Б.А. А н д р е е в

# ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ ТОЧЕЧНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ И ПРОСТРАНСТВОМ ПАРЫ $(p,q)$

Продолжается изучение локального соответствия $f$ между точечным проективным пространством $P_N$ и пространством $R(F)$ пар фигур $F=(p,q)$ ,где $p$ -точка n-мерного проективного пространства $P_n$ ,а $q$ -не инцидетная ей гиперквадрика. [I],[2] .Различные типы характеристических направлений отображения $f$ связываются,с одной стороны, с отображениями,касательными к данному и ассоциированным с ним отображением,с другой стороны,с некоторыми семействами пар $F$ .

## §I.Инфлексионные однопараметрические семейства пар $F$

Однопараметрические многообразия фигур будем называть I-семействами.Рассмотрим некоторые I-семейства пар $F=(p,q)$, содержащие фиксированную пару $F^\circ=(p^\circ,q^\circ)$,а также I-семейства некоторых индуцируемых парой $F$ фигур.Система дифференциальных уравнений I-семейства $\{F\}$ пар $F$ имеет вид:

$$\omega^i_0 = \Lambda^i \theta, \tag{1.1}$$

$$\omega^0_i = \Lambda_i \theta, \tag{1.2}$$

$$\nabla a_{ij} = \Lambda_{ij} \theta, \tag{1.3}$$

где $\omega^i$, $\omega^0_i$ и $\nabla a_{ij}$ $(i,j=1,\dots,n)$-главные формы пары $F$ [I,c.28] ,а $\theta$ -параметрическая форма,для которой выполняется $d\theta = 0$ .Продолжая систему (I.I)-(I.3) и используя обозначения из [I,c.29] ,получаем:

$$\nabla \Lambda^i = M^i \theta, \quad \nabla \Lambda_i = M_i \theta, \quad \nabla \Lambda_{ij} = M_{ij} \theta, \tag{1.4}$$

$$\mathring{\nabla} M_i = 0, \quad \mathring{\nabla} M_i = 0, \quad \mathring{\nabla} M_{ij} = 0. \tag{1.5}$$

Таким образом,фундаментальные объекты I-семейств $\{F\}$ первого и второго порядков $\{\Lambda^i, \Lambda_i, \Lambda_{ij}\}$ и $\{M^i, M_i, M_{ij}\}$ и их подобъекты: $\{\Lambda^i\}, \{\Lambda_i\}, \{\Lambda_{ij}\}$ и $\{M^i\}, \{M_i\}, \{M_{ij}\}$ являются тензорами.I-семейство (кривая) $\{p\}$ точек $p$ ,порожденное I-семейством $\{F\}$ и определяемое последовательностью геометрических объектов $\{\Lambda^i\}$, $\{\Lambda^i, M^i\}$,... имеет в окрестности точки $p^0$ следующее координатное представление:

$$\tilde{x}^i = \Lambda^i u + \frac{1}{2} M^i u^2 + \langle 3 \rangle, \tag{1.6}$$

где $\tilde{x}^i$ -неоднородные координаты точки $p$, $du = \theta$ , $\langle 3 \rangle$ означает совокупность членов 3-го порядка малости относительно $u$ .

Аналогично I-семейство $\{\pi\}$ гиперплоскостей $\pi$ ,индуцируемых парами $F$, определяется последовательностью объектов $\{\Lambda_i\}$, $\{\Lambda_i, M_i\}$,...и имеет в окрестности элемента $\pi^0$ ,индуцируемого парой $F^0$ ,координатное представление

$$\tilde{\xi}_i = -\Lambda_i u - \frac{1}{2} M_i u^2 + \langle 3 \rangle \tag{1.7}$$

в тангенциальных неоднородных координатах $\tilde{\xi}_i$.

Уравнение гиперквадрики $q$ в репере,нулевая вершина которого расположена в точке $p^0$ ,а остальные-на гиперплоскости $\pi^0$ ,имеет в однородных координатах $x^0, x^i$ следующий вид:

$$a_{ij} x^i x^j + 2 a_{0i} x^i x^0 + (x^0)^2 = 0. \tag{1.8}$$

Гиперквадрика (I.8) определяет в $P_n$ преобразование,имеющее следующий вид в неоднородных координатах:

$$\tilde{x}^{i'} = \sqrt{1 - c^i a_{0i}}\ \tilde{x}^i + c^i, \tag{1.9}$$

где $c^i$ и $a_{0i}$ - соответственно неоднородные координаты полюса гиперплоскости $\pi$ и координаты поляры точки $p^0$ относительно гиперквадрики $q$ .Прообразом гиперквадрики (I.8) при преобразовании (I.9) является гиперквадрика:

$$a_{ij} x^i x^j + (x^0)^2 = 0. \tag{1.10}$$

Назовем обратное к (I.9) преобразование преобразованием $C$, а гиперквадрику (I.10)- $C$ образом гиперквадрики (I.8): $Q = C(q)$. Таким образом, $\operatorname{rang} Q = \dim R(Q) = C^2_{n+1}$ [3] Главными формами гиперквадрики $q$ являются формы Пфаффа:

$$\nabla a_{ij}, \quad \nabla a_{0i} = -\omega^0_i - a_{il} \omega^l_0.$$

Пусть $a^{\circ}_{ij}$ -координаты гиперквадрики $q^{\circ}$ .Тогда система дифференциальных уравнений I-семейства гиперквадрик $q$ имеет вид:

$$\nabla a_{ij} = \Lambda_{ij\gamma}\theta, \quad \nabla a_{oi} = \Lambda_{oi}\theta, \quad \Lambda_{oi} = -\Lambda_i - a_{ij}\Lambda^j. \tag{1.11}$$

Продолжением геометрического объекта I-го порядка $\{\Lambda_{ij}, \Lambda_{oi}\}$ I-семейства $\{q\}$ является объект $\{M_{ij}, M_{oi}\}$, причем

$$M_{oi} = M_i + a_{ij}M^j + \Lambda_{ij}\Lambda^j, \tag{1.12}$$

и,таким образом,координатное представление I-семейства имеет вид:

$$a_{ij} = a^{\circ}_{ij} + \Lambda_{ij}u + \frac{1}{2}M_{ij}u^2 + <3>, \tag{1.13}$$

$$a_{oi} = \Lambda_{oi}u + \frac{1}{2}M_{oi}u^2 + <3>. \tag{1.14}$$

Равенства (I.13) дают координатное представление I-семейства $\{Q\}$, $Q = C(q)$, порожденного семейством $\{q\}$, а (I.14)–I-семейства $\{\Pi\}$ гиперплоскостей $\Pi$: $a_{oi}x^i + x^{\circ} = 0$, являющихся полярами точки $p^{\circ}$ относительно гиперквадрики $q$.

Определение I. I-семейство $\{F\}$ называется $p$-инфлексионным в элементе $F^{\circ}$ ,если кривая $\{p\}$ в точке $p^{\circ}$ инфлексионна.

Учитывая двойственность пространств точек и гиперплоскостей,дадим следующее определение.

Определение 2. I-семейство $\{F\}$ называется $\pi$-инфлексионным ( $\Pi$-инфлексионным) в элементе $F^{\circ}$,если I-семейство $\{\pi\}(\{\Pi\})$ инфлексионно в гиперплоскости $\pi^{\circ}(\Pi^{\circ}=\pi^{\circ})$.



Из определений I,2 следует,что условием инфлексионности I-семейств $\{p\}$, $\{\pi\}$ и $\{\Pi\}$ в элементах $p^{\circ}$ и $\pi^{\circ}$ будут иметь,соответственно,вид [4] :

$$M^i = s\Lambda^i, \tag{1.15}$$

$$M_i = t\Lambda_i, \tag{1.16}$$

$$M_{oi} = \tau\Lambda_{oi} \tag{1.17}$$

Определение 3. I-семейство гиперквадрик называется инфлексионным в фиксированной гиперквадрике,если его характеристические многообразия 2-го и I-го ранга для этой гиперквадрики совпадают [5,с.53].

Определение 4. I-семейство $\{F\}$ называется $Q$ инфлексионным ( $q$-инфлексионным) в элементе $F^{\circ}$ ,если I-семейство $\{Q\}$ $C$-образов гиперквадрик $q$ ( $\{q\}$ гиперквадрик $q$ ) является инфлексионным в гиперквадрике $Q^{\circ}=q^{\circ}$ (в гиперквадрике $q^{\circ}$ ).

Условия $Q$-инфлексионности и $q$- инфлексионности I-семейства $\{F\}$ имеют соответственно вид:

$$M_{ij} = t\Lambda_{ij}, \tag{1.18}$$

$$M_{ij} = \tau\Lambda_{ij}, \quad M_{oi} = \tau\Lambda_{oi}. \tag{1.19}$$

Определение 5. 1-семейство $\{F\}$ называется слабо $p$-инфлексионным в элементе $\{F^{\circ}\}$ ,если оно является в нем $p$-инфлексионным и $\pi$-инфлексионным.

Условие слабой $p,\pi$-инфлексионности имеет вид:

$$M^i = \tau\Lambda^i, \quad M_i = s\Lambda_i. \tag{1.20}$$

Определение 6. Назовем слабо $\rho,\pi$-инфлексионное I-семейство $\{F\}$ $\rho,\pi$-инфлексионным в элементе $F^\circ$, если $\tau = s$.

Выясним геометрический смысл $\rho,\pi$-инфлексионности. I-семейство $\{\Phi\}$ пар $\Phi$ фигур $\Phi_1$ и $\Phi_2$ определяет I-семейства $\{\Phi_1\}$ и $\{\Phi_2\}$ фигур $\Phi_1$ и $\Phi_2$ и соответствие между элементами этих семейств: фигуры $\Phi_1 \in \{\Phi_1\}$ и $\Phi_2 \in \{\Phi_2\}$ соответствуют, если они составляют пару $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ из семейства $\{\Phi\}$.

I-семейство (I.6),(I.7) определяет прямую $\ell$ и пучок гиперплоскостей $\lambda$, задаваемые соответственно тензорами $\{\Lambda^i\}$ и $\{\Lambda_i\}$:

$$\tilde{x}^i = \Lambda^i u, \tag{1.21}$$

$$\tilde{\xi}_i = -\Lambda_i u, \tag{1.22}$$

и проективное соответствие между элементами $\ell$ и $\lambda$. Действительно, (I.21) и (I.22) задают проективные соответствия $\varphi_1$ и $\varphi_2$ между точками числовой прямой $R$ и элементами $\ell$, между точками $R$ и элементами из $\lambda$. Тогда отображение $\mathcal{X} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon \ell \longrightarrow \lambda$ будет проективным.

Пусть сужение корреляции $K$ на $\ell$ совпадает с $\mathcal{X}$, и, кроме того, $K(\rho)$ принадлежит связке гиперплоскостей $\{\rho^\circ\}$, если $\rho \in \pi^\circ$.

Теорема I. Чтобы слабо $\rho,\pi$-инфлексионное в элементе $F^\circ$ I-семейство $\{F\}$ было $\rho,\pi$-инфлексионным, необходимо и достаточно, чтобы соответствие, порождаемое $f$



I-семейством пар $(\rho, \hat{\rho})$, где $\hat{\rho} = K^{-1}(\pi)$ с точностью до 2-го порядка малости относительно $u$ совпадало с тождественным отображением.

Доказательство. Отображение $K^{-1}$ имеет вид: $\tilde{x}^i = A^{ij}\tilde{\xi}_j$, откуда $\Lambda^i = -A^{ij}\Lambda_j$. В условиях теоремы I-семейство пар $(\rho, \pi)$ (I.6),(I.7) можно представить в виде

$$\tilde{X}^i = \Lambda^i V + \langle 3 \rangle, \quad \tilde{\xi}_i = -\Lambda^i V - \Lambda^i C V^2 + \langle 3 \rangle, \tag{1.23}$$

где $V = u + \frac{1}{2}\tau u^2$ и $C = 0$, если I-семейство $\{F\}$ $\rho,\pi$-инфлексионно, и $C = \frac{1}{2}(s-\tau)$, если не является $\rho,\pi$-инфлексионным. Для координат $\tilde{y}^i$ точки $\hat{\rho}$ имеем:

$$\tilde{y}^i = A^{ij}(-\Lambda_j V - \Lambda_j C V^2 + \langle 3 \rangle) = \Lambda^i V + \Lambda^i C V^2 + \langle 3 \rangle,$$

откуда следует утверждение теоремы.

## §2. Касательные отображения

Отображение $f\colon U \to R(F)$, $f(P) = (\rho, q)$, где $P \in U \subset P_N$, порождает отображение $f_\rho\colon U \to P_n$, $f_\rho(P) = \rho$, уравнения которого в неоднородных координатах в окрестности фиксированной точки $P^\circ$ имеют вид:

$$\tilde{x}^i = \Lambda^i_J \tilde{X}^J + \frac{1}{2}\Lambda^i_{JK}\tilde{X}^J\tilde{X}^K + \langle 3 \rangle, \quad (J, K = 1, \dots, N), \tag{2.1}$$

где $\langle 3 \rangle$ означает совокупность членов 3-го порядка малости относительно $\tilde{X}^J$. Уравнения отображения $f_\pi\colon U \to R(\pi)$ $f_\pi(P) = \pi$ имеют вид:

$$\tilde{\xi}_i = -\Lambda_{iJ}\tilde{X}^J - \frac{1}{2}\Lambda_{iJ\varkappa}\tilde{X}^J\tilde{X}^\varkappa + \langle 3\rangle \qquad (2.2)$$

Пусть отображение $f_q : U \to R(q)$ определяется условием $f_q(P) = q$ при $f(P) = (p,q)$, а гиперквадрика $q$ из окрестности $f_q(U)$ фиксированного элемента $q^\circ = f_q(P^\circ)$ задается уравнением (I.8). Тогда

$$a_{ij} = a^\circ_{ij} + \Lambda_{ijJ}\tilde{X}^J + \frac{1}{2}\Lambda_{ijJ\varkappa}\tilde{X}^J\tilde{X}^\varkappa + \langle 3\rangle, \qquad (2.3)$$

$$a_{0i} = -\Lambda_{0iJ}\tilde{X}^J - \frac{1}{2}\Lambda_{0iJ\varkappa}\tilde{X}^J\tilde{X}^\varkappa + \langle 3\rangle, \qquad (2.4)$$

где $a^\circ_{ij}$ – координаты гиперквадрики $q^\circ$, а

$$\Lambda_{0iJ} = a_{i\ell}\Lambda^\ell_J, \qquad (2.5)$$

$$\Lambda_{0iJ\varkappa} = \Lambda_{iJ\varkappa} + a_{i\ell}\Lambda^\ell_{J\varkappa} + \Lambda_{i\ell(J}\Lambda^\ell_{\varkappa)}. \qquad (2.6)$$

Скобки означают симметрирование.

Уравнения касательных к $f_p$, $f_\pi$ и $f_q$ отображений $K_p(S_J)$, $K_\pi(T_J)$ и $K_q(R_J)$ имеют соответственно вид:

$$\tilde{x}^i = \frac{\Lambda^i_J\tilde{X}^J}{1 - S^i_J\tilde{X}^J}, \qquad (2.7)$$

$$\tilde{\xi}_i = \frac{-\Lambda_{iJ}\tilde{X}^J}{1 - T_J\tilde{X}^J}, \qquad (2.8)$$

$$a_{ij} = a^\circ_{ij} + \frac{\Lambda_{ijJ}\tilde{X}^J}{1 - R_J\tilde{X}^J}, \qquad (2.9)^{(1)}$$

$$a_{0i} = \frac{-(\Lambda_{0i} + \Lambda^j_J a^\circ_{ij})\tilde{X}^J}{1 - R_J\tilde{X}^J}. \qquad (2.9)^{(2)}$$



Системы величин $\{R_J\}$, $\{S_J\}$ и $\{T_J\}$ имеют следующий закон преобразования:

$$\overset{\circ}{\nabla} R_J = \overset{\circ}{\nabla} S_J = \overset{\circ}{\nabla} T_J = -\Pi^\circ_J, \qquad (2.10)$$

т.е. являются квазитензорами. Они определяют гиперплоскости в $P_N$:

$$R_J X^J - X^\circ = 0, \qquad (2.11)$$

$$S_J X^J - X^\circ = 0, \qquad (2.12)$$

$$T_J X^J - X^\circ = 0 \qquad (2.13)$$

имеющие следующий геометрический смысл. Если точка $A$ не лежит на нулевом направлении соответствующего отображения и принадлежит гиперплоскости (2.II) ((2.I2),(2.I3)), то точка $K_p(S_J)(A)$ лежит в гиперплоскости $\pi$ (гиперплоскость $K_\pi(T_J)(A)$ инцидентна точке $p$, гиперквадрика $K_q(R_J)(A)$ инцидентна точке $p$). Отображения (2.7)-(2.9) обладают следующим свойством.

Т е о р е м а 2. Образами инфлексионной в точке $P$ кривой в $P_N$ при отображениях $K_p(S_J)$, $K_\pi(T_J)$ и $K_q(R_J)$ являются, соответственно, инфлексионная в точке $p^\circ$ кривая $\{p\}$, инфлексионное в элементе $\pi^\circ$ I-семейство гиперплоскостей $\{\pi\}$, инфлексионное в элементе $q^\circ$ I-семейство гиперквадрик $\{q\}$.

Справедливость этого утверждения из разложений этих отображений в ряд в окрестности точки $P^\circ$:

$$\tilde X^i = \Lambda^i_J \tilde X^J + S_J \Lambda^i_K \tilde X^J \tilde X^K + \langle 3 \rangle, \tag{2.14}$$

$$\tilde \xi_i = -\Lambda_{iJ} \tilde X^J - T_J \Lambda_{iK} \tilde X^J \tilde X^K + \langle 3 \rangle, \tag{2.15}$$

$$a_{ij} = a^\circ_{ij} + \Lambda_{ijJ} \tilde X^J + R_J \Lambda_{ijK} \tilde X^J \tilde X^K + \langle 3 \rangle, \tag{2.16}$$

$$a_{oi} = -\Lambda_{oiJ} \tilde X^J - R_J \Lambda_{oiK} \tilde X^J \tilde X^K + \langle 3 \rangle, \tag{2.17}$$

и формул (I.6),(I.7),(I.13),(I.14) и (I.15)-(I.19).

Выделяемую из множества касательных к отображению $f_{p,\pi}: U \to R(p,\pi)$ (2.I),(2.2) отображений $K_{p,\pi}(S_J,T_J)$ (2.7),(2.8) условием $T_J = S_J$ связку отображений $K_{p,\pi}(S_J)$ будем называть связкой согласованных касательных к $f_{p,\pi}$ отображений. Условие $T_J = S_J$ означает, что прообраз множества точек гиперплоскости $\pi$ при $K_p(S_J)$ совпадает с прообразом связки гиперплоскостей, инцидентных точке $p$, при $K_\pi(S_J)$.

Т е о р е м а 3. Образами инфлексионной в точке $P_o$ кривой $L$ при отображениях $K_{p,\pi}(S_J)$ являются I-семейства пар $(p,\pi)$, индуцируемые $p,\pi$-инфлексионным в элементе $F^\circ$ I-семейством $\{F\}$.



Д о к а з а т е л ь с т в о. Координатное представление кривой $L$ при соответствующей параметризации имеет вид:

$$\tilde X^J = \Lambda^J u + \langle 3 \rangle. \tag{2.18}$$

Подставляя (2.I8) в (2.I4),(2.I5), получаем удовлетворяющее теореме I-семейство пар $(p,\pi)$:

$$\tilde X^i = \Lambda^i u + k \Lambda^i u^2 + \langle 3 \rangle, \ \Lambda^i = \Lambda^i_J \Lambda^J, \ k = S_J \Lambda^J, \tag{2.19}$$

$$\tilde \xi_i = -\Lambda_i u - k \Lambda_i u^2 + \langle 3 \rangle, \ \Lambda_i = \Lambda_{iJ} \Lambda^J, \ k = S_J \Lambda^J. \tag{2.20}$$

Отметим, что доказанным свойством не обладают отображения (2.7),(2.8) при $T_J \neq S_J$:

Т е о р е м а 4. Образами инфлексионной в точке $P^\circ$ кривой при отображениях $K_{p,\pi}(S_J,T_J)$ являются 1-семейства пар $(p,\pi)$, индуцируемые слабо $p,\pi$-инфлексионным в элементе $F^\circ$ I-семейством $\{F\}$.

## § 3. Характеристические направления

Объекты второго порядка: $\{\Lambda^i_J, \Lambda^i_{JK}\}$, $\{\Lambda_{iJ}, \Lambda_{iJK}\}$, $\{\Lambda_{ijJ}, \Lambda_{ijJK}\}$, $\{\Lambda_{oiJ}, \Lambda_{oiJK}\}$, определяют в $P_N$ инвариантные многообразия, задаваемые в однородных координатах системой уравнений

$$\Lambda^i_{JK} X^J X^K - 2\Lambda^i_J (X^\circ + \sigma) = 0, \tag{3.1}$$

$$\Lambda_{i\mathcal{J}\varkappa}X^{\mathcal{J}}X^{\varkappa}-2\Lambda_{i\mathcal{J}}(X^{\circ}+\tau)=0, \quad (3.2)$$

$$\Lambda_{ij\mathcal{J}\varkappa}X^{\mathcal{J}}X^{\varkappa}-2\Lambda_{ij\mathcal{J}}(X^{\circ}+\varrho)=0, \quad (3.3)(1)$$

$$\Lambda_{oi\mathcal{J}\varkappa}X^{\mathcal{J}}X^{\varkappa}-2\Lambda_{oi\mathcal{J}}(X^{\circ}+\varrho)=0. \quad (3.3)(2)$$

Многообразия (3.I)- (3.3) представляют собой конуса, образующими которых являются прямые связки $\{P^{\circ}\}$ ,а направляющими-инвариантные алгебраические многообразия,задаваемые системами (3.I)-(3.3) при $\sigma=\tau=\varrho=0$ и имеющие соответственно размерности: $N-n, N-n, n$.

Определение 7. Направления,определяемые конусами (3.I),(3.2) и (3.3), называются соответственно $p$-характеристическими, $\pi$ -характеристическими и $q$-характеристическими.

Тривиально характеристическими направлениями каждого типа будем называть направления,касающиеся инвариантной направляющей соответствующего конуса (3.I)-(3.3) в точке $P^{\circ}$ .Они лежат соответственно в подпространствах:

$$\Lambda^{i}_{\mathcal{J}}X^{\mathcal{J}}=0,\ \Lambda_{i\mathcal{J}}X^{\mathcal{J}}=0,\ \Lambda_{ij\mathcal{J}}X^{\mathcal{J}}=0,\ \Lambda_{oi\mathcal{J}}X^{\mathcal{J}}=0. \quad (3.5)$$

Такие направления будут исключены из дальнейших рассмотрений.

Теорема 5.Направление,определяемое в точке $P^{\circ}$ инфлексионной в ней кривой будет $p(\pi,q)$ -характеристическим в том и только в том случае,если образ этой кривой при отображении $f$ будет соответственно $p(\pi,q)$ -инфлексионным I-семейством $\{F\}$ в элементе $F^{\circ}$.



Доказательство следует из формул (2.I8),(2.I)-(2.4), (3.I)-(3.4) и (I.5)-(I.8).

Теорема 6.Отображения $f_p, f_\pi$ и $f_q$ соприкасаются с касательными к ним отображениями $K_p(S_{\mathcal{J}}), K_\pi(T_{\mathcal{J}})$ и $K_p(R_{\mathcal{J}})$ соответственно по $p$-характеристическим, $\pi$-характеристическим и $q$-характеристическим направлениям.

Доказательство следует из теорем 2 и 5.

Определение 8. Слабо $p,\pi$-характеристическими и $p,\pi$-характеристическими направлениями называются направления определяемые соответственно конусом (3.I), (3.2) и конусом (3.I),(3.2) при условии $\tau=\sigma$.

Теорема 7. Направление,определяемое в $P^{\circ}$ инфлексионной в ней кривой,будет слабо $p,\pi$-характеристическим ($p,\pi$-характеристическим) в том и только в том случае, если образ этой кривой при отображении $f$ будет слабо $p,\pi$-инфлексионным ($p,\pi$-инфлексионным) I-семейством.

Теорема 8.Отображение $f_{p,\pi}: U\to R(p,\pi)$ соприкасается с касательными к нему отображениями $K_{p,\pi}(S_{\mathcal{J}},T_{\mathcal{J}})$ и $K_{p,\pi}(S_{\mathcal{J}})$ по соответственно слабо $p,\pi$-характеристическим и $p,\pi$-характеристическим направлениям.

Теоремы 7,8 доказываются аналогично теоремам 5 и 6.

Определение 9. Направления,определяемые конусами (3.3)(I) и (3.3)(2),называются соответственно $Q$-характеристическими и $\Pi$-характеристическими.

Эти направления обладают свойствами,аналогичными свойствам $p,\pi$ и $q$-характеристических направлений,сформулированным в теоремах 5 и 6.

## Список литературы

I. А н д р е е в Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары $(p,q)$ и точечным пространством.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Вып.2.Калининград,1970,с.28-37.

2. А н д р е в Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между точечными пространствами и некоторыми пространствами пар фигур.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.3.Калининград.1973.с.6-19.

3. М а л а х о в с к и й В.С.Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.-"Труды геометрического семинара,1969,т.2.М.,ВИНИТИ, с.179-206.

4. Р ы ж к о в В.В.Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами.-"Итоги науки. ВИНИТИ.Геометрия,1963,с.65-107.

5. М а х о р к и н В.В.Некоторые типы многообразий гиперквадрик.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур .Вып.3,Калининград,1973,с.50-59.






В.Т. Б а з ы л е в

## МНОГОМЕРНЫЕ СЕТИ ДВОЙНЫХ ЛИНИЙ

С.П.Фиников [I] изучал сети двойных линий на паре поверхностей в трехмерном проективном пространстве.В предлагаемой статье мы исследуем сети двойных линий на паре гиперповерхностей проективного $n$-пространства.

I.Пусть в проективном $n$-пространстве $P_n$ заданы две гладкие гиперповерхности $V_{n-1}$ и $V'_{n-1}$ и диффеоморфизм $f: V_{n-1} \to V'_{n-1}$ такой,что $f(A) \neq A$, $\forall A \in V_{n-1}$.

Присоединим к паре этих гиперповерхностей подвижной проективный репер $\mathcal{R}=\{A, A_1, \dots, A_n\}$, где $A \in V_{n-1}$, $A_n = f(A) \in V'_{n-1}$, $A_i \in P_{n-2}(A)$ $(i,j,k=1,2,\dots,n-1)$ ,где $P_{n-2}(A)$ -пересечение касательных гиперплоскостей к $V_{n-1}$ и $V'_{n-1}$ ,взятых соответственно в точках $A$ и $A_n$ .Имеем деривационные формулы:

$$dA = \omega_0^0 A_0 + \omega^i A_i ,$$

$$dA_i = \omega_i^0 A + \omega_i^j A_j + \omega_i^n A_n , \qquad (1)$$

$$dA_n = \omega_n^0 A + \omega_n^i A_i + \omega_n^n A_n .$$

Если зафиксировать точку $A$ (положив $\omega^i = 0$), то будут