УДК 514.75

Б.А. Андреев

(Калининградский государственный университет)

ГИПЕРКВАДРИКА ЧЕХА ТОЧЕЧНОГО СООТВЕТСТВИЯ

Изучается локальное соответствие проективно-аффинных пространств. Найдены и геометрически охарактеризованы возникающие во 2-й дифференциальной окрестности инвариантные геометрические образы. Доказаны предложения, в которых изучаются свойства этих образов и их связь с введенным ранее автором понятием главных точек отображения.

Пусть f: $P_n \to \widetilde{P}_n$ – локально определенное дифференцируемое отображение проективно-аффинных [1, с. 483] пространств, отнесенных соответственно к подвижным реперам R={A,E_I} и r={a, e_i}, деривационные формулы которых имеют вид:

$$dA = \Omega^I E_I,\ dE_I = \Omega_I^K E_K,\ da = \omega^i e_i,\ de_i = \omega_i^j e_j (i,... = \overline{1,n};\ I,... = \overline{1,n}), \tag{1}$$

где формы Пфаффа подчиняются известным уравнениям структуры. Поместив начало A в произвольную точку P области определения отображения f, а начало a – в точку p=f(P), получим дифференциальные уравнения отображения f в виде

$$\omega^i = \Lambda_I^i \Omega^I. \tag{2}$$

Двукратное продолжение системы (2) приводит к фундаментальному объекту 2-го порядка Γ_2={$\Lambda_I^i, \Lambda_{IJ}^i$}. Обозначим несобственные гиперплоскости пространств P_n и $\widetilde{P}_n$ соответственно Π_{n-1} и π_{n-1}. Для каждой точки P объектом Γ_2 определяется введенное автором [2] инвариантное алгебраическое многообразие

$$\Lambda_{IK}^i X^I X^K - 2\Lambda_I^i X^I = 0, \tag{3}$$

названное индикатрисой I в точке P. Имеем: $P \in I$. Геометрический смысл индикатрисы I состоит в том, что задаваемые ею главные точки, т.е. точки множества $I \setminus \{P\}$, характеризуются условиями: 1) существует касательная к f в P коллинеация, принадлежащая связке коллинеаций K(P_I):

$$x^i = \frac{\Lambda_K^i X^K}{1 - P_I X^I} \tag{4}$$

такая, что прямая [PM] ($M \in I \setminus \{P\}$) является для нее главной [3] и 2) K(P_I)(M) $\in \pi_{n-1}$.

Рассмотрим струю 2-го порядка $j_P^2 f$:

$$x^i = \Lambda_I^i x^I + \frac{1}{2}\Lambda_{IK}^i x^I x^K + <3>. \tag{5}$$

Предложение 1. Главные точки $M \in I \setminus \{P\}$ и только они обладают свойством: если M^* – точка, симметричная точке M относительно точки P, то для сужения $\varphi|_{[PM]}$, где $\varphi \in j_P^2 f$, выполняется $\varphi|_{[PM]}(M^*)=p$.

Замечание 1. Указанное свойство можно было бы положить в основу определения главных точек. Однако выбранное нами определение обладает тем преимуществом, что в отличие от другого сохраняется при переходе от проективно-аффинного пространства P_n к проективному пространству.

Рассмотрим объект связности Г.Врэнчану [3; 6] отображения f:

$$\Gamma^I_{JK} = V^{It}\Lambda_{tJK}, \tag{6}$$

где V^{It} определяется системой $V^{It}\Lambda_{tJ}=\delta^I_J$. Объект (6) удовлетворяет соотношениям (5.2) [3] и в нашем случае, как легко показать, определяет в P_n аффинную связность. Э. Чех ввел в рассмотрение [4] коллинеацию $K_c \in K(P_I)$, для которой выполняется:

$$P_I = \frac{1}{n+1}\Gamma_I \overset{d}{=} \frac{1}{n+1}\Gamma^T_{TI} \tag{7}$$

и которая называется локальной коллинеацией Чеха. Непосредственным подсчетом доказывается

Предложение 2. Локальная коллинеация Чеха характеризуется условием: точка P является стационарной точкой якобиана отображения $K_C^{-1} \circ f$.

Легко видеть, что система (3), определяющая многообразие I, эквивалентна системе

$$\Gamma^I_{JK} X^J X^K - 2X^I = 0. \tag{8}$$

Объектом Γ_2 для каждой точки P определяется инцидентная ей гиперквадрика Q_c:

$$\Gamma_I(\Gamma^I_{JK} X^J X^K - 2X^I) = 0, \tag{9}$$

которую будем называть гиперквадрикой Чеха. Заметим, что гиперквадрика Q_c содержит все главные точки и точку P. Кроме Q_c коллинеация K_c определяет также для каждой точки P гиперплоскость Π_c:

$$\Gamma_I X^I = n+1. \tag{10}$$

Пусть χ – линейное отображение, касательное к f в каждой точке P.

Предложение 3. Гиперплоскость Чеха отображения f является прообразом несобственной гиперплоскости $\pi_{n-1} \subset \widetilde{P}_n$ при отображении $\chi^{-1} \circ K_c$.

Доказательство вытекает из формул (4); (7); (10).

Предложение 4. Касательная гиперплоскость в точке P к гиперквадрике Чеха Q_c параллельна гиперплоскости Чеха Π_c. Ее уравнение имеет вид:

$$\Gamma_I X^I = 0. \tag{11}$$

Обозначим гиперплоскость (11) символом Π^*_c. Рассмотрим связку гиперквадрик вида

$$\alpha_T(\Gamma^T_{IK} X^I X^K - 2X^T) = 0. \tag{12}$$

Предложение 5. Единственной гиперквадрикой в связке (12), касательная к которой в точке P параллельна гиперплоскости Чеха Π_c, является гиперквадрика Чеха Q_c.

Замечание 2. Проведенные рассуждения показывают, что при заданном множестве χ характеристических прямых в точке P множество $I\backslash\{P\}$ главных точек можно в нашем случае получить тремя способами: 1) с помощью $K(P_I)$ – главных прямых; 2) при помощи струи $j^2_P f$; 3) с помощью гиперквадрики Чеха Q_c.

Список литературы

1. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., 1979.

2. *Андреев Б.А.* К геометрии дифференцируемого отображения $f{:}P_m \to P_n$ $(m \geq n)$ // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1987. №18. С. 5 – 9.

3. *Рыжков В.В.* Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия. 1963. Итоги науки / ВИНИТИ. М., 1965. С. 65 – 107.

4. *Чех Э.* Проективная дифференциальная геометрия соответствий между пространствами // Чехосл. мат. журн. 1952. №1. С. 91 – 107.

5. *Vrânceanu G.* Sul tensore associanto ad una corrispondenza fra spazi proettivi // Boll. Unione mat. ital. 1957. Vol.12. №4. P. 489 – 506.

B. Andreev

THE CECH`S HYPERQUADRIC OF THE POINT CORRESPONDENCE

The local point mapping of progective-affine spaces is studied. Geometrical images based on the notion of the Cech`s local collineation are found and interpreted geometrically. Propositions are proved about properties of this images and their connection with the notion of the principal points, defined by the author.

УДК 514.763.8

М.Б. Банару

(Смоленский гуманитарный университет)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Найден простой критерий принадлежности произвольного почти эрмитова многообразия классу AH-многообразий с *J*-инвариантным тензором Риччи. Указано семейство нетривиальных примеров 6-мерных почти эрмитовых многообразий с *J*-инвариантным тензором Риччи.

Почти эрмитовы (almost Hermitian, *AH*-) структуры относятся к числу наиболее содержательных дифференциально-геометрических структур. Их изучению посвящено огромное количество публикаций, характеризующих эти структуры как с