УДК 514.754

Л.Н. Р о м а к и н а

(*Саратовский государственный университет*)

ИЗОТРОПНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ БИАКСИАЛЬНО-ФЛАГОВОГО ПРОСТРАНСТВА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Изотропные прямые биаксиально-флагового пространства гиперболического типа ($\tilde{A}_3^2$) [1] пересекают особую прямую абсолюта P_1, т.е. образуют линейный специальный комплекс с осью P_1. Изучено его двухпараметрическое подмногообразие - конгруэнция изотропных образующих. Неизотропные элементы конгруэнции названы особыми и при изучении опущены.

При соответствующем задании элементов абсолюта канонический репер $R^*(A_i)$, i=1-4, пространства $\tilde{A}_3^2$ обладает инвариантными относительно группы движений этого пространства свойствами: 1) вершины A_1,A_2 гармонично сопряжены относительно абсолютных плоскостей P^1_2, P^2_2; 2) пара A_3,A_4 гармонически делит пару абсолютных точек $P^1_0, P^2_0 (P^1_0 P^2_0 = P_1)$; 3) прямая абсолютной линейной конгруэнции, проходящая через вершину $A_2(A_1)$ репера R^*, принадлежит плоскости $A_1A_2A_3(A_1A_2A_4)$; 4) точки $E_{12}=A_1+A_2$, $E'_{12}=A_1-A_2$ принадлежат абсолютным плоскостям P^1_2, P^2_2 соответственно.

Уравнения структуры [2, стр.405] пространства $\tilde{A}_3^2$ в этом случае имеют вид:

$$D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad i, j, k = 1-4, \tag{1}$$

где дифференциальные формы ω_i^j связаны условиями

$$\omega_3^1 = \omega_3^2 = \omega_4^1 = \omega_4^2 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_2^1 = \omega_1^2, \quad \omega_3^3 = \omega_4^4,$$

$$\omega_4^3 = \omega_3^4, \quad \omega_2^4 = 2\omega_3^3 + \omega_1^3, \quad \omega_2^3 = 2\omega_4^3 + 2\omega_1^2 + \omega_1^4$$

Теорема. *С каждым неособым лучом изотропной конгруэнции пространства $\tilde{A}_3^2$ можно связать единственный канонический репер первого порядка, в котором дифференциальное уравнение конгруэнции имеет вид:*

$$\omega_1^2 = \omega_1^4. \tag{2}$$

Доказательство. I. В каноническом репере R* прямая A_1A_3 является изотропной. Помещая вершины A_1, A_3 на текущий луч конгруэнции, выделим семейство реперов нулевого порядка. Линейные дифференциальные формы $\omega_1^2, \omega_1^4, \omega_4^3$ становятся главными, они зависят от двух первичных параметров. Если зависимость между этими формами принять в виде $\omega_1^4 = \lambda\omega_4^3$, то на одномерном подмногообразии $\omega_4^3=0$ будем иметь $\omega_1^4=0$. Тогда

$$dA_1 = \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3, \qquad dA_3 = \omega_3^3 A_3,$$
$$d(tA_1 + A_3) = dtA_1 + t\omega_1^2 A_2 + (t\omega_1^3 + \omega_3^3)A_3.$$

Следовательно, касательная плоскость $A_1A_3d(tA_1+A_3)$ вдоль образующей A_1A_3 к подмногообразию остается постоянной ($A_1A_2A_3$), т.е. подмногообразие $\omega_4^3=0$ является торсом. Конгруэнция расслаивается на однопараметрическое множество торсов. Исключим этот случай из рассмотрения и примем за базисные формы ω_1^4, ω_4^3.

Дифференциальное уравнение конгруэнции в репере нулевого порядка запишем в виде:

$$\omega_1^2 = a\omega_1^4 + b\omega_4^3. \tag{3}$$

Дифференцируя уравнение (3) внешним образом, получим

$$\omega_1^4 \wedge \Delta_1 + \omega_4^3 \wedge \Delta_2 = 0,$$

где

$$\Delta_1 = -da + \omega_3^3(a + 2a^2) + a^2\omega_1^3, \quad \Delta_2 = -db + 2ab\omega_3^3 + a(b-1)\omega_1^3.$$

Применение леммы Картана и закрепление главных параметров приводит к системе уравнений

$$\delta a = a(2a+1)\pi_3^3 + a^2\pi_1^3, \quad \delta b = 2ab\pi_3^3 + a(b-1)\pi_1^3. \tag{4}$$

При $a \neq 0$ в последнем уравнении зафиксируем b=0, $\pi_1^3=0$. Тогда простейшим решением первого уравнения системы (4) является a=1, $\pi_3^3=0$. Эта фиксация с учетом уравнений структуры (1) обращает все вторичные формы в нуль, т.е. завершает канонизацию репера, в котором дифференциальное уравнение конгруэнции имеет вид (2).

II. Для доказательства единственности построенного репера необходимо выяснить геометрический смысл канонизации.

Лемма. *Сопровождающий канонический репер изотропной конгруэнции построен таким образом, что его вершина A_1 является фокусом луча конгруэнции, а фокальная плоскость луча содержит точку $E_{24}=A_2+A_4$.*

Доказательство. Пусть изотропная конгруэнция задана уравнением (3), а точка $F=\lambda A_1 + \mu A_3$ описывает ее фокальную поверхность (предположим, что $\lambda \neq 0$, т.е. фокальная поверхность не вырождается в прямую P_1). Тогда смещение точки F по некоторому направлению d, касательному к фокальной поверхности, принадлежит прямой A_1A_3. Из равенства

$$dF = \lambda\omega_1^2 A_2 + (\lambda\omega_1^3 + \mu\omega_3^3)A_3 + (\lambda\omega_1^4 + \mu\omega_4^3)A_4,$$

учитывая (3), получим

$$a\omega_1^4 + b\omega_4^3 = 0, \quad \lambda\omega_1^4 + \mu\omega_4^3 = 0. \tag{5}$$

Чтобы система уравнений (5) определяла касательное направление на фокальной поверхности, ее ранг должен быть равен единице, поэтому

$$a\mu = b\lambda . \tag{6}$$

Если вершину A_1 поместить в фокус луча конгруэнции, т.е. принять $\mu=0$, то необходимо иметь $b=0$. После чего уравнение конгруэнции можем записать в виде:

$$\omega_1^2 = a\omega_1^4 . \tag{7}$$

Фокальная плоскость луча в точке A_1 определяется точками A_1, A_2, dA_1 и имеет уравнение: $x_2=ax_4$. Поместив на нее точку E_{24}, найдем $a=1$. Тогда уравнение конгруэнции принимает вид (2).

Обратно. Пусть конгруэнция задана уравнением (2), т.е. $a=1$, $b=0$, тогда, согласно (6), (7), A_1- фокус луча конгруэнции, а точка E_{24} лежит в фокальной плоскости A_1, A_3, dA_1. Что и требовалось доказать.

Отметим, что вторая фокальная поверхность, описываемая точкой A_3, вырождается в прямую P_1. Фокус A_3 назовем особым.

Сопровождающий репер изотропной конгруэнции будем строить следующим образом. Совместим вершину A_1 репера с неособым фокусом элемента. Вершина A_3 - пересечение луча конгруэнции с особой прямой абсолюта P_1, тогда A_4 определим однозначно, т.к.$(A_3A_4,\Pi_0^1\Pi_0^2)=-1$. Проведем через A_1 прямую абсолютной линейной конгруэнции (единственную), она пересечет плоскость $A_2A_3A_4$, гармонически сопряженную с плоскостью $A_1A_3A_4$, относительно абсолютных плоскостей, в точке $Q(0:1:0:-2)$. Точку пересечения фокальной плоскости A_1, A_3, dA_1 с прямой A_4Q примем за $E_{24}(0:1:0:1)$. Из условия $(A_4A_2,E_{24}Q)=-2$ следует однозначное построение вершины A_2. Тогда, согласно свойствам 1)-4), сопровождающий канонический репер определен однозначно.Теорема доказана.

Дифференцирование уравнения (2) внешним образом дает

$$\omega_1^4 \wedge (3\omega_3^3 + \omega_1^3) + \omega_1^3 \wedge \omega_4^3 = 0 . \tag{8}$$

Применив лемму Картана, получим

$$3\omega_3^3 + \omega_1^3 = k_1\omega_1^4 + k_2\omega_4^3 , \quad -\omega_1^3 = k_2\omega_1^4 + k_3\omega_4^3 . \tag{9}$$

Имеем $S_0=1$, $S_1=1$, $n=2$, $q=2$, $S_2=1$. Число Картана $Q=3=N$, следовательно, для замкнутой системы дифференциальных уравнений (2), (8) критерий Картана удовлетворен. Система - в инволюции с характером $S_2=1$. Таким образом, изотропная конгруэнция (2) существует с произволом в одну функцию двух аргументов.

Полная система дифференциальных инвариантов конгруэнции состоит из трех инвариантов второго порядка k_1, k_2, k_3, в чем можно убедиться, применяя к уравнениям (9) алгоритм Картана. Через коэффициенты k_1, k_2, k_3 выражается асимптотическая форма фокальной поверхности. Так как изотропная конгруэнция - подмногообразие линейного специального комплекса, то эллиптических изотропных конгруэнций не существует. Гиперболические конгруэнции мы рассмотрели. Из условия (6) следует, что конгруэнция (3) является параболической тогда и только тогда, когда a=0. Применяя алгоритм Картана к уравнению $\omega_1^2 = b\omega_4^3$, определяющему изотропную параболическую конгруэнцию, находим, что она существует с произволом в одну функцию одного аргумента.

Библиографический список

1. *Киотина Г.В., Чахтаури И.А.* Биаксиально-флаговое пространство гиперболического типа // Сообщения АН Груз. ССР. 1976.Т.83, № 2. С.305-308.

2. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 432 с.

3. *Фиников С.П.* Теория конгруэнций. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 450 с.

L.N. R o m a k i n a

ISOTROPIC CONGRUENCES IN THE BIAXIAL-FLAG SPACE OF THE HIPERBOLIC TYPE

Isotropic straight lines in the biaxial-flag space of the hyperbolic type intersect special straight line of absolut, i.e. they form linear special complex. Its two-parameter submanifold - congruence of isotropic ruling is studied.

УДК 514.75

О.С. Р у м я н ц е в а

(Калининградский государственный университет)

ОСНАЩЕНИЕ ПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В проективном пространстве P_n рассмотрено полосное распределение S, т.е. n-мерное многообразие троек (X, L_r, L_m), где X - точка, L_r, L_m - плоскости, причем $X \in L_r \subset L_m$. Над распределением S возникает главное расслоение, типовым слоем которого является подгруппа стационарности тройки (X, L_r, L_m). Композиционное оснащение распределения S состоит из полей трех плоскостей : $P_{r-1}(X \notin P_{r-1} \subset L_r), P_{m-r-1} \subset L_m, P_{m-r-1} \cap L_r = \varnothing), P_{n-m-1}(P_{n-m-1} \cap L_m = \varnothing)$.

Доказано, что композиционное оснащение полосного распределения S индуцирует групповую связность в ассоциированном расслоении. Аффинная версия работы доложена на конференции [1].