УДК 514.76

Г. А. Банару
Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-2

О постоянстве типа некоторых 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли

Рассматривается введенное Альфредом Греем понятие постоянства типа применительно к некоторым 6-мерным уплощающимся подмногообразиям алгебры Кэли. Доказано, что 6-мерные локально симметрические типа Риччи подмногообразия алгебры Кэли являются почти эрмитовыми многообразиями нулевого постоянного типа.

Ключевые слова*:* почти эрмитова структура, постоянство типа, 6-мерное уплощающееся подмногообразие алгебры Кэли, подмногообразие типа Риччи

1. Понятие постоянства типа — одно из самых важных понятий эрмитовой геометрии. Его ввел в рассмотрение для приближенно келеровых многообразий известный американский геометр А. Грей [1]. Позже понятие постоянства типа различными способами было обобщено для некоторых других классов почти эрмитовых многообразий [2; 3], а в 2000 году в работе В. Ф. Кириченко и И. В. Третьяковой [4] это понятие было обобщено уже для произвольного почти эрмитова многообразия.

Напомним, что почти эрмитовой структурой на многообразии M^{2n} четной размерности называется пара $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$,

Поступила в редакцию 02.05.2023 г.

где J — почти комплексная структура, а $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика. При этом J и $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы таким условием:

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n}. Многообразие с заданной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым многообразием. С каждой почти эрмитовой структурой $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связана так называемая фундаментальная форма, определяемая равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Почти эрмитова структура называется эрмитовой, если ее тензор Нейенхейса

$$N(X, Y) = \frac{1}{4}(J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY])$$

обращается в нуль, и келеровой, если $\nabla F = 0$.

Также напомним, что первая группа структурных уравнений римановой связности на пространстве присоединенной G-структуры, или, как обычно говорят, первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры, имеет следующий вид:

$$d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c;$$

$$d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c, \qquad (1)$$

где

$$B^{ab}{}_c = -\frac{i}{2} J^a_{\hat{b},c} \;; B_{ab}{}^c = \frac{i}{2} J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}} \;;$$

$$B^{abc} = \frac{i}{2} J^a_{[\hat{b},\hat{c}]} \;; B_{abc} = -\frac{i}{2} J^{\hat{a}}_{[b,c]} \;.$$

Системы функций $\{B^{ab}{}_{c}\}$, $\{B_{ab}{}^{c}\}$, $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$ являются компонентами комплексных тензоров на многообразии M^{2n}, за которыми закрепилось название тензоров Кириченко.

Наконец, напомним [4], что почти эрмитово многообразие называется многообразием постоянного типа c, если

$$\|N(X,Y)\| = c\|X\|^2\|Y\|^2.$$

2. В данной заметке мы рассматриваем понятие постоянства типа применительно к некоторым 6-мерным уплощающимся подмногообразиям алгебры Кэли, изучению которых посвящено более 10 работ автора этой заметки (см., например, [5—9]). Отметим, что понятие уплощающегося подмногообразия алгебры Кэли ввели в рассмотрение В. Ф. Кириченко и М. Б. Банару [10]. Оказалось, что к числу уплощающихся относятся, например, все 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав. При этом нужно отметить, что известны примеры 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли с почти эрмитовой структурой, отличной от келеровой [5; 6; 10]. Такие примеры содержатся и среди 6-мерных локально симметрических типа Риччи подмногообразий алгебры Кэли [5; 11; 12]. По нашему мнению, статья В. Ф. Кириченко [11] — самая интересная и значительная работа о таких подмногообразиях алгебры октав, в которой они и были введены в рассмотрение. Довольно сложное их определение мы приведем, используя упомянутые выше статьи [5; 11]. Пусть $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ — 6-мерное подмногообразие алгебры октав. Напомним, что точка $p \in M^6$ называется специальной, если

$$T_p(M^6) \subset L(e_0)^{\perp},$$

где $L(e_0)^{\perp}$ — ортогональное дополнение единицы алгебры октав. В противном случае точка p называется простой. Ясно, что совокупность всех простых точек M^6 представляет собой открытое подмногообразие $M_0^6 \subset M^6$, на котором канонически индуцируется распределение Z, порожденное ортогональными проекциями вектора e_0 на касательное пространство $T_p(M^6)$, $p \in M_0^6$. Такое распределение Z, а также одномерное пространство $Z_p \in T_p(M^6)$, $p \in M_0^6$, называют исключительными [11].

Определение [5; 11]. Подмногообразие $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ называется *подмногообразием типа Риччи*, если кривизна Риччи в каждой точке $p \in M_0^6$ в направлении исключительного пространства Z_p принимает минимальное значение.

В [11] получена полная классификация локально-симметрических типа Риччи подмногообразий $M^6 \subset \boldsymbol{O}$. Доказано, что локально-симметрическое типа Риччи подмногообразие $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ локально голоморфно изометрично либо C^3, либо произведению келеровых многообразий C^2 и CH^1, скрученному (warped) вдоль CH^1. Здесь через CH^1 обозначено комплексное гиперболическое пространство, а через C^2 и C^3 — двумерное и трехмерное комплексные евклидовы пространства соответственно.

Давно известны структурные уравнения почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав [7; 8; 11]:

$$d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ah[b} D_h{}^{c]} \omega_b \wedge \omega_c;$$

$$d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b + \qquad (2)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ah[b} D^h{}_{c]}\, \omega^b \wedge \omega^c;$$

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{h[k} D^g{}_{j]} + \sum_\varphi T_{\hat{a}[k}^\varphi T_{j]b}^\varphi \right) \omega^k \wedge \omega^j,$$

где через $\{\omega^k\}$ обозначены компоненты форм смещения, через $\{\omega_j^k\}$ — компоненты форм римановой связности.

Здесь и далее

$$\varphi = 7,8;\ \ a,b,c,d,g,h = 1,2,3;$$
$$\hat{a} = a + 3;\ \ k,j = 1,2,3,4,5,6.$$

Как и в [5—7], $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ — компоненты тензора Кронекера порядка три; $\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h$ — кронекеровская дельта второго порядка;

$$D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}, \qquad D_h{}^c = D_{h\hat{c}},\ \ D^h{}_c = D_{\hat{h}c};$$
$$D_{cj} = \mp T_{cj}^8 + iT_{cj}^7,\ \ D_{\hat{c}j} = \mp T_{\hat{c}j}^8 - iT_{\hat{c}j}^7,$$

где $\left\{T_{kj}^{\varphi}\right\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения подмногообразия $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ [5].

В [11] было доказано, что матрица (D_{ab}) при особом выборе репера для локально-симметрического типа Риччи подмногообразия $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем для случая скрученного произведения C^2 и CH^1 выполняется условие $D_{11} \neq 0$.

Учитывая вид матрицы D_{ab}, мы можем переписать первую группу уравнений (1) так:

$$\begin{gathered} d\omega^1 = \omega_1^1 \wedge \omega^1; \\ d\omega_1 = -\omega_1^1 \wedge \omega_1; \\ d\omega^{\alpha} = \omega_{\beta}^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{1\alpha\beta} D_{11} \omega^1 \wedge \omega_{\beta}; \\ d\omega_{\alpha} = -\omega_{\alpha}^{\beta} \wedge \omega_{\beta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{1\alpha\beta} D^{11} \omega_1 \wedge \omega^{\beta}. \end{gathered} \tag{3}$$

Теперь воспользуемся критерием постоянства типа в терминах тензоров Кириченко для произвольного почти эрмитова многообразия:

$$B^{hcd}B_{hab} = c\delta_{ab}^{cd}.$$

Принимая во внимание структурные уравнения (1) и (3), мы приходим к выводу, что локально-симметрическое типа Риччи подмногообразие $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ относится к многообразиям нулевого постоянного типа.

Теорема. *6-мерные локально симметрические типа Риччи подмногообразия алгебры Кэли являются почти эрмитовыми многообразиями нулевого постоянного типа.*

Отметим, что 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав (как и любые другие келеровы многообразия) являются почти эрмитовыми многообразиями нулевого постоянного типа [4]. Из доказанной нами теоремы вытекает, что 6-мерные локально симметрические типа Риччи подмногообразия алгебры Кэли обладают свойством, присущим келеровым подмногообразиям $M^6 \subset \boldsymbol{O}$. Результаты такого плана — совпадение или сходство каких-либо свойств 6-мерных уплощающихся и 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав — были получены и в других работах: [5—12]. При этом, как мы уже отмечали выше, существует немало примеров отличных от келеровых 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли.

Список литературы

1. *Gray A.* Nearly Kähler manifolds // J. Diff. Geom. 1970. Vol. 4. P. 283—309.

2. *Кириченко В.Ф.* K-пространства постоянного типа // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, №2. С. 282—289.

3. *Vanheche L., Bouten F.* Constant type for almost Hermitian manifolds // Bull. Math. Soc. Sci. Math. Répub. Soc. Roum., Nouv. Sér. 1976—1977. Vol. 20. P. 415—422.

4. *Кириченко В.Ф., Третьякова И.В.* О постоянстве типа почти эрмитовых многообразий // Математические заметки. 2000. Т. 68, №5. С. 668—676.

5. *Banaru M.B., Banaru G.A.* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2014. №1 (74). P. 23—32.

6. *Banaru M.B., Banaru G.A.* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian // SUT Journal of Mathematics. 2015. Vol. 51, №1. P. 1—9.

7. *Банару М.Б. Банару Г.А.* Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2017. Вып. 48. С. 21—25.

8. *Банару М.Б., Банару Г.А.* Об устойчивости эрмитовых структур на 6-мерных уплощающихся подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2021. Вып. 52. С. 23—29.

9. *Банару Г.А.* О квазисасакиевой структуре на вполне омбилической гиперповерхности 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры Кэли // ДГМФ. 2022. Вып. 53. С. 17—22.

10. *Банару М.Б., Кириченко В.Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Успехи математических наук. 1994. №1. С. 205—206.

11. *Кириченко В.Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестник Московского университета. Сер. Математика. Механика. 1994. №3. С. 6—13.

12. *Банару М.Б.* О локально симметрических 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2016. Вып. 47. С. 11—17.

Для цитирования: *Банару Г.А.* О постоянстве типа некоторых 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 14—22. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-2.

MSC 2010: 53B35, 53B50

G. A. Banaru
Smolensk State University
4, Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-2

On the type constancy of some six-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra

Submitted on May 02, 2023

The notion of type constancy was introduced by Alfred Gray for nearly Kählerian manifolds and later generalized by Vadim F. Kirichenko and Irina V. Tret'yakova for all Gray — Hervella classes of almost Hermitian manifolds. In the present note, we consider the notion of type constancy for some six-dimensional almost Hermitian planar submanifolds of Cayley algebra. The almost Hermitian structure on such six-dimensional submanifolds is induced by means of so-called Brown — Gray three-fold vector cross products in Cayley algebra. We select the case when six-dimensional submanifolds of Cayley algebra are locally symmetric.

It is proved that six-dimensional locally symmetric submanifolds of Ricci type of Cayley algebra are almost Hermitian manifolds of zero constant type. This result means that six-dimensional locally symmetric submanifolds of Ricci type of Cayley algebra possess a property of six-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra. However, there exist non-Kählerian six-dimensional locally symmetric submanifolds of Ricci type in Cayley algebra.

Keywords: almost Hermitian structure, type constancy, six-dimensional Hermitian planar submanifold of Cayley algebra, submanifold of Ricci type

References

1. *Gray, A.:* Nearly Kähler manifolds. J. Diff. Geom., 4, 283—309 (1970).

2. *Kirichenko, V.F.:* K-spaces of constant type. Siberian Math. J., **17**:2, 220—225 (1976).

3. *Vanheche, L., Bouten, F.:* Constant type for almost Hermitian manifolds. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Répub. Soc. Roum., Nouv. Sér., 20, 415—422 (1976—1977).

4. *Kirichenko, V. F., Tret'yakova, I. V.:* On the constant type of almost Hermitian manifolds. Math. Notes, **68**:5, 569—575 (2000).

5. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.:* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, **1**:74, 23—32 (2014).

6. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.:* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian. SUT J. Math., **51**:1, 1—9 (2015).

7. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.:* On planar 6-dimensional Hermitian submanifolds Cayley algebra. DGMF, 48, 21—25 (2017).

8. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.:* On stability of Hermitian structures on 6-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 52, 23—29 (2021).

9. *Banaru, G. A.:* On quasi-Sasakian structure on a totally umbilical hypersurface of a six-dimensional Hermitian planar submanifold of Cayley algebra. DGMF, 53, 17—22 (2022).

10. *Banaru, M. B., Kirichenko, V. F.:* The Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Russian Mathematical Surveys, **49**:1, 223—225 (1994).

11. *Kirichenko, V. F.:* Hermitian geometry of six-dimensional symmetric submanifolds of Cayley algebra. Mosc. Univ. Math. Bull., **49**:3, 4—9 (1994).

12. *Banaru, M. B.:* On locally symmetric 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 47, 11—17 (2016).

For citation: Banaru, G. A. On the type constancy of some six-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 54 (1), 14—22 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-2.