти подобъекты задают групповые связности в фактор-расслоениях ассоциированного расслоения $G_s(B_r)$, перечисленных в § 2.

Из (3.1) с учетом (3.2—3.5) получаем структурные уравнения для форм связности

$$D\tilde{\omega}_b^a = \tilde{\omega}_b^c \wedge \tilde{\omega}_c^a + R_{bij}^a \theta^i \wedge \theta^j, \tag{3.6}$$

$$D\tilde{\omega}_\beta^\alpha = \tilde{\omega}_\beta^\gamma \wedge \tilde{\omega}_\gamma^\alpha + R_{\beta ij}^\alpha \theta^i \wedge \theta^j, \tag{3.7}$$

$$D\tilde{\omega}_\alpha^a = \tilde{\omega}_\alpha^b \wedge \tilde{\omega}_b^a + \tilde{\omega}_\alpha^\beta \wedge \tilde{\omega}_\beta^a + R_{\alpha ij}^a \theta^i \wedge \theta^j, \tag{3.8}$$

$$D\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_a^b \wedge \tilde{\omega}_b + R_{aij} \theta^i \wedge \theta^j, \tag{3.9}$$

$$D\tilde{\omega}_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha^\beta \wedge \tilde{\omega}_\beta + \tilde{\omega}_\alpha^a \wedge \tilde{\omega}_a + R_{\alpha ij} \theta^i \wedge \theta^j, \tag{3.10}$$

где компоненты объекта кривизны групповой связности $R^1 = \{R_{bij}^a, R_{\beta ij}^\alpha, R_{\alpha ij}^a, R_{aij}, R_{\alpha ij}\}$ выражаются по формулам

$$R^{a}_{bij}=\Gamma^{a}_{b[ij]}-\Gamma^{c}_{b[i}\Gamma^{a}_{cj]},\ R^{\alpha}_{\beta ij}=\Gamma^{\alpha}_{\beta[ij]}-\Gamma^{\gamma}_{\beta[i}\Gamma^{\alpha}_{\gamma j]},$$
$$R^{a}_{\alpha ij}=\Gamma^{a}_{\alpha[ij]}-\Gamma^{b}_{\alpha[i}\Gamma^{a}_{bj]}-\Gamma^{\beta}_{\alpha[i}\Gamma^{a}_{\beta j]},\ R_{aij}=\Gamma_{a[ij]}-\Gamma^{b}_{a[i}\Gamma_{bj]}, \tag{3.11}$$
$$R_{\alpha ij}=\Gamma_{\alpha[ij]}-\Gamma^{a}_{\alpha[i}\Gamma_{aj]}-\Gamma^{\beta}_{\alpha[i}\Gamma_{\beta j]},$$

причем альтернирование производится по крайним индексам в квадратных скобках.

Продолжим уравнения (3.2—3.5), в результате чего получим уравнения на продолжения компонент Γ^1:

$$\Delta\Gamma^{a}_{bij}-\Gamma^{a}_{bk}\theta^{k}_{ij}+\Gamma^{c}_{bi}\omega^{a}_{cj}-\Gamma^{a}_{ci}\omega^{c}_{bj}+\omega^{a}_{bij}=\Gamma^{a}_{bijk}\theta^{k}, \tag{3.12}$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta ij}-\Gamma^{\alpha}_{\beta k}\theta^{k}_{ij}-\Gamma^{\alpha}_{\gamma i}\omega^{\gamma}_{\beta j}+\Gamma^{\gamma}_{\beta i}\omega^{\alpha}_{\gamma j}+\omega^{\alpha}_{\beta ij}=\Gamma^{\alpha}_{\beta ijk}\theta^{k}, \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered}\Delta\Gamma^{a}_{\alpha ij}-\Gamma^{a}_{\alpha k}\theta^{k}_{ij}+\Gamma^{b}_{\alpha i}\omega^{a}_{bj}-\Gamma^{a}_{cij}\omega^{c}_{\alpha}-\Gamma^{a}_{ci}\omega^{c}_{\alpha j}+\\+\Gamma^{\beta}_{\alpha ij}\omega^{a}_{\beta}+\Gamma^{\beta}_{\alpha i}\omega^{a}_{\beta j}-\Gamma^{a}_{\beta i}\omega^{\beta}_{\alpha j}+\omega^{a}_{\alpha ij}=\Gamma^{a}_{\alpha ijk}\theta^{k},\end{gathered} \tag{3.14}$$

$$\Delta\Gamma_{aij}-\Gamma_{ak}\theta^{k}_{ij}+\Gamma^{b}_{aij}\omega_{b}+\Gamma^{b}_{ai}\omega_{bj}-\Gamma_{bi}\omega^{b}_{aj}+\omega_{aij}=\Gamma_{aijk}\theta^{k}, \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered}\Delta\Gamma_{\alpha ij}-\Gamma_{\alpha k}\theta^{k}_{ij}+\Gamma^{a}_{\alpha i}\omega_{aj}-\Gamma_{aij}\omega^{a}_{\alpha}-\\-\Gamma_{ai}\omega^{a}_{\alpha j}+\Gamma^{\beta}_{\alpha ij}\omega_{\beta}-\Gamma_{\beta i}\omega^{\beta}_{\alpha j}=\Gamma_{\alpha ijk}\theta^{k},\end{gathered} \tag{3.16}$$

где

$$\omega^{a}_{bij}=\Lambda^{\alpha}_{bij}\omega^{a}_{\alpha}-\delta^{a}_{b}(\Lambda^{\alpha}_{ij}\omega_{\alpha}+\Lambda^{c}_{ij}\omega_{c}+\Lambda^{c}_{i}\omega_{cj})-\Lambda^{a}_{ij}\omega_{b}-\Lambda^{a}_{i}\omega_{bj}+\Lambda^{\alpha}_{bi}\omega^{a}_{\alpha j}, \tag{3.17}$$

$$\omega^{\alpha}_{\beta ij}=-\Lambda^{\alpha}_{aij}\omega^{a}_{\beta}-\delta^{\alpha}_{\beta}(\Lambda^{\gamma}_{ij}\omega_{\gamma}+\Lambda^{a}_{ij}\omega_{a}+\Lambda^{a}_{i}\omega_{aj})-\Lambda^{\alpha}_{ij}\omega_{\beta}+\Lambda^{\alpha}_{ai}\omega^{a}_{\beta j}, \tag{3.18}$$

$$\omega^{a}_{\alpha ij}=-\Lambda^{a}_{ij}\omega_{\alpha},\ \omega_{aij}=\Lambda^{\alpha}_{aij}\omega_{\alpha}. \tag{3.19}$$

Замечание 1. Формы $\omega^{a}_{bij},\omega^{\alpha}_{\beta ij},\omega^{a}_{\alpha ij},\omega_{aij}$ симметричны по нижним индексам *i* и *j*:

$$\omega^{a}_{b[ij]}=0,\quad \omega^{\alpha}_{\beta[ij]}=0,\quad \omega^{a}_{\alpha[ij]}=0,\quad \omega_{a[ij]}=0. \tag{3.20}$$

Замечание 2. Уравнения (3.12) — (3.16) уточняют соответствующие уравнения работы [1]:

Используя формулы (3.12—3.16) и (1.1), найдем дифференциальные сравнения для компонент объекта кривизны R^1 групповой связности 1-го порядка:

$$\Delta R^a_{bij} \equiv 0,\ \Delta R^\alpha_{\beta ij} \equiv 0,$$
$$\Delta R^a_{\alpha ij} - R^a_{bij}\omega^b_\alpha + R^\beta_{\alpha ij}\omega^a_\beta \equiv 0,\ \Delta R_{aij} + R^b_{aij}\omega_b \equiv 0, \quad (3.21)$$
$$\Delta R_{\alpha ij} + R^a_{\alpha ij}\omega_a + R^\beta_{\alpha ij}\omega_\beta - R_{aij}\omega^a_\alpha \equiv 0.$$

где символ «$\equiv$» означает сравнение по модулю базисных форм θ^i.

Теорема 3.1. *Объект кривизны* R^1 *образует тензор, содержащий 4 подтензора* $R^a_{bij}, \{R^a_{bij}, R_{aij}\}, R^\alpha_{\beta ij}, \{R^a_{bij} R^a_{\alpha ij}, R^\alpha_{\beta ij}\}$, *которые являются тензорами кривизны подсвязностей, задаваемых соответственно подобъектами* Γ^a_{bi}, $\{\Gamma^a_{bi}, \Gamma_{ai}\}$, $\Gamma^\alpha_{\beta i}$, $\{\Gamma^a_{bi}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^a_{\alpha i}\}$.

§ 4. Оснащение многообразия и индуцированные связности

Осуществим композиционное [5] оснащение многообразия B_r полями двух плоскостей, присоединяя к каждой плоскости L^*_m: 1) (n–m–1)-плоскость C_{n-m-1}, не имеющую общих точек с плоскостью L^*_m (аналог плоскости Картана); 2) (m–1)-плоскость N_{m-1}, принадлежащую плоскости L^*_m и не проходящую через ее центр А (аналог нормали 2-го рода Нордена). Оснащающие плоскости C_{n-m-1}, N_{m-1} определим системами точек

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A,\ B_a = A_a + \lambda_a A, \qquad (4.1)$$

причем величины λ^a_α, λ_α, λ_α удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\lambda^a_\alpha + \omega^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha i}\theta^i,\ \Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha i}\theta^i,\ \Delta\lambda_a + \omega_a = \lambda_{ai}\theta^i. \quad (4.2)$$

Данные сравнения обеспечивают инвариантность плоскости Картана C_{n-m-1} и нормали 2-го рода N_{m-1} при фиксации точки А. Таким образом, плоскость Картана задается квазитензором $\{\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha\}$, содержащим квазитензор λ^a_α. Квазитензор

λ_α^a определяет $(n-m)$-мерную плоскость $N_{n-m}=[N_\alpha, A]$, где $N_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a$. Плоскость N_{n-m} является нормалью 1-го рода Нордена, порожденной плоскостью Картана C_{n-m-1}, т.е. $N_{n-m}=C_{n-m-1}\oplus A$. В общем случае для определения нормали 1-го рода N_{n-m} не требуется задавать плоскость Картана [5].

Компоненты объекта связности Γ могут подчиняться соотношениям

$$\overset{1}{\Gamma}_{\alpha i} = \Gamma_{\alpha i}^a\lambda_a - \Gamma_{\alpha i}^\beta \mu_\beta - \Gamma_{ai}\lambda_\alpha^a + \Gamma_{bi}^a\lambda_\alpha^b\lambda_a - \\ - \Lambda_{bi}^\beta\lambda_\beta^a\lambda_\alpha^b\lambda_a + \Lambda_i^a\lambda_a\lambda_\alpha + \Lambda_{ai}^\beta\lambda_\alpha^a\lambda_\beta - \Lambda_i^\beta\lambda_\alpha\mu_\beta, \tag{4.3}$$

$$\overset{1}{\Gamma}{}_{\alpha i}^a = -\Gamma_{bi}^a\lambda_\alpha^b + \Gamma_{\alpha i}^\beta\lambda_\beta^a + \Lambda_{bi}^\beta\lambda_\beta^a\lambda_\alpha^b + \Lambda_i^\beta\lambda_\alpha\lambda_\beta^a - \Lambda_i^a\lambda_\alpha, \tag{4.4}$$

$$\overset{1}{\Gamma}_{ai} = \Gamma_{ai}^b\lambda_b - \Lambda_{ai}^\alpha\lambda_\alpha^b\lambda_b - \Lambda_i^\alpha\lambda_\alpha^b\lambda_b\lambda_a + \Lambda_i^\alpha\lambda_a\lambda_\alpha + \Lambda_i^b\lambda_a\lambda_b + \Lambda_{ai}^\alpha\lambda_\alpha, \tag{4.5}$$

$$\overset{0}{\Gamma}{}_{bi}^a = \Lambda_{bi}^\alpha\lambda_\alpha^a - \delta_b^a\Lambda_i^\alpha\lambda_\alpha + M_i^c(\delta_b^a\lambda_c + \delta_c^a\lambda_b), \tag{4.6}$$

$$\overset{0}{\Gamma}{}_{\beta i}^\alpha = -\Lambda_{ai}^\alpha\lambda_\beta^a - \Lambda_i^\alpha\lambda_\beta + \delta_\beta^\alpha(M_i^a\lambda_a - \Lambda_i^\gamma\lambda_\gamma), \tag{4.7}$$

где $M_i^a = \Lambda_i^\beta\lambda_\beta^a - \Lambda_i^a$ — тензор, $\mu_\beta = \lambda_\beta^a\lambda_a - \lambda_\beta$. Нулик над компонентами линейных связностей и единица над остальными компонентами означает, что соответствующие соотношения имеют место.

Подставляя охваты (4.6), (4.7) подобъектов Γ_{bi}^a и $\Gamma_{\beta i}^\alpha$ в равенства (4.4), (4.5), получим:

$$\overset{01}{\Gamma}{}_{\alpha i}^a = \Lambda_i^a\mu_\alpha - \lambda_\beta^a\lambda_\alpha^b(\Lambda_{bi}^\beta + \Lambda_i^\beta\lambda_b), \tag{4.8}$$

$$\overset{01}{\Gamma}_{ai} = M_i^c\lambda_a\lambda_c + \Lambda_{ai}^\alpha\lambda_\alpha. \tag{4.9}$$

Найдем другие соотношения на компоненты объекта связности, используя ковариантные производные от λ. Для этого внесем формы связности (3.1) в (4.2). Преобразуя полученные равенства, имеем:

$$\nabla\lambda_a = \nabla_i\lambda_a\theta^i,\ \nabla\lambda^a_\alpha = \nabla_i\lambda^a_\alpha\theta^i,\ \nabla\lambda_\alpha = \nabla_i\lambda_\alpha\theta^i, \quad (4.10)$$

где в левых частях стоят ковариантные дифференциалы компонент λ относительно групповой связности Γ^1

$$\nabla\lambda_a = d\lambda_a - \lambda_b\tilde{\omega}^b_a + \tilde{\omega}_a,$$
$$\nabla\lambda^a_\alpha = d\lambda^a_\alpha + \lambda^b_\alpha\tilde{\omega}^a_b - \lambda^a_\beta\tilde{\omega}^\beta_\alpha + \tilde{\omega}^a_\alpha,$$
$$\nabla\lambda_\alpha = d\lambda_\alpha - \lambda_\beta\tilde{\omega}^\beta_\alpha + \lambda^a_\alpha\tilde{\omega}_a + \tilde{\omega}_\alpha,$$

а в правых частях перед базисными формами — ковариантные производные

$$\begin{gathered}\nabla_i\lambda_a = \lambda_{ai} + \lambda_b\Gamma^b_{ai} - \Gamma_{ai}.\\ \nabla_i\lambda^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha i} - \lambda^b_\alpha\Gamma^a_{bi} + \lambda^a_\beta\Gamma^\beta_{\alpha i} - \Gamma^a_{\alpha i},\\ \nabla_i\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha i} + \lambda_\beta\Gamma^\beta_{\alpha i} - \lambda^a_\alpha\Gamma_{ai} - \Gamma_{\alpha i}.\end{gathered} \quad (4.11)$$

Эти ковариантные производные удовлетворяют следующим дифференциальным сравнениям:

$$\Delta\nabla_i\lambda_a \equiv 0,\ \Delta\nabla_i\lambda^a_\alpha \equiv 0,\ \Delta\nabla_i\lambda_\alpha + \nabla_i\lambda^a_\alpha\omega_a \equiv 0.$$

Теорема 4.1. *Совокупность ковариантных производных* $\{\nabla_i\lambda_a, \nabla_i\lambda^a_\alpha, \nabla_i\lambda_\alpha\}$ *компонент оснащающего квазитензора* λ *образует тензор, содержащий 3 подтензора* $\nabla_i\lambda_a,\ \nabla_i\lambda^a_\alpha,\ \{\nabla_i\lambda^a_\alpha, \nabla_i\lambda_\alpha\}$.

Обращая эти ковариантные производные в нуль, получим новые возможные соотношения на компоненты объекта Γ^1:

$$\overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha i} = \lambda^a_{\alpha i} + \lambda^a_\beta\Gamma^\beta_{\alpha i} - \lambda^b_\alpha\Gamma^a_{bi}, \quad (4.12)$$

$$\overset{2}{\Gamma}_{ai} = \lambda_{ai} + \lambda_b\Gamma^b_{ai}, \quad (4.13)$$

$$\overset{2}{\Gamma}_{\alpha i} = \lambda^a_{\alpha i} + \lambda_\beta\Gamma^\beta_{\alpha i} - \lambda^a_\alpha\Gamma_{ai}. \quad (4.14)$$

Введем обозначение

$$\overset{1(A,B)}{\Gamma_{\alpha i}} = \overset{1}{\Gamma_{\alpha i}}(\Gamma^a_{bi}, \Gamma^\beta_{\alpha i}, \overset{A}{\Gamma^a_{\alpha i}}, \overset{B}{\Gamma_{ai}}) = \overset{A}{\Gamma^a_{\alpha i}}\lambda_a - \Gamma^\beta_{\alpha i}\mu_\beta - \overset{B}{\Gamma_{ai}}\lambda^a_\alpha + \\ + \Gamma^a_{bi}\lambda^b_\alpha\lambda_a - \Lambda^\beta_{bi}\lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha\lambda_a + \Lambda^a_i\lambda_a\lambda_\alpha + \Lambda^\beta_{ai}\lambda^a_\alpha\lambda_\beta - \Lambda^\beta_i\lambda_\alpha\mu_\beta, \tag{4.15}$$

где *A, B, C=1, 2*. Подставляя в (4.15) $\Gamma^a_{\alpha i} = \overset{1}{\Gamma^a_{\alpha i}}$ и $\Gamma_{ai} = \overset{1}{\Gamma_{ai}}$, получим:

$$\overset{1(1,1)}{\Gamma_{\alpha i}} = -\Gamma^a_{bi}\lambda^b_\alpha\lambda_a + \Gamma^\beta_{\alpha i}\lambda_\beta + \Lambda^\beta_{ai}\lambda^a_\alpha\lambda^b_\beta\lambda_b + \\ + \Lambda^\beta_i\lambda^b_\beta\lambda_b\lambda^a_\alpha\lambda_a - \Lambda^\beta_i\lambda^a_\alpha\lambda_a\lambda_\beta - \Lambda^b_i\lambda^a_\alpha\lambda_a\lambda_b + \Lambda^\beta_i\lambda_\alpha\lambda_\beta. \tag{4.16}$$

Поочередно подставляя в формулу (4.15) соотношения на величины $\Gamma^a_{\alpha i}$ и Γ_{ai}: сначала — (4.5, 4.13), затем — (4.5, 4.12) и, наконец, (4.5, 4.13), получаем соотношения для компонент $\Gamma_{\alpha i}$:

$$\overset{1(1,2)}{\Gamma_{\alpha i}} = \Gamma_{\alpha i}(\Gamma^a_{bi}, \Gamma^\beta_{\alpha i}, \overset{1}{\Gamma^a_{\alpha i}}, \overset{2}{\Gamma_{ai}}) = -\lambda_{ai}\lambda^a_\alpha + \Lambda^\beta_{bi}\lambda^a_\beta\lambda_a\lambda^b_\alpha - \Lambda^a_i\lambda_a\lambda_\alpha + \\ + \Gamma^\beta_{\alpha i}\lambda_\beta - \lambda_b\Gamma^b_{ai}\lambda^a_\alpha - \Lambda^\beta_{bi}\lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha\lambda_a + \Lambda^a_i\lambda_a\lambda_\alpha + \Lambda^\beta_{ai}\lambda^a_\alpha\lambda_\beta + \Lambda^\beta_i\lambda_\alpha\lambda_\beta, \tag{4.17}$$

$$\overset{1(2,1)}{\Gamma_{\alpha i}} = \Gamma_{\alpha i}(\Gamma^a_{bi}, \Gamma^\beta_{\alpha i}, \overset{2}{\Gamma^a_{\alpha i}}, \overset{1}{\Gamma_{ai}}) = \lambda^a_{\alpha i}\lambda_a + \Gamma^\beta_{\alpha i}\lambda_\beta - \Gamma^b_{ai}\lambda^a_\alpha\lambda_b + \\ + \Lambda^\beta_i\lambda^b_\beta\lambda_b\lambda^a_\alpha\lambda_a - \Lambda^\beta_i\lambda^a_\alpha\lambda_a\lambda_\beta - \Lambda^b_i\lambda^a_\alpha\lambda_a\lambda_b + \Lambda^a_i\lambda_a\lambda_\alpha + \\ + \Lambda^\beta_i\lambda_\alpha\lambda_\beta - \Lambda^\beta_i\lambda_\alpha\lambda_b\lambda^b_\beta, \tag{4.18}$$

$$\overset{1(2,2)}{\Gamma_{\alpha i}} = \Gamma_{\alpha i}(\Gamma^a_{bi}, \Gamma^\beta_{\alpha i}, \overset{2}{\Gamma^a_{\alpha i}}, \overset{2}{\Gamma_{ai}}) = \lambda^a_{\alpha i}\lambda_a + \Gamma^\beta_{\alpha i}\lambda_\beta - \lambda_{ai}\lambda^a_\alpha - \Gamma^b_{ai}\lambda_b\lambda^a_\alpha - \\ - \Lambda^\beta_{bi}\lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha\lambda_a + \Lambda^a_i\lambda_a\lambda_\alpha + \Lambda^\beta_{ai}\lambda^a_\alpha\lambda_\beta - \Lambda^\beta_i\lambda_\alpha\mu_\beta. \tag{4.19}$$

Введем обозначение

$$\overset{2(C)}{\Gamma_{\alpha i}} = \overset{2}{\Gamma_{\alpha i}}(\overset{C}{\Gamma_{ai}}) = \lambda^a_{\alpha i} + \lambda_\beta\Gamma^\beta_{\alpha i} - \lambda^a_\alpha\overset{C}{\Gamma_{ai}}. \tag{4.20}$$

Подставим в формулу (4.20) соотношения на Γ_{ai} — сначала (4.5), а потом (4.13):

$$\overset{2(1)}{\Gamma}{}_{\alpha i} = \lambda^a_{\alpha i} + \lambda_\beta \Gamma^\beta_{\alpha i} - \lambda^a_\alpha \overset{1}{\Gamma}{}_{ai}\,, \qquad (4.21)$$

$$\overset{2(2)}{\Gamma}{}_{\alpha i} = \lambda^a_{\alpha i} + \lambda_\beta \Gamma^\beta_{\alpha i} - \lambda^a_\alpha \overset{2}{\Gamma}{}_{ai}\,. \qquad (4.22)$$

Теорема 4.2. *Композиционное оснащение многообразия* B_r *позволяет задать в ассоциированном расслоении* $G_s\left(B_r\right)$ *два сверхпучка связностей*

$$\overset{1}{\Gamma} = \{\, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^a_{\alpha i}, \Gamma_{ai}, \overset{1}{\Gamma}{}_{\alpha i} \,\},\ \overset{2}{\Gamma} = \{\, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \Gamma_{ai}, \overset{2}{\Gamma}{}_{\alpha i} \,\}.$$

Замечание 3. Второй сверхпучок является аналогом рассмотренного в работе [4].

Теорема 4.3. *Сильное аффинное оснащение многообразия* B_r *позволяет задать в ассоциированном расслоении* $G_s\left(B_r\right)$ *шесть многопараметрических пучков связностей*

$$\overset{111}{\Gamma} = \{\, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \overset{1}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{1}{\Gamma}{}_{ai}, \overset{1(1,1)}{\Gamma}{}_{\alpha i} \,\},\quad \overset{211}{\Gamma} = \{\, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{1}{\Gamma}{}_{ai}, \overset{1(2,1)}{\Gamma}{}_{\alpha i} \,\},$$

$$\overset{212}{\Gamma} = \{\, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{1}{\Gamma}{}_{ai}, \overset{2(1)}{\Gamma}{}_{\alpha i} \,\},\quad \overset{121}{\Gamma} = \{\, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \overset{1}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{2}{\Gamma}{}_{ai}, \overset{1(1,2)}{\Gamma}{}_{\alpha i} \,\},$$

$$\overset{221}{\Gamma} = \{\, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{2}{\Gamma}{}_{ai}, \overset{1(2,2)}{\Gamma}{}_{\alpha i} \,\},\quad \overset{222}{\Gamma} = \{\, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{2}{\Gamma}{}_{ai}, \overset{2(2)}{\Gamma}{}_{\alpha i} \,\}.$$

Замечание 4. На параметры $\Gamma^a_{bi}, \Gamma^\alpha_{\beta i}$ наложено единственное ограничение — это уравнения (4.6), (4.7).

Подставляя охваты подобъектов Γ^a_{bi} и $\Gamma^\alpha_{\beta i}$ в равенства (4.12, 4.13), получаем следующие формулы охватов для компонент $\Gamma^a_{\alpha i}$ и Γ_{ai}:

$$\overset{02}{\Gamma}{}^a_{\alpha i} = \lambda^a_{\alpha i} + \lambda^a_\beta \overset{0}{\Gamma}{}^\beta_{\alpha i} - \lambda^b_\alpha \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}\,, \qquad (4.22)$$

$$\overset{02}{\Gamma}{}_{ai} = \lambda_{ai} + \lambda_b \overset{0}{\Gamma}{}^b_{ai}\,. \qquad (4.23)$$

Подставляя в соотношения (4.16—4.19) охваты (4.6), (4.7) величин Γ^a_{bi}, $\Gamma^\alpha_{\beta i}$, получим формулы охватов для компонент $\Gamma_{\alpha i}$: $\overset{01(1,1)}{\Gamma}_{\alpha i}$, $\overset{01(1,2)}{\Gamma}_{\alpha i}$, $\overset{01(2,1)}{\Gamma}_{\alpha i}$, $\overset{01(2,2)}{\Gamma}_{\alpha i}$. Аналогично подставляя в (4.21) и (4.22) охваты (4.7, 4.9, 4.23), получим: $\overset{02(1)}{\Gamma}_{\alpha i}$, $\overset{02(2)}{\Gamma}_{\alpha i}$.

Теорема 4.4. *Сильное аффинное оснащение многообразия B_r индуцирует в ассоциированном расслоении следующие типы групповой связности 1-го порядка:*

$$\overset{0111}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{01}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{01}{\Gamma}_{ai}, \overset{01(1,1)}{\Gamma}_{\alpha i}\}, \quad \overset{0211}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{02}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{01}{\Gamma}_{ai}, \overset{01(2,1)}{\Gamma}_{\alpha i}\},$$

$$\overset{0212}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{02}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{01}{\Gamma}_{ai}, \overset{02(1)}{\Gamma}_{\alpha i}\}, \quad \overset{0121}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{01}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{02}{\Gamma}_{ai}, \overset{01(1,2)}{\Gamma}_{\alpha i}\},$$

$$\overset{0221}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{02}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{02}{\Gamma}_{ai}, \overset{01(2,2)}{\Gamma}_{\alpha i}\}, \quad \overset{0222}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{02}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{02}{\Gamma}_{ai}, \overset{02(2)}{\Gamma}_{\alpha i}\}.$$

Замечание 5. Типы $\overset{0111}{\Gamma}$ и $\overset{0222}{\Gamma}$ ранее рассматривались в работе [1]. Шесть типов связностей для случая распределения центрированных плоскостей приведены в работе [2].

Список литературы

1. *Бондаренко Е. В.* Связности на многообразии центрированных плоскостей в проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2000. Вып. 31. С. 12—16.

2. *Омельян О. М.* Классификация пучков связностей, индуцированных композиционным оснащением распределения плоскостей // Там же. 2006. Вып. 37. С. 119—127.

3. *Полякова К. В.* О лемме Г. Ф. Лаптева // Там же. 2008. Вып. 38. С. 111—116.

4. *Полякова К. В.* Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием пар касательной и соприкасающейся плоскостей поверхности // Тр. геом. семинара. Казань, 1997. Вып. 23. С. 99—112.

5. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

A. Kuleshov

SIX TYPES OF INDUCED GROUP CONNECTION
ON THE FAMILY OF CENTRED PLANES IN PROJECTIVE SPACE

Family of centered planes in projective space is investigated. Factor-bundles of the principal bundle, associated with this bundle, are described. It is shown, that composite equipment of this family induces 6 bunches of group connection. In each of this bunches one connection is allocated.

УДК 574.76

В. С. Малаховский

*(Российский государственный университет им. И. Канта,
г. Калининград)*

ПРАВИЛЬНАЯ ПРОДОЛЖАЕМОСТЬ СИСТЕМЫ ПФАФФОВЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ ОСНАЩЕННЫХ И ИНДУЦИРУЮЩИХ ФИГУР

(К столетию со дня рождения Г. Ф. Лаптева)

Показано, что установленный Г. Ф. Лаптевым закон о правильной продолжаемости системы уравнений Пфаффа дифференцируемого многообразия в однородных и обобщенных пространствах [1, с. 323—326] необходимо соблюдать и при рассмотрении вырожденных многообразий [2, с. 41—43] оснащенных и индуцирующих фигур [3, с. 186—187].

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассмотрены правильно продолжаемые системы уравнений Пфаффа m-мерных вырожденных многообразий некоторых типов линейных и квадратичных пар фигур $\{F_1, F_2\}$, когда фигура F_1 описывает m-мерное многообразие, а фигура F_2 — r-мерное многообразие $(r < m < n)$.