Ju. Shevchenko

Quotient manifolds generated by holonomic distributions on smooth manifolds

On a smooth manifold holonomic distribution which generates the quotient manifold is considered. Using structure Laptev equations and Akivis derivation formulae holonomic, semi-holonomic, internally and externally non-holonomic smooth manifolds are defined. It is proved that the quotient manifold of semi-holonomic manifold is internally and externally non-holonomic, and quotient manifold of holonomic manifold is holonomic.

Key words: structure equations of Laptev, derivational formulae of Akivis, holonomic distribution, quotient manifold, non-holonomic smooth manifold.

УДК 514

А. М. Шелехов
Московский педагогический государственный университет
amshelekhov@rambler.ru

Об «окошках» в параллелограмме

Задав два параметра, можно построить новый параллелограмм внутри заданного. Бесконечное повторение этой процедуры (с разными, вообще говоря, параметрами) приводит к некоторому предельному положению — «окошку». Положение последнего и его размеры определяются последовательностью параметров. Рассмотрены примеры, приведены числовые оценки.

Ключевые слова: параллелограмм, бесконечное произведение, формула Валлиса, симметрические многочлены.

---

1. Известна следующая задача [1, с. 39]: если соединить вершины параллелограмма с серединами противоположных сторон, то получится новый параллелограмм, площадь которого в пять раз меньше площади исходного. Рассмотрим более общую ситуацию. На сторонах параллелограмма $ABCD$ отложим отрезки

$$AP=\frac{1}{m_1}AB,\ \ BQ=\frac{1}{k_1}BC,\ CR=\frac{1}{m_1}CD,\ DS=\frac{1}{k_1}AD,$$

где $m_1>1$ и $k_1>1$, и проведем отрезки AQ, BR, CS, DP. Они образуют параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$. Будем считать для простоты записи, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна единице, а площадь параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ обозначим S_1.

Теорема 1.

$$S_1=1-\frac{m_1+k_1}{m_1k_1+1}=\frac{(m_1-1)(k_1-1)}{m_1k_1+1}. \qquad (1)$$

Доказательство. Обозначим площади треугольников AA_1P и CC_1R через x, треугольников BB_1Q и DD_1S — через y; площади четырехугольников A_1B_1BP и C_1D_1DR — через v, четырехугольников B_1C_1CQ и AA_1D_1S — через u. Тогда очевидны следующие равенства:

$$2x+2u+2y=\frac{1}{m_1},\ 2x+2v+2y=\frac{1}{k_1},$$

$$S_1+2u=\frac{k_1-1}{k_1},\ S_1+2v=\frac{m_1-1}{m_1}.$$

Кроме того, из подобия треугольников AA_1P и A_1B_1B, BB_1Q и BC_1C выводим равенства $v+x=xm_1^2,\ u+y=y_1^2$. Из полученных уравнений после несложных вычислений выводим формулу (1). В частности, при $k_1=m_1=2$ получаем известный результат — 0,2.

2. Что будет, если этот процесс сделать бесконечным? Если, исходя из параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, аналогичным образом построить параллелограмм $A_2B_2C_2D_2$ при других, вообще говоря, параметрах, k_2 и m_2, то его площадь S_2 будет равна

$$S_2 = \left(1 - \frac{m_1 + k_1}{m_1 k_1 + 1}\right)\left(1 - \frac{m_2 + k_2}{m_2 k_2 + 1}\right).$$

Продолжая процесс, мы получим бесконечную, вообще говоря, последовательность параллелограммов.

Так как площади параллелограммов уменьшаются, то при некоторых естественных условиях на параметры может существовать предельный параллелограмм π и предельная площадь S_0.

Если, например, во время процесса параметры m и k не меняются, то есть $k_n = k$, $m_n = m$ при любом n, то

$$S_0 = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{m+k}{mk+1}\right)^n .$$

Покажем, что в этом случае $S_0 = 0$. Действительно, так $m > 1$ и $k > 1$, то $1 - \dfrac{m+k}{mk+1} < 1$, то есть $1 - \dfrac{m+k}{mk+1} = \dfrac{1}{a}$, где $a > 1$. Но тогда $a = 1 + \varepsilon,\ \varepsilon > 0,\ a^n = 1 + n\varepsilon + \ldots$ и $S_0 = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + n\varepsilon + \ldots)^{-1} = 0$.

3. Пусть теперь $k_n = m_n = 2^n$, тогда

$$S_0 = \mathop{\Pi}_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2^{n+1}}{2^{2n}+1}\right) = \frac{1}{5}\frac{9}{17}\frac{49}{63}\ldots . \tag{2}$$

Оценим число S_0 снизу. Из формулы (2) имеем:

$$\begin{aligned} 5S_0 &= \mathop{\Pi}_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{2^{n+1}}{2^{2n}+1}\right) > \mathop{\Pi}_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{2^{n+1}}{2^{2n}}\right) = \\ &= \mathop{\Pi}_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \mathop{\Pi}_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n}}\right) \equiv \Pi_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Начиная с $n=9$ $\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{1}{4n^2}$, откуда $1-\dfrac{1}{2^n}>1-\dfrac{1}{4n^2}$. Поэтому из (3) получаем

$$\begin{aligned}5S_0 > \varPi_1 &= \prod_{n=1}^{8}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\prod_{n=9}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) > \\ &> \prod_{n=1}^{8}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\prod_{n=9}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right).\end{aligned} \tag{4}$$

С другой стороны, согласно формуле Валлиса

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-(4n^2)^{-1}}=\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-(4n^2)^{-1})}.$$

Отсюда

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\prod_{n=1}^{8}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)\prod_{n=9}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right).$$

С учетом этого равенства, неравенство (4) примет вид

$$S_0 > \frac{2}{5\pi}\frac{\prod\limits_{n=1}^{8}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)}{\prod\limits_{n=1}^{8}\left(1-\dfrac{1}{4n^2}\right)}. \tag{5}$$

После вычислений окончательно получим:

$$S_0 > \frac{1}{\pi}\frac{3\cdot 7^2\cdot 31\cdot 127}{2^5\cdot 5\cdot 11^2\cdot 13^2}\approx 0{,}056304. \tag{6}$$

Теорема 2. *В случае* $k_n=m_n=2^n$ *площадь предельного «окошка» не менее*

$$\delta=\frac{1}{\pi}\frac{3\cdot 7^2\cdot 31\cdot 127}{2^5\cdot 5\cdot 11^2\cdot 13^2}\approx 0{,}056304$$

от площади исходного параллелограмма.

4. Рассмотрим предыдущие результаты более детально в случае, если исходный параллелограмм является квадратом. Тогда предельное «окошко» также будет квадратом со стороной $a=\sqrt{S_0}>\sqrt{\delta}\approx 0{,}2373$. Его центр симметрии совпадает с центром исходного квадрата, поэтому положение «окошка» вполне определяется углом α между его сторонами и сторонами исходного квадрата.

Обозначим углы между стороной n-того квадрата последовательности и стороной предыдущего через α_n. Тогда

$$\tan\alpha_1=\frac{1}{2},\ \tan\alpha_2=\frac{1}{2^2},\ldots,\ \tan\alpha_n=\frac{1}{2^n},\ldots .$$

Нам надо оценить $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\ldots$.

Обозначим $p_n=2^{-n}$, через σ_k — основной симметрический многочлен *k*-той степени от элементов p_n, $n=1,2,\ldots$. Непосредственный подсчет дает $\sigma_1=1$. Используя известные формулы для основных симметрических многочленов, находим:

$$\sigma_2=\frac{1}{2}((\sigma_1)^2-\Sigma(p_n)^2)=\frac{1}{3};$$

$$\sigma_3=\frac{1}{3}(\Sigma(p_n)^3-(\sigma_1)^3+3\sigma_1\sigma_2)=\frac{1}{21};$$

$$\sigma_4=\frac{1}{4}(-\Sigma(p_n)^4+(\sigma_1)^4-4(\sigma_1)^2\sigma_2+2(\sigma_2)^2+4\sigma_1\sigma_3)=\frac{1}{315};$$

$$\sigma_5=\frac{1}{5}(\Sigma(p_n)^5-(\sigma_1)^5+5(\sigma_1)^3\sigma_2-5\sigma_1(\sigma_2)^2-5(\sigma_1)^2\sigma_3+$$
$$+5\sigma_2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_4)=\frac{1}{31\cdot 315}.$$

Индукцией доказываются следующие утверждения.

Лемма 1.

$$\tan\alpha=\frac{1-\sigma_3-\sigma_5-\sigma_7-\ldots}{1-\sigma_2-\sigma_4-\sigma_6-\ldots}. \tag{7}$$

Лемма 2.

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n) = 1-\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3+\sigma_4-\dots;\\
\Pi_2 &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+p_n) = 1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4+\dots.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Из формул (7) и (8) с учетом $\sigma_1 = 1$ находим:

$$
\tan\alpha = \frac{4+\Pi_1-\Pi_2}{4-\Pi_1-\Pi_2},\ \tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\Pi_1}{4-\Pi_2}. \tag{9}
$$

Оценим результат сверху. Для этого возьмем в произведениях Π_1 и Π_2 по 5 сомножителей, тогда

$$
\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\Pi_1}{4-\Pi_2} < \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{7}{8}\frac{15}{16}\frac{31}{32}}{4-\frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{9}{8}\frac{17}{16}\frac{33}{32}} \approx 0{,}1765,
$$

что дает с точностью до 1 минуты $\alpha < 55^\circ 1'$.

Для оценки угла α снизу укажем сначала оценки снизу для произведений Π_1 и Π_2. Из формулы (4) получаем

$$
\Pi_1 > \frac{2}{\pi}\frac{\prod_{n=1}^{8}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\prod_{n=1}^{8}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)} \approx 0{,}2815.
$$

Для Π_2 согласно формуле (8) имеем

$$
\Pi_2 > 1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4+\dots+\sigma_n.
$$

При $n = 5$ с учетом полученных ранее значений σ_i имеем:

$$
\Pi_2 > 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{21}+\frac{1}{315}+\frac{1}{31\cdot 315} \approx 2{,}3842.
$$

Поэтому

$$\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\Pi_1}{4 - \Pi_2} > \frac{0,2815}{4 - 2,3842} \approx 0,1742 .$$

Отсюда $\alpha - \dfrac{\pi}{4} > 9°53'$, то есть $54°53' < \alpha < 55°1'$.

Замечание. Оценки произведения Π_1 можно делать: 1) исходя из определения этого произведения; 2) с помощью симметрических многочленов σ_i (см. леммы); 3) также с помощью пентагональной теоремы Гаусса:

$$\Pi_1 = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}} .$$

Но можно проверить, что с помощью формулы Валлиса, которую мы использовали, результат достигается быстрее.

5. Предельный угол α, разумеется, зависит от выбора последовательности параметров и не всегда существует. Например, в первом случае, рассмотренном в п. 2 (параметры не меняются), для каждого из параметров будет своя последовательность углов, причем все члены каждой из этих последовательностей одинаковы. Следовательно, соответствующие ряды расходятся, и поэтому вращение параллелограмма будет бесконечным. Назовем такую ситуацию «вечным движением» (*semper in motu*).

Пусть, как и выше, $\alpha_1, \alpha_2, ...$ — соответствующие параметру m углы между стороной *n*-го параллелограмма последовательности и стороной предыдущего, $\beta_1, \beta_2, ...$ — аналогичные углы для параметра *k*. Простым вычислением показываем, что верна

Лемма 3. *Угол* A_n *n-го параллелограмма связан с углом предыдущего следующим образом:*

$$A_n = A_{n-1} + \beta_n - \alpha_n .$$

Отсюда выводим, что

$$A_n = A + \sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i)\ (\operatorname{mod}\pi).$$

Следствие: условие $\beta_i = \alpha_i$ необходимо и достаточно для того, чтобы параллелограмм сохранял форму.

В частности, в первом случае (параметры не меняются), получаем $A_n = A + n(\beta - \alpha)\ (\operatorname{mod}\pi)$. Заметим, что при некоторых значениях параметров угол A_n может оказаться равен нулю, то есть параллелограмм выродится в отрезок и процесс остановится.

6. Рассмотрим еще один пример: $k_n = an,\ m_n = bn$, где a и b — постоянные. В этом случае

$$S_0 = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{(a+b)n}{abn^2+1}\right) < \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{(a+b)n}{abn^2}\right) =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{(a+b)}{abn}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right),$$

где $\lambda > 0$. Поскольку ряд $\Sigma\frac{\lambda}{n}$ расходится, то последнее произведение равно нулю [2, с. 358] и $S_0 = 0$.

Предположим далее, для простоты, что параллелограмм является квадратом, и $a = b$. Тогда для последовательности углов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ имеем $\tan\alpha_n = \frac{1}{an}$. Из геометрических соображений следует $\arctan\alpha > \sqrt{\tan\alpha}$, поэтому $\alpha_n = \arctan\frac{1}{an} > \sqrt{\frac{1}{an}}$. Ряд справа расходится,следовательно, ряд α_n также расходится. В итоге получили «вечное движение».

7. Пусть исходный параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником, а линии AP, BQ, CR и DS образуют угол α

со сторонами AB, BC, CD и DA соответственно. При этом будем считать, что угол α не больше половины наименьшего из двух углов, которые диагональ прямоугольника образует с его сторонами. В рассматриваемом случае параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ также будет прямоугольником. Обозначим $|AB| = a,\ |BC| = b$, тогда

$$k_1 = \frac{b}{a\tan\alpha},\ m_1 = \frac{a}{b\tan\alpha},$$

и, согласно формуле (1), после преобразований получим

$$S_1 = 1 - \frac{m_1 + k_1}{m_1 k_1 + 1} = 1 - \lambda \sin 2\alpha,\ \lambda = \frac{a^2 + b^2}{2ab} \geq 1. \qquad (10)$$

Рассмотрим бесконечную последовательность прямоугольников с параметрами $\alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{4}, \dots, \frac{\alpha}{2^{n-1}}, \dots$ В этом случае для площади предельного прямоугольника получим

$$S_0 = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \lambda \sin\frac{\alpha}{2^{n-2}}\right). \qquad (11)$$

Так как ряд $\Sigma \sin\frac{\alpha}{2^{n-2}}$ мажорируется сверху сходящимся рядом $\Sigma \frac{\alpha}{2^{n-2}}$, то он также сходится. Поэтому [2, с. 358] правая часть (11) также сходится.

Прежде чем оценить величину S_0 снизу, заметим, что стороны предельного прямоугольника образуют со сторонами исходного прямоугольника угол

$$\alpha_0 = \alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} + \dots + \frac{\alpha}{2^n} + \dots = 2\alpha.$$

Рассмотрим прямоугольник P', который строится так же, как прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$, но с углом 2α. Из формулы (10) получаем, что площадь S' прямоугольника P' равна $S' = 1 - \lambda \sin 4\alpha$.

Из способа построения прямоугольников последовательности следует, что их стороны и вершины всегда располагаются вне P'. Таким образом, $S_0 > S'$, и мы получили оценку для S_0 снизу.

Заметим, что подобным образом можно было бы получить оценку в примере, рассмотренном в пп. 3, 4, но она (оценка) оказалась бы существенно хуже, чем с помощью формулы Валлиса.

8. Нам представляется интересным решить следующие задачи.

1. Привести пример последовательности параллелограммов с «вечным движением», для которой $S_0 \neq 0$.

2. Для бесконечной последовательности $p_n = \dfrac{1}{2^n}$ вычислить значениясимметрических многочленов σ_i. Гипотеза:

$$\sigma_k = \sigma_{k-1}\Sigma_k = \Sigma_k \Sigma_{k-1} \Sigma_{k-2} \cdot \ldots \cdot \Sigma_1,$$

где через Σ_k обозначена сумма k-х степеней последовательности p_n. Для малых k формула выполняется (см. п. 4).

3. Построить аналогичным способом «окошко» для $2n$-угольника с параллельными противоположными сторонами.

Список литературы

1. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. М., 1974.

2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1959. Т. 2.

A. Shelekhov

About "windows" of parallelogram

Setting 2 parameters, it is possible to construct a new parallelogram inside the given one. Infinite repetition of this procedure (with others, generally speaking, parameters) lead us to a certain limit parallelogram, we call it "the window". The location of the latter and its dimensions are determined by the sequence of parameters. Some examples are considered, and the numerical bounds are given.

Key words: parallelogram, infinite product, Vallis formula, symmetric polynomials.