УДК 514.76

Г. А. Банару[1]
[1] Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-1

О 6-мерных АН-подмногообразиях класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ алгебры Кэли

Установлено, что 6-мерное $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$-подмногообразие алгебры октав, через каждую точку которого проходит гиперповерхность с квазисасакиевой структурой, является почти келеровым многообразием.

Ключевые слова: почти эрмитово многообразие, классы Грея — Херверллы, почти контактная метрическая структура, квазисасакиева структура, алгебра Кэли.

1. Многие специалисты считают, что опубликованная 40 лет назад статья [1] А. Грея и Л. М. Херверллы — самая значительная работа в области геометрии почти эрмитовых многообразий. Основной результат этой работы — выделение 16 классов (хотя правильнее было бы сказать — типов) почти эрмитовых структур.

Классы Грея — Херверллы изучены крайне неравномерно. Наименее изученными являются так называемые большие классы: $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ и $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$. Многообразия класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ с 80-х годов прошлого века обычно исследовались под названием полукелеровых (semi-Kählerian, SK-) многообразий, за многообразиями классов

Поступила в редакцию 12.03.2020 г.

$W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ и $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ закрепились названия G_1 - и G_2-многообразий соответственно. У многообразий класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ нет особого названия из-за того, что они практически никогда не изучались отдельно, то есть класс почти эрмитовых многообразий $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ — наименее исследованный среди всех 16 классов Грея — Херведлы. При этом он включает в себя келеровы, приближенно келеровы, почти келеровы, локально конформные келеровы и квазикелеровы многообразия, а также многообразия Вайсмана — Грея.

В настоящей заметке мы рассматриваем почти эрмитову структуру класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, индуцированную на 6-мерных подмногообразиях алгебры октав.

2. Под почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на многообразии четной размерности M^{2n} понимают пару $\{J, g = \langle \cdot,\cdot \rangle\}$, состоящую из почти комплексной структуры J и римановой метрики $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$, которые согласованы условием

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль всех гладких векторных полей на многообразии M^{2n} [1]. Для каждой AH-структуры $\{J, g = \langle \cdot,\cdot \rangle\}$ на многообразии M^{2n} определяется фундаментальная (или келерова [1]) форма:

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Почти эрмитова структура принадлежит классу $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ [1], если

$$\nabla_X (F)(Y, Z) + \nabla_{JX} (F)(JY, Z) =$$

$$= -\frac{1}{n-1}\{\langle X, Y \rangle \delta F(Z) - \langle X, Z \rangle \delta F(Y) - \langle X, JY \rangle \delta F(JZ)\}, X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Напомним [2], что почти контактной метрической структурой на многообразии N называется система $\{\Phi,\ \xi,\ \eta,\ g\}$, состоящая из четырех тензорных полей на этом многообразии, в том случае, когда для нее выполняются условия

$$\eta(\xi)=1;\ \Phi(\xi)=0;\ \eta\circ\Phi=0;\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$

$$\langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y),\ X,Y\in\aleph(N).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.

Самыми важными и известными примерами почти контактной метрической структуры являются косимплектическая и слабо косимплектическая структуры, структуры Кенмоцу и Сасаки, а также их многочисленные обобщения. В нашей заметке речь пойдет о квазисасакиевой структуре, которая определяется как почти контактная метрическая структура с замкнутой формой $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$ и дополнительным равенством

$$N_\Phi+\frac{1}{2}d\eta\otimes\xi=0,$$

где N_Φ — тензор Нейенхейса оператора Φ.

3. В 60-х годах прошлого века А. Грей приступил к исследованию почти эрмитовых структур, индуцированных так называемыми 3-векторными произведениями в алгебре Кэли на ее 6-мерных подмногообразиях (см., например, [3]). В 1980 году В. Ф. Кириченко опубликовал работу [4], где представлены структурные уравнения Картана произвольной почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав:

$$d\omega^a=\omega^a_b\wedge\omega^b+\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ah[b}D^{c]}_h\omega_b\wedge\omega_c+\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh}D_{hc}\omega^c\wedge\omega_b;$$

$$d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ah[b} D^h_{c]} \omega^b \wedge \omega_c + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b ;$$

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{h[k} D^g{}_{j]} + \sum_\varphi T^\varphi_{\hat{a}[k} T^\varphi_{j]b} \right) \omega^k \wedge \omega^j .$$

Здесь $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ — компоненты тензора Кронекера порядка три;

$$\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h ;$$

$$D_{cj} = \pm T_{cj}^8 + i T_{cj}^7 , \quad D_{\hat{c}j} = \pm T_{\hat{c}j}^8 - i T_{\hat{c}j}^7 ,$$

где $\{T_{ij}^\phi\}$ — компоненты конфигурационного тензора; $\varphi = 7, 8$; $a, b, c, d, h = 1, 2, 3$; $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $\hat{a} = a + 3$.

Используя условия принадлежности произвольной почти эрмитовой структуры классу $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ [5; 6], мы получаем такое

Предложение 1. *Почти эрмитова структура на 6-мерном подмногообразии алгебры Кэли принадлежит классу* $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ *тогда и только тогда, когда*

$$D_{ab} = D_{\hat{a}\hat{b}} = 0 . \qquad (1)$$

Условия (1) позволяют получить структурные уравнения почти эрмитовой структуры класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, индуцированной на 6-мерном подмногообразии алгебры Кэли.

Предложение 2. *Структурные уравнения Картана почти эрмитовой структуры, индуцированной на 6-мерном* $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$*-подмногообразии алгебры октав, имеют следующий вид:*

$$d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ah[b} D_h{}^{c]} \omega_b \wedge \omega_c ;$$

$$d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ah[b} D^h{}_{c]} \omega^b \wedge \omega^c ; \qquad (2)$$

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + i\,T^7_{b[d} D_{c]\hat{a}} \omega^c \wedge \omega^d +$$
$$+(-\frac{1}{2}\delta^{ah}_{bg} D_{h\hat{c}} D_{\hat{g}d} + T^8_{\hat{a}d} T^8_{\hat{c}b} + T^7_{\hat{a}d} T^7_{\hat{c}b} - 2\,T^7_{\hat{a}\hat{c}} T^7_{bd})\,\omega_c \wedge \omega^d - i\,T^7_{\hat{a}[\hat{d}} D_{\hat{c}]b}\, \omega_c \wedge \omega_d .$$

Обратим внимание на то, что уравнения (2) в точности соответствуют структурным уравнениям квазикелеровой структуры [7]. Отметим, что в работе [8] Л. В. Степановой представлено большое количество результатов о геометрии почти контактных метрических гиперповерхностей квазикелеровых многообразий. Эти результаты можно теперь применить и к 6-мерным АН-подмногообразиям класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ алгебры Кэли.

Предложение 3. *Всякое 6-мерное* $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$*-подмногообразие алгебры октав, через каждую точку которого проходит гиперповерхность с квазисасакиевой структурой, является почти келеровым многообразием (многообразием класса* W_2*).*

Предложение 4. *Всякое 6-мерное* $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$*-подмногообразие алгебры октав, через каждую точку которого проходит* η*-квазиомбилическая гиперповерхность с квазисасакиевой структурой, является келеровым многообразием.*

Список литературы

1. *Gray A., Hervella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. 1980. Vol. 123, №4. P. 35—58.

2. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

3. *Gray A.* Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tôhoku Math. J. 1969. Vol. 1. P. 614—620.

4. *Кириченко В. Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 1980. №8. С. 32—38.

5. *Банару М. Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1993.

6. *Banaru M. B., Banaru G. A.* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2014. №1 (74). P. 23—32.

7. *Banaru M.B.* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2015. Vol. 207, №3. P. 354—388.

8. *Степанова Л.В.* Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1995.

G. A. Banaru[1]

[1] *Smolensk State University*

4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia

mihail.banaru@yahoo.com

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-1

On six-dimensional AH-submanifolds of class $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ in Cayley algebra

Submitted on March 12, 2020

Six-dimensional submanifolds of Cayley algebra equipped with an almost Hermitian structure of class $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ defined by means of three-fold vector cross products are considered. As it is known, the class $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ contains all Kählerian, nearly Kählerian, almost Kählerian, locally conformal Kählerian, quasi-Kählerian and Vaisman — Gray manifolds. The Cartan structural equations of the $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$-structure on such six-dimensional submanifolds of the octave algebra are obtained. A criterion in terms of the configuration tensor for an arbitrary almost Hermitian structure on a six-dimensional submanifold of Cayley algebra to belong to the $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$-class is established.

It is proved that if a six-dimensional $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$-submanifold of Cayley algebra satisfies the quasi-Sasakian hypersurfaces axiom (i.e. a hypersurface with a quasi-Sasakian structure passes through every point of such submanifold), then it is an almost Kählerian manifold. It is also proved that a six-dimensional $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$-submanifold of Cayley algebra satisfies the eta-quasi-umbilical quasi-Sasakian hypersurfaces axiom, then it is a Kählerian manifold.

Keywords: almost Hermitian manifold, Gray — Hervella classes, almost contact metric structure, quasi-Sasakian structure, Cayley algebra.

References

1. *Gray, A., Hervella, L.M.:* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. Ann. Mat. Pura Appl., **123**:4, 35—58 (1980).

2. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

3. *Gray, A.:* Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products. Tôhoku Math. J., 21, 614—620 (1969).

4. *Kirichenko, V.F.:* Classification of Kählerian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Izvestia Vuzov. Math., 8, 32—38 (1980).

5. *Banaru, M.B.:* Hermitian geometry of 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. PhD thesis. Moscow (1993).

6. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Buletinul Academiei Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, 1 (74), 23—32 (2014).

7. *Banaru, M.B.:* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. J. Math. Sci. (New York), **207**:3, 354—388 (2015).

8. *Stepanova, L.V.:* Contact geometry of hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds. PhD thesis. Moscow (1995).