5. *Чешкова М.А.* Дважды каналовые гиперповерхности в евклидовом пространстве E^n // Мат. сб. 2000. Т. 191. №6. С. 155 – 160.

M. Cheshkova

ABOUT A TUBULAR HYPERSURFACE
IN A EUCLIDEAN SPACE E^n

The canal hypersurface M in a Euclidean space E^n – the envelope of one-parameter families of hypersphericals is considered. If the hypersphericals have constant radius, then the hypersurface M refers to tubular.

УДК 514.75

Ю.И. Шевченко
(Калининградский государственный университет)

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ СЕМЕЙСТВА ПЛОСКОСТЕЙ, ПОРОЖДЕННАЯ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

В многомерном проективном пространстве рассмотрено произвольное семейство плоскостей любых размерностей. С этим семейством ассоциированны расслоение Ю.Г. Лумисте и расслоение проективных реперов, в которых заданы соответственно геометрическая и проективная связности. Доказано, что проективная связность порождает геометрическую связность.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A,A_I\}$, деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA=\theta A+\omega^I A_I,\ dA_I=\theta A_I+\omega_I^J A_J+\omega_I A\ (I,J,K=\overline{1,n}), \qquad (1)$$

где θ – некоторая форма Пфаффа, а структурные формы ω^I, ω_J^I, ω_I проективной группы $GP(n)$, действующей в пространстве P_n, удовлетворяют уравнениям Картана (см., напр., [1]):

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \qquad D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$
$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I. \tag{2}$$

В пространстве P_n рассмотрим m-плоскость L_m ($0<m<n$). Произведем разбиение значений индексов

$$I=(a,\alpha):\ a,b,c=\overline{1,m};\ \alpha,\beta=\overline{m+1,n}.$$

Поместим вершины A, A_a на плоскость L_m. Формулы (1) дают

$$dA=\theta A+\omega^a A_a+\omega^\alpha A_\alpha,\ dA_a=\theta A_a+\omega_a^b A_b+\omega_a^\alpha A_\alpha+\omega_a A. \tag{3}$$

Откуда следуют уравнения стационарности плоскости L_m

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_a^\alpha = 0. \tag{4}$$

Формы ω^α, ω_a^α называются первичными.

Любую точку $B\in L_m$ можно представить в виде: $B=A+x^a A_a$. Дифференцируя это равенство с помощью формул (3), найдем

$$dB = (\theta + x^a\omega_a)B + \Omega^a A_a + (\omega^\alpha + x^a\omega_a^\alpha)A_\alpha,$$
$$\Omega^a = dx^a + x^b\omega_b^a - x^a x^b\omega_b + \omega^a. \tag{5}$$

Учитывая систему (4), получим уравнения стационарности точки B в плоскости L_m: $\Omega^a = 0$. Эти дифференциальные уравнения связывают координаты x^a фиксированной точки B. Мы не будем фиксировать точку B в плоскости L_m, поэтому координаты x^a, входящие в обозначение (5), произвольны.

Пусть плоскость L_m описывает семейство B_r размерности r, которая меньше числа первичных форм $\omega^\alpha, \omega_a^\alpha$, т.е. $r<(m+1)(n-m)$. Уравнения семейства B_r в параметрической форме имеют вид:

$$\omega^\alpha = \Lambda^\alpha_i \theta^i, \quad \omega^\alpha_a = \Lambda^\alpha_{ai}\theta^i \quad (i, j = \overline{n+1, n+r}), \tag{6}$$

где θ^i – структурные формы r-мерного гладкого многообразия V_r (пространства параметров), удовлетворяющие уравнениям Лаптева

$$D\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j. \tag{7}$$

Структурные уравнения (2, 7) позволяют продолжить уравнения (6)

$$\Delta\Lambda^\alpha_i - \Lambda^\alpha_{ai}\omega^a \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \theta^i), \;\; \Delta\Lambda^\alpha_{ai} - \Lambda^\alpha_i \omega_a \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \theta^i),$$

где дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda^\alpha_{ai} = d\Lambda^\alpha_{ai} + \Lambda^\beta_{ai}\omega^\alpha_\beta - \Lambda^\alpha_{bi}\omega^b_a - \Lambda^\alpha_{aj}\theta^j_i.$$

Совокупность функций $\Lambda = \{\Lambda^\alpha_i, \Lambda^\alpha_{ai}\}$ назовем параметрическим фундаментальным объектом 1-го порядка семейства B_r относительно прямого произведения $G \times GL(r)$ подгруппы стационарности $G \subset GP(n)$ плоскости L_m и линейной группы $GL(r)$ со структурными формами $\overline{\theta}^i_j = \theta^i_j|_{\theta^i=0}$, действующей в r-мерном касательном пространстве к многообразию V_r в точке, фиксируемой вполне интегрируемой системой $\theta^i = 0$.

Найдем внешние дифференциалы форм Ω^a

$$D\Omega^a = \Omega^b \wedge \Omega^a_b + \theta^i \wedge \Omega^a_i; \tag{8}$$

$$\Omega^a_b = \omega^a_b - x^a\omega_b - \delta^a_b x^c \omega_c, \;\; \Omega^a_i = (\Lambda^\alpha_i + \Lambda^\alpha_{bi}x^b)(\omega^a_\alpha - x^a\omega_\alpha). \tag{9}$$

Над пространством параметров V_r (над семейством B_r) возникает расслоение $L_m(V_r)$ со структурными уравнениями (7, 8), типовой слой которого есть множество точек образующей плоскости L_m, в котором в качестве структурной группы действует проективная фактор-группа GP(m). Расслоение $L_m(V_r)$

будем называть расслоением Ю.Г. Лумисте (ср. [1]). Из формул (3) в силу уравнений (6) следует, что структурными формами фактор-группы GP(m) являются формы

$$\overline{\omega}^a = \omega^a|_{\theta^i=0}\ ,\ \overline{\omega}^a_b = \omega^a_b|_{\theta^i=0}\ ,\ \overline{\omega}_a = \omega_a|_{\theta^i=0}\ .$$

Структурные уравнения (2) для форм ω^a, ω^a_b, ω_a запишем в виде:

$$\begin{gathered} D\omega^a = \omega^b \wedge \omega^a_b + \theta^i \wedge \omega^a_i,\quad D\omega_a = \omega^b_a \wedge \omega_b + \theta^i \wedge \omega_{ai}, \\ D\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \delta^a_b \omega_c \wedge \omega^c + \omega_b \wedge \omega^a + \theta^i \wedge \omega^a_{bi}; \end{gathered} \tag{10}$$

$$\omega^a_i = \Lambda^\alpha_i \omega^a_\alpha,\ \ \omega_{ai} = \Lambda^\alpha_{ai}\omega_\alpha,\ \ \omega^a_{bi} = \Lambda^\alpha_{bi}\omega^a_\alpha - \delta^a_b \Lambda^\alpha_i \omega_\alpha. \tag{11}$$

Структурные уравнения (7, 10) показывают, что над многообразием V_r имеется главное расслоение проективных реперов $P(V_r)$, типовым слоем которого служит проективная фактор-группа P=GP(m). Из строения форм Ω^a (5) видно, что расслоение $L_m(V_r)$ присоединено к главному расслоению $P(V_r)$.

Проективная связность в главном расслоении $P(V_r)$ задается по Лаптеву [2] с помощью форм

$$\tilde{\omega}^a = \omega^a - \Gamma^a_i\theta^i,\ \tilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma_{ai}\theta^i,\ \tilde{\omega}^a_b = \omega^a_b - \Gamma^a_{bi}\theta^i. \tag{12}$$

Компоненты объекта проективной связности $\{\Gamma^a_i, \Gamma_{ai}, \Gamma^a_{bi}\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям [1]

$$\begin{gathered} \Delta\Gamma^a_i - \Gamma^a_{bi}\omega^b + \omega^a_i = \Gamma^a_{ij}\theta^j,\ \Delta\Gamma_{ai} + \Gamma^b_{ai}\omega_b + \omega_{ai} = \Gamma_{aij}\theta^j, \\ \Delta\Gamma^a_{bi} + \delta^a_b(\Gamma_{ci}\omega^c - \Gamma^c_i\omega_c) + \Gamma_{bi}\omega^a - \Gamma^a_i\omega_b + \omega^a_{bi} = \Gamma^a_{bij}\theta^j. \end{gathered} \tag{13}$$

Формы проективной связности (12) удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\tilde{\omega}^a = \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^a_b + R^a_{ij}\theta^i \wedge \theta^j,\ \ D\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}^b_a \wedge \tilde{\omega}_b + R_{aij}\theta^i \wedge \theta^j,$$

$$D\tilde{\omega}^a_b = \tilde{\omega}^c_b \wedge \tilde{\omega}^a_c + \delta^a_b\tilde{\omega}_c \wedge \tilde{\omega}^c + \tilde{\omega}_b \wedge \tilde{\omega}^a + R^a_{bij}\theta^i \wedge \theta^j,$$

где компоненты объекта проективной кривизны $\{R^a_{ij}, R_{aij}, R^a_{bij}\}$ выражаются по формулам [3]:

$$R^a_{ij} = \Gamma^a_{[ij]} - \Gamma^b_{[i}\Gamma^a_{|b|j]}, \quad R_{aij} = \Gamma_{a[ij]} - \Gamma^b_{a[i}\Gamma_{|b|j]},$$

$$R^a_{bij} = \Gamma^a_{b[ij]} - \Gamma^c_{b[i}\Gamma^a_{|c|j]} - \delta^a_b\Gamma_{c[i}\Gamma^c_{j]} - \Gamma_{b[i}\Gamma^a_{j]}.$$

Геометрическая связность в расслоении Ю.Г. Лумисте $L_m(V_r)$ задается по Близникасу [4] с помощью форм $\tilde{\Omega}^a = \Omega^a - L^a_i\theta^i$. Компоненты объекта геометрической связности L^a_i удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta L^a_i - (x^a L^b_i + x^b L^a_i)\omega_b + \Omega^a_i = L^a_{ij}\theta^j + L^a_{ib}\Omega^b. \qquad (14)$$

Формы геометрической связности $\tilde{\Omega}^a$ подчиняются структурным уравнениям

$$D\tilde{\Omega}^a = \tilde{\Omega}^b \wedge (\Omega^a_b - L^a_{ib}\theta^i) + \mathcal{R}^a_{ij}\theta^i \wedge \theta^j,$$

где компоненты объекта геометрической кривизны выражаются по формулам

$$\mathcal{R}^a_{ij} = L^a_{[ij]} + L^a_{[i|b|}L^b_{j]}.$$

Теорема. *Проективная связность в расслоении проективных реперов $P(V_r)$ порождает геометрическую связность в расслоении Ю.Г. Лумисте $L_m(V_r)$, т. е. объект проективной связности $\{\Gamma^a_i, \Gamma_{ai}, \Gamma^a_{bi}\}$ охватывает объект геометрической связности L^a_i по формуле*

$$\hat{L}^a_i = \Gamma^a_i + x^b(\Gamma^a_{bi} - x^a\Gamma_{bi}), \qquad (15)$$

где знак " $\wedge$ " над объектом L^a_i означает его охват, а x^a – произвольные величины.

Доказательство. Запишем обозначение (5) в виде:

$$\Delta x^a - x^a x^b\omega_b + \omega^a - \Omega^a = 0.$$

С помощью этих равенств и дифференциальных уравнений (13) найдем уравнения для величин (15):

$$\Delta\hat{L}^a_i - \Gamma^a_{bi}\omega^b + \omega^a_i - \Gamma^a_{ij}\theta^j + (-x^b x^c\omega_c + \omega^b - \Omega^b)(\Gamma^a_{bi} - x^a\Gamma_{bi}) +$$
$$+ x^b[\delta^a_b(\Gamma_{ci}\omega^c - \Gamma^c_i\omega_c) + \Gamma_{bi}\omega^a - \Gamma^a_i\omega_b + \omega^a_{bi} - \Gamma^a_{bij}\theta^j -$$
$$-(-x^a x^c\omega_c + \omega^a - \Omega^a)\Gamma_{bi} - x^a(\Gamma^c_{bi}\omega_c + \omega_{bi} - \Gamma_{bij}\theta^j)] = 0.$$

Раскроем скобки, вынесем формы ω^b и перенесем слагаемые с формами θ^j и Ω^b вправо:

$$\Delta\hat{L}^a_i - (x^b x^c\Gamma^a_{ci} - x^b x^c x^a\Gamma_{ci} + x^a\Gamma^b_i + x^b\Gamma^a_i - x^a x^b x^c\Gamma_{ci} + x^a x^c\Gamma^b_{ci})\omega^b +$$
$$+ \omega^a_i + x^b\omega^a_{bi} - x^a x^b\omega_{bi} = \hat{L}^a_{ij}\theta^j + \hat{L}^a_{ib}\Omega^b,$$

$$\hat{L}^a_{ij} = \Gamma^a_{ij} + x^b(\Gamma^a_{bij} - x^a\Gamma_{bij}), \quad \hat{L}^a_{ib} = \Gamma^a_{bi} - x^a\Gamma_{bi} - \delta^a_b x^c\Gamma_{ci}.$$

Вынесем из слагаемых в скобках x^a либо x^b, причем одинаковые слагаемые $-x^a x^b x^c\Gamma_{ci}$ – не будем складывать, а разнесем их в разные совокупности, затем воспользуемся обозначением (15):

$$\Delta\hat{L}^a_i - (x^a\hat{L}^b_i + x^b\hat{L}^a_i)\omega_b + \omega^a_i + x^b\omega^a_{bi} - x^a x^b\omega_{bi} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \theta^j, \Omega^b). \quad (16)$$

Подставим выражения форм (11):

$$\Delta\hat{L}^a_i - (x^a\hat{L}^b_i + x^b\hat{L}^a_i)\omega_b + \Lambda^\alpha_i\omega^a_\alpha + x^b\Lambda^\alpha_{bi}\omega^a_\alpha -$$
$$- x^a\Lambda^\alpha_i\omega_\alpha - x^a x^b\Lambda^\alpha_{bi}\omega_\alpha \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \theta^j, \Omega^b).$$

Вынося формы ω^a_α и $x^a\omega_\alpha$, а затем выражения $\Lambda^\alpha_i + x^b\Lambda^\alpha_{bi}$, получим выражения ($9_2$) форм Ω^a_i. Следовательно, величины (15) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (14).

Замечания

1. Эта теорема соответствует общему результату о связностях в главном и присоединенном расслоениях, но получить формулу (15) из общей формулы [4] затруднительно.

2. Сопоставляя дифференциальные уравнения (14) и сравнения (16), приходим к другому представлению форм Ω_i^a:

$$\Omega_i^a = \omega_i^a + x^b(\omega_{bi}^a - x^a\omega_{bi}).$$

Эти выражения позволяют восстановить формулу (15) путем формальных замен: Ω на $\hat{L}$, ω на Γ.

3. В случае $x^a = 0$ имеем B=A, $\Omega^a = \omega^a$. Структурные уравнения (8) совпадают с уравнениями (10_1), т. е. являются структурными уравнениями канонического расслоения Ю.Г. Лумисте [1]. Каноническое расслоение есть однородное расслоение с типовым слоем L_m=GP(m)/GA*(m), где GA*(m) – коаффинная (центропроективная) группа стационарности точки $A \in L_m$. Формула (15) принимает вид: $\hat{L}_i^a = \Gamma_i^a$.

4. Обратная задача – построение проективной связности $\Gamma = \{\Gamma_i^a, \Gamma_{ai}, \Gamma_{bi}^a\}$ по заданной геометрической связности L_i^a – решена Ю.Г. Лумисте [1] для канонического расслоения. Решение имеет вид: $\Gamma = \Gamma(L_i^a, L_{ib}^a, L_{ibc}^a)$, где L_{ibc}^a – вторые вертикальные пфаффовы производные объекта геометрической связности L_i^a, причем выполняются условия горизонтальности.

Список литературы

1. *Лумисте Ю.Г.* Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях // Уч. зап. Тартуского ун-та. 1965. Вып. 177. С. 6 – 41.

2. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5 – 247.

3. *Жовтенко О.М.* Объект кривизны связности, ассоциированной с семейством плоскостей // Движения в обобщенных пространствах. Пенза, 2002. С. 81 – 86.

4. *Близникас В.И.* О некоторых связностях расслоенных пространств // Литов. мат. сб. 1967. Т. 7. N 1. С. 5 – 16.

Yu. Shevchenko

GEOMETRICAL CONNECTION OF A SET OF PLANES GENERATED BY A PROJECTIVE CONNECTION

In many-dimensional projective space the arbitrary set of planes of any dimensions is considered. With this set are associated a bundle of Yu. Lumiste and a bundle of projective frames, in which are given accordingly geometrical and projective connections. It is proved, that the projective connection generates geometrical connection.

УДК 514.75

Е.П. Юрова
(Калининградский государственный университет)

КОНГРУЭНЦИИ ЭЛЛИПСОИДОВ С КРАТНЫМИ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В трехмерном аффинном пространстве исследуются конгруэнции V эллипсоидов Q с невырождающимися поверхностями S центров. Доказано, что точки пересечения с эллипсоидом Q диаметра, сопряженного касательной плоскости к S относительно Q, могут быть фокальными только попарно. Исследованы подклассы конгруэнций V с кратными фокальными поверхностями и с фокальной поверхностью, описанной фокальными точками второго порядка. Установлен характеристический признак таких фокальных поверхностей.

§1. Поверхности и прямолинейные конгруэнции,