УДК 517.957/517.958

А. В. Юров, А. А. Юрова, Р. В. Чириков

ЗАМКНУТЫЕ ОДЕВАЮЩИЕ ЦЕПОЧКИ УРАВНЕНИЙ ТОДЫ

Метод одевающих цепочек дискретных симметрий применяется для размножения цепочек Тоды в случае одного и двух пространственных измерений. На примере модифицированных уравнений Тоды $м_0ЦТ$ и $м_1ЦТ$ показано, что комбинация преобразований Дарбу и Шлезингера приводит к замкнутым одевающим цепочкам.

The method of closed chains of discrete symmetries is used to multiply Toda lattices in one and two spatial dimensions. Using the modified Toda equations m_0TC and m_1TC as an example, it is shown that the combination of the Darboux and Schlesinger transformations leads to closed dressing chains.

Ключевые слова: одевающие цепочки Тоды, преобразование Дарбу, преобразование Шлезингера.

Keywords: dressing Toda chains, Darboux transformation, Schlesinger transformation.

Введение

Данная работа посвящена применению метода одевающих цепочек дискретных симметрий к уравнениям цепочки (в том числе двумеризованной) Тоды. Мы начинаем с нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ)

$$iu_t + u_{xx} + 2u^2 v = -iv_t + v_{xx} + 2v^2 u = 0, \tag{1}$$

которое допускает два типа дискретных симметрий — преобразование Дарбу [1] и преобразование Шлезингера [2]. Последнее преобразование приводит к связи НУШ с уравнениями цепочки Тоды (ЦТ) [3]. Используя это свойство и LA-пару для НУШ, легко получить LA-пару для уравнений ЦТ. Зная, в свою очередь, преобразование Дарбу для НУШ, находим преобразование Дарбу для уравнений ЦТ. Применяя теперь метод одевающих цепочек, можно построить модифицированные уравнения ЦТ, которые мы будем обозначать $м^1ЦТ$ (с верхним индексом). Для получения этих уравнений достаточно знать явный вид L-оператора НУШ. Повторяя описанную процедуру с A-оператором уравнений (1), находим соответствующие симметрии (в смысле работы [4]) уравнений $м^1ЦТ$. Вся эта схема реализована во втором разделе статьи. Мы покажем, что возникает замкнутая одевающая цепочка, связывающая уравнения ЦТ и уравнения Вольтерра.

Альтернативный способ размножить цепочки Тоды описан в третьем разделе и состоит в следующем: строим цепочки дискретных

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта.
Сер.: Физико-математические и технические науки. 2018. № 3. С. 54 – 72.

симметрий для НУШ и находим соответствующие модифицированные НУШ, обозначаемые как $м_к НУШ$. Каждое из них наследует от исходного НУШ (1) преобразования Шлезингера, которые определяют соответствующие цепочки типа Тоды — $м_к ЦТ$ (с нижним индексом). Поскольку LA-пары и преобразование Дарбу для $м_к НУШ$ известны (в этом вся сила метода одевающих цепочек), можно найти LA-пары и преобразование Дарбу для $м_к ЦТ$. Применяя метод, описанный в предыдущем абзаце, находим новые семейства уравнений типа Тоды, которые можно обозначить $м_к^n ЦТ$. Нижний индекс в этой записи указывает на номер модифицированного НУШ, порождающего соответствующую цепочку. Так, уравнения изученные во втором разделе, принадлежат классу $м_0 ЦТ$, а уравнения из третьего раздела — классу $м_1 ЦТ$.

В четвертом разделе мы обобщим наш подход на двумеризованные цепочки, используя в качестве отправных уравнения Дэви — Стюартсона. Будут построены двумерные одевающие цепочки первого и второго рода.

Существует большое количество работ, в которых изучалась связь между интегрируемыми моделями типа (1) с дифференциально-разностными цепочками типа Тоды (см.: [5]). Связь таких цепочек с наличием дифференциальных подстановок, переводящих решения интегрируемых систем типа (1) в решения этих же уравнений, обсуждалась ранее в [6; 7]. Классификация интегрирумых цепочек проводилась в работах [4; 8—10]. Наши результаты тесно связаны (и даже частично перекрываются) с результатами, полученными в [11], поэтому нам показалось необходимым в последнем разделе кратко объяснить это обстоятельство. Предлагаемая статья является продолжением работы одного из авторов [12], которая, в свою очередь, была инициирована статьей [13].

Уравнения $м_0 ЦТ$

LA-пара для (1) имеет вид

$$\Psi_x = -i\sigma_3 \Psi\Lambda + iS\Psi, \qquad \Psi_t = -2i\sigma_3\Psi\Lambda^2 + 2iS\Psi\Lambda + W\Psi, \tag{2}$$

где

$$S = \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad W = \sigma_3\left(iS^2 - S_x\right),$$

где λ и μ — спектральные параметры; σ_3 — третья матрица Паули; Ψ — матричная функция 2×2.

Обозначим элементы первого столбца этой функции ψ_n и ϕ_n, $u \equiv u_n$, $v \equiv v_n$. Тогда L-уравнение системы (2), расписанное в компонентах, примет вид

$$\psi_{n,x} = -i\lambda\psi_n + iu_n\phi_n, \; \phi_{n,x} = i\lambda\phi_n + iv_n\psi_n. \tag{3}$$

Элементы второго столбца Ψ удовлетворяют аналогичной системе с заменой $\lambda \to \mu$.

Преобразования Шлезингера для (1) имеют вид

$$u_n \to u_{n+1} = u_n\left[u_n v_v + \left(\ln u_n\right)_{xx}\right], \qquad v_n \to v_{n+1} = \frac{1}{u_n}, \tag{4}$$

$$\psi_n \to \psi_{n+1} = \left(-2\lambda + i(\ln u_n)_x\right)\psi_n + u_n\phi_n, \; \phi_n \to \phi_{n+1} = \frac{\psi_n}{u_n}. \tag{5}$$

Формулы обратных преобразований:

$$\begin{gathered} v_n \to v_{n-1} = v_n\left[u_n v_v + \left(\ln v_n\right)_{xx}\right], \; u_n \to u_{n-1} = \frac{1}{v_n}, \\ \phi_n \to \phi_{n-1} = \left(2\lambda + i(\ln v_n)_x\right)\phi_n + v_n\psi_n, \; \psi_n \to \psi_{n-1} = \frac{\phi_n}{v_n}. \end{gathered} \tag{6}$$

Обозначим

$$q_n \equiv \ln(u_n), \; p_n \equiv q_{n,x}, \; U_n \equiv \frac{u_n}{u_{n-1}} = e^{q_n - q_{n-1}}. \tag{7}$$

Прямой проверкой легко убедиться, что функции q_n удовлетворяют уравнениям ЦТ:

$$q_{n,xx} = e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n - q_{n-1}}. \tag{8}$$

Эта замечательная связь между (1) и (8) была отмечена во многих работах (см.: [3—5]). Наша первая цель — получить LA-пару для (8) из уравнений (3). Для этого удобно определить оператор сдвига T:

$$Tu_n = u_{n+1}.$$

Действуем T^{-1} на второе уравнение (5), подставляем выражение для ϕ_n в первое уравнение из (3) и получаем первое уравнение LA-пары:

$$\psi_{n,x} = -i\lambda\psi_n + iU_n\psi_{n-1}. \tag{9}$$

Чтобы найти второе уравнение пары, подействуем T на второе уравнение (3) и подставим в «сдвинутое» соотношение ϕ_{n+1}, выраженное из второго уравнения (5), v_{n+1} — из второго уравнения (4), и $\psi_{n,x}$ — из (9). В результате получим:

$$\psi_{n+1} = (2\lambda + ip_n)\psi_n + U_n\psi_{n-1}. \tag{10}$$

Условия совместности (9) и (10) записываются как два уравнения

$$p_{n,x} = U_{n+1} - U_n, \qquad U_{n,x} = U_n\left(p_n - p_{n-1}\right),$$

которые сводятся к уравнениям ЦТ (8) после учета (7). Таким образом, (9) и (10) представляют собой искомую LA-пару.

Теперь получим преобразование Дарбу для уравнений ЦТ, используя элементарные преобразования Дарбу для НУШ (1), описанные в [14]. Пусть ψ_1 и ϕ_1 — элементы первого столбца матричного решения Ψ уравнений (2) с $\lambda = \lambda_1$. Тогда можно написать два вида преобразований Дарбу (индексы опущены):

$$\psi \to \psi^{(1)} = \left[2(\lambda - \lambda_1) + \frac{\phi_1}{\psi_1} u\right]\psi - u\phi,\ \phi \to \phi^{(1)} = \phi - \frac{\phi_1}{\psi_1}\psi,$$
$$u \to u^{(1)} = iu_x - \left(2\lambda_1 - \frac{\phi_1}{\psi_1} u\right)u,\ v \to v^{(1)} = \frac{\phi_1}{\psi_1} \tag{11}$$

и

$$\psi \to^{(1)} \psi = \psi - \frac{\psi_1}{\phi_1}\phi, \qquad \phi \to^{(1)} \phi = \left[2(\lambda_1 - \lambda) + \frac{\psi_1}{\phi_1} v\right]\phi - v\psi,$$
$$u \to^{(1)} u = \frac{\psi_1}{\phi_1}, \qquad v \to^{(1)} v = iv_x + \left(2\lambda_1 + \frac{\psi_1}{\phi_1} v\right)v. \tag{12}$$

Пусть ψ_2, ϕ_2 — элементы второго столбца Ψ, причем $\mu = \lambda_2$. Выполним последовательно преобразования (11) и (12):

$$u \to u^{(1)} \to^{(2)} u^{(1)},\ v \to v^{(1)} \to^{(2)} v^{(1)},$$
$$\psi \to \psi^{(1)} \to^{(2)} \psi^{(1)},\ \phi \to \phi^{(1)} \to^{(2)} \phi^{(1)}. \tag{13}$$

Отметим, что преобразования Дарбу коммутируют друг с другом так, что

$$^{(2)}u^{(1)} = ^{(1)}u^{(2)}, \qquad ^{(2)}v^{(1)} = ^{(1)}v^{(2)}.$$

Если расписать выражения (13) для дважды одетых потенциалов и волновых функций в явном виде, то можно убедиться, что получены формулы «обычного» преобразования Дарбу для НУШ, предъявленные в [1]. Именно это обстоятельство позволяет называть преобразования (11) и (12) элементарными преобразованиями Дарбу. К сожалению, эти преобразования неудобны для нахождения точных решений НУШ, поскольку они не позволяют в общем виде сохранить редукционное ограничение $u = \pm v^*$, в отличие от преобразований (13).

Теперь легко найти преобразования Дарбу и для уравнений ЦТ. Опуская простые вычисления, приведем окончательный ответ. Пусть $\{\psi_{1,n}\}$ — решение LA-пары (9)—(10) с $\lambda = \lambda_1$. Тогда имеем два преобразования Дарбу для уравнений ЦТ, которые мы обозначим буквами R и L:

$$R: \psi_n \to \psi_n^{(1)} = -\psi_{n+1} + \frac{\psi_{1,n+1}}{\psi_{1,n}}\psi_n,\ q_n \to q_n^{(1)} = q_n + \ln\frac{\psi_{1,n+1}}{\psi_{1,n}} \tag{14}$$

и

$$L: \psi_n \to^{(1)} \psi_n = \psi_n - \frac{\psi_{1,n}}{\psi_{1,n-1}}\psi_{n-1},\ q_n \to^{(1)} q_n = q_{n-1} + \ln\frac{\psi_{1,n}}{\psi_{1,n-1}}. \tag{15}$$

Используя LA-пару (9)—(10), несложно найти первые модифицированные уравнения ЦТ. Для этого введем функции τ_n и ξ_n :

$$\tau_n = \frac{\psi_{1,n}}{\psi_{1,n+1}} = \frac{1}{\partial \xi_n},$$

причем $\partial \equiv -i\partial/\partial x$, $V_n \equiv ip_n$. Вид функции τ_n диктуется формулами (14) и (15). В новых переменных LA-пара для уравнений ЦТ принимает вид

$$\partial \tau_n = \tau_n \left(\tau_{n-1} U_n - \tau_n U_{n+1} \right), \ \tau_{n+1} = \frac{1}{2\lambda_1 + V_{n+1} + \tau_n U_{n+1}}. \qquad (16)$$

Отметим, что первое уравнение квадратично нелинейно по вспомогательным полям τ_n, как и «положено» в методе одевающих цепочек [13].

Исключая из (16) потенциалы U_n , U_{n+1} и V_{n+1}, находим уравнения $м^1 ЦТ$, которые оказываются уравнениями Вольтерра (можно записать эти уравнения в более привычном виде — см. (17), (52))

$$\partial^2 \xi_n = \partial \xi_n \left(e^{\xi_n - \xi_{n+1}} - e^{\xi_{n-1} - \xi_n} \right). \qquad (17)$$

Для получения одевающих цепочек дискретных симметрий можно воспользоваться *R*- или *L*-преобразованиями (14) и (15). Выберем формулы (14). При этом правила преобразования U_n и V_n задаются выражениями

$$U_n \to U_n^{(1)} = \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} U_n, \qquad V_n \to V_n^{(1)} = V_n + \tau_{n-1} U_n - \tau_n U_{n+1}.$$

Пусть $\psi_{2,n}$ — решения (9), (10) с $\lambda = \lambda_2$, $\psi_{2,n}^{(1)}$ вычисляется из (14), а ζ_n — функция, определяемая формулой

$$\partial \zeta_n = \frac{\psi_{2,n+1}^{(1)}}{\psi_{2,n}^{(1)}}.$$

После простых вычислений находим искомые цепочки:

$$e^{\zeta_n - \zeta_{n+1}} \partial \zeta_n = e^{\xi_n - \xi_{n+1}} \partial \xi_{n+1}, \ \partial \left(\zeta_n - \xi_n \right) = 2(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{\zeta_{n-1} - \zeta_n} - e^{\xi_n - \xi_{n+1}}. \qquad (18)$$

Из (18) легко извлечь LA-пару для (17). Обозначая $\zeta_n = \ln \Psi_n$, находим

$$\partial \Psi_n = A_n \Psi_{n+1} = \left(B_{n-1} + \tilde{\lambda} \right) \Psi_n + \Psi_{n-1}, \qquad (19)$$

где

$$A_n = e^{\xi_n - \xi_{n+1}} \partial \xi_{n+1}, \ B_n = \partial \xi_{n+1} - e^{\xi_{n+1} - \xi_{n+2}}, \qquad (20)$$

а новый спектральный параметр $\tilde{\lambda}$ связан со старым λ соотношением $\tilde{\lambda} = 2(\lambda - \lambda_1)$. Отметим, что условие совместности уравнений (19) имеет вид уравнений обычной цепочки Тоды

$$\partial A_n = A_n (B_{n-1} - B_n), \qquad \partial B_n = A_{n+1} - A_n \qquad (21)$$

и сводится к (17), если подставить в (21) выражения (20). Выраженное в новых зависимых переменных, *R*-преобразование (14) оказывается *L*-преобразованием (15). Другими словами, возникает замкнутая однозвеньевая одевающая цепочка дискретных симметрий, на одном конце которой «находятся» уравнения ЦТ, а на другом — уравнения Вольтерра ($м^1ЦТ$).

Для полноты изложения приведем соответствующие формулы. Пусть $\Psi_{1,n}$ — решения (19) при $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1 \neq 0$. *R*-преобразование (14) индуцирует *L*-преобразование Дарбу (15) для (19) и (21) (это проверяется прямым вычислением):

$$\Psi_n \to^{(1)} \Psi_n = \Psi_n - \sigma_n \Psi_{n+1}, \qquad A_n \to^{(1)} A_n = A_n - \partial\sigma_n,$$

$$B_n \to^{(1)} B_n = B_{n+1} + \partial \ln \sigma_{n+1},$$

где функции $\sigma_n = \Psi_{1,n}/\Psi_{1,n+1}$ удовлетворяют системе уравнений (ср. с (16))

$$\partial\sigma_n = A_n - (B_n + \tilde{\lambda}_1)\sigma_n - \sigma_n^2, \ \sigma_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{B_n + \sigma_n + \tilde{\lambda}_1}. \qquad (22)$$

Используя (21) и (22), исключаем потенциалы B_n и снова получаем уравнения Вольтерра:

$$\partial \ln \sigma_n = \beta_n - \beta_{n+1}, \qquad \partial \ln \beta_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}, \qquad (17)$$

где $\beta_n = A_n/\sigma_n$.

Аналогично рассматриваются уравнения, связанные с динамикой по переменной t. Переписывая (1) в терминах полей q_n, p_n и учитывая (8), находим известную симметрию уравнений (8):

$$-iq_{n,t} = p_n^2 + e^{q_{n+1}-q_n} + e^{q_n - q_{n-1}}. \qquad (23)$$

Можно повторить все описанные выше действия: найти LA-пару, применить преобразование Дарбу и построить симметрию уравнений Вольтерра. Соответствующие формулы неоднократно описаны [4; 8], поэтому мы не будем их приводить. Отметим, что в работе [4] приведен полный (с точностью до калибровочных, линейных и галилеевских преобразований) список интегрируемых обобщений классической и релятивистской цепочек Тоды вида

$$q_{n,xx} = \frac{1}{2}\left(G(q_{n+1}, q_n, p_{n+1}, p_n) - F(q_n, q_{n-1}, p_n, p_{n-1})\right),$$

обладающих симметриями вида

$$q_{n,t} = \frac{1}{2}\left(G(q_{n+1}, q_n, p_{n+1}, p_n) + F(q_n, q_{n-1}, p_n, p_{n-1})\right).$$

Используя метод одевающих цепочек, нам удалось получить только два уравнения из этого списка (уравнения ЦТ и Вольтерра). Вопрос, можно ли подобным образом вывести остальные уравнения, нуждается в дополнительном исследовании. В следующем разделе мы получим новые обощения уравнений ЦТ по схеме, описанной во введении статьи.

Уравнения $м_1ЦТ$

Используя преобразование Дарбу (13) и LA-пару для НУШ (1), можно построить первое мНУШ (то есть $м_1НУШ$), которое имеет вид

$$\begin{aligned}&\left(\beta^2-4bc\right)\left(ib_t+b_{xx}-2b^2c\right)+2\alpha\left(\alpha c+2ic_x\right)b^2+2(b_xc+2bc_x)b_x=0,\\&\left(\beta^2-4bc\right)\left(-ic_t+c_{xx}-2c^2b\right)+2\alpha\left(\alpha b-2ib_x\right)c^2+2(bc_x+2b_xc)c_x=0,\end{aligned}\qquad(24)$$

где $\alpha=\lambda+\mu$, $\beta=\lambda-\mu$; λ и μ — по-прежнему спектральные параметры задачи (2); $b=b(x,t)$ и $c=c(x,t)$ — новые зависимые переменные, определенные соотношениями

$$b=\frac{u-^{(2)}u^{(1)}}{2},\qquad c=\frac{^{(2)}v^{(1)}-v}{2}.$$

Если $\alpha=\beta=0$, то уравнения (24) принимают изящный вид

$$ib_t+b_{xx}-2b^2c-\frac{b_xc_x}{c}-\frac{1}{2}\frac{b_x^2}{b}=0,\ -ic_t+c_{xx}-2bc^2-\frac{b_xc_x}{b}-\frac{1}{2}\frac{c_x^2}{c}=0.\qquad(25)$$

Преобразования Шлезингера для (25) определяются формулами (ср. с (4), (6))

$$\begin{aligned}&b_n\to b_{n+1}=\frac{1}{4}\frac{(2c_nb_{n,x}^2-2c_nb_nb_{n,xx}+c_{n,x}b_{n,x}b_n+4c_n^2b_n^3)^2}{c_n^2b_n(b_{n,x}^2-4c_nb_n^3)},\\&c_n\to c_{n+1}=\frac{4c_nb_n^2}{b_{n,x}^2-4c_nb_n^3},\\&b_n\to b_{n-1}=\frac{4b_nc_n^2}{c_{n,x}^2-4b_nc_n^3},\\&c_n\to c_{n-1}=\frac{1}{4}\frac{(2b_nc_{n,x}^2-2b_nc_nc_{n,xx}+b_{n,x}c_{n,x}c_n+4b_n^2c_n^3)^2}{b_n^2c_n(c_{n,x}^2-4b_nc_n^3)},\end{aligned}\qquad(26)$$

причем

$$(b_{n+1})_{n-1}=(b_{n-1})_{n+1}=b,\qquad(c_{n+1})_{n-1}=(c_{n-1})_{n+1}=c.$$

Формулы (26) были выведены нами из цепочек дискретных симметрий для НУШ. В методических целях кратко опишем непосредственный способ их получения.

В основе лежит сравнение уравнений (25) и (1). Рассмотрим, для определенности, преобразования $n\to n+1$ в (26). В случае преобразований Шлезингера (4) для НУШ видно, что новые поля выражаются через старые с помощью следующей функциональной зависимости (чтобы не загромождать формулы, опустим часть индексов):

$$u_{n+1} = U(u, v, u_x, u_{xx}), \; v_{n+1} = V(u). \tag{27}$$

По аналогии с (27) для мНУШ (25) следует выбрать

$$b_{n+1} = B(b, c, q, p, w), \qquad c_{n+1} = C(b, c, q), \tag{28}$$

где величины $q = b_x$, $p = c_x$, $w = q_x$ рассматриваются как независимые переменные, а B и C подлежат определению. Теперь надо подставить (28) в мНУШ, исключить производные по времени с помощью (25) и приравнять по отдельности нулю выражения, стоящие при независимых переменных. Так, приравнивая нулю коэффициент при w_x во втором уравнении (25), находим после простого интегрирования по переменной w:

$$B = \left(wC_q + qC_b + pC_c\right)^2 S(b, c, q, p),$$

где $S(b,c,q,p)$ — произвольная функция своих аргументов. Приравнивая нулю коэффициент при w, получаем:

$$C_q = 0, \qquad\qquad S_p = 0.$$

Дальнейшее вычисление показывает, что следует выбрать второй вариант, откуда $S = Z(b,c,q)$. Далее обнуление коэффициента при p_x приводит к простому уравнению в частных производных, интегрирование которого дает функциональную зависимость для C:

$$C = C\left(b, \frac{q^2}{c}\right).$$

Коэффициент при w^2 приводит к уравнениям Риккати, однако можно упростить дальнейшие вычисления с помощью следующего наблюдения. Пусть

$$b = g_1(t) + \varepsilon f_1(x,t), \; c = g_2(t) + \varepsilon f_2(x,t). \tag{29}$$

Подставляя (29) в (25), видим, что при $\varepsilon \to 0$ два последних слагаемых в (25) пренебрежимо малы и уравнения (25) превращаются в (несолитонное) НУШ. Это означает, что в таком пределе искомые преобразования Шлезингера должны переходить в преобразования Шлезингера (4). Отсюда следует, что

$$\frac{1}{C} = -b + F\left(b, \frac{q^2}{c}\right),$$

причем $F(b,0) = 0$ ($\varepsilon \to 0$ равносильно тому, что $q \to 0$ и $p \to 0$). Последнее означает, что функцию F можно разложить в ряд по степеням q^2/c. Учитывая, что размерности величин b, c и x связаны соотношением $[b][c] = [x]^{-2}$, получаем анзац для C:

$$\frac{1}{C}=-b+\sum_{m=1}^{\infty}G_m\left(\frac{q^2}{c}\right)^m b^{1-3m}, \tag{30}$$

где G_m — постоянные безразмерные коэффициенты. В действительности, достаточно ограничиться первым членом ряда в (30) (оказывается, что $G_1=1/4$, а остальные коэффициенты равны нулю, в чем легко убедиться, сравнив (30) и (26)). Используя найденый анзац, можно продолжить вычисления и найти формулы (26).

Если α и β отличны от нуля, то

$$b_{n-1}=\frac{ic_n(\beta^2-4b_nc_n)}{i(\alpha^2-\beta^2)c_n^2-2\alpha c_nc_{n,x}+i(4c_n^3b_n-c_{n,x}^2)},$$

$$c_{n-1}=\frac{Z(-\alpha,\beta,c_n,b_n)}{\left(\beta^2-4bc\right)^2\left[i(\alpha^2-\beta^2)c_n^2-2\alpha c_nc_{n,x}+i(4c_n^3b_n-c_{n,x}^2)\right]}, \tag{31}$$

$$b_{n+1}=\frac{Z(\alpha,\beta,b_n,c_n)}{\left(\beta^2-4bc\right)^2\left[i(\alpha^2-\beta^2)b_n^2+2\alpha b_nb_{n,x}+i(4b_n^3c_n-b_{n,x}^2)\right]},$$

$$c_{n+1}=\frac{ib_n(\beta^2-4b_nc_n)}{i(\alpha^2-\beta^2)b_n^2+2\alpha b_nb_{n,x}+i(4b_n^3c_n-b_{n,x}^2)}. \tag{32}$$

Величина $Z(\alpha,\beta,b,c)$ имеет достаточно громоздкий вид. Мы приведем соответствующие выражения в двух предельных случаях ($\beta=0$ и $\alpha=0$):

$$\frac{Z(\alpha,0,b,c)}{4b}=-i(b^2c\alpha^2)^2+2b^3c(bc_x-b_xc)\alpha^3-ib^2\times$$
$$\times\left[3(b_xc)^2+(3bc)^3+4bc(b_xc_x-cb_{xx})-(bc_x)^2\right]\alpha^2+2b(bc_x-b_xc)\times$$
$$\times\left((2cb)^2b+b_xc_xb-2bcb_{xx}+2b_x^2c\right)\alpha-i\left((2cb)^2b+b_xc_xb-2bcb_{xx}+2b_x^2c\right)^2,$$
$$-iZ(0,\beta,b,c)=b(b^3c+b_x^2-bb_{xx})\beta^6+\left[(b_x^2-bb_{xx})b_{xx}-2b^3b_xc_x-12b^2c\left(b^3c+b_x^2-bb_{xx}\right)\right]\beta^4+$$
$$+\left[48b^3c^2\left(b_x^2+b^3c-bb_{xx}\right)+8c(bb_{xx})^2-4bb_x(3b_xc+bc_x)b_{xx}+(3cb_x^2+2bc_xb_x^2+16b^4cc_x)b_x\right]\beta^2-$$
$$-4b\left((2cb)^2b+b_xc_xb-2bcb_{xx}+2b_x^2c\right)^2.$$

Формулы (31), (32) приводят к новым цепочкам типа Тоды. Обозначая

$$P_n=\ln b_n,\qquad Q_n=\ln c_n,$$

находим уравнения $м_1^0ЦТ\equiv м_1ЦТ$ в уже употреблявшихся «евклидовых» переменных:

$$(\partial P_n)^2+2\alpha\partial P_n+4e^{P_n+Q_n}-\beta^2e^{-P_n-Q_{n+1}}+4e^{Q_n-Q_{n+1}}=\beta^2-\alpha^2,$$

$$(\partial Q_n)^2-2\alpha\partial Q_n+4e^{P_n+Q_n}-\beta^2e^{-Q_n-P_{n-1}}+4e^{P_n-P_{n-1}}=\beta^2-\alpha^2. \tag{33}$$

Таким образом, мы имеем интегрируемую решетку, состоящую из взаимодействующих атомов двух сортов. Наиболее прост случай $\alpha = \beta = 0$. Тогда каждое уравнение имеет вид закона сохранения полной энергии отдельного узла. Иначе говоря, в этом случае уравнения (33) описывают нулевые колебания атомов построенной решетки. Отметим, что вклад в полную энергию каждого узла вносит взаимодействие с двумя соседними узлами, связанными с атомами другого сорта. Кроме этого, так же как уравнения ЦТ, уравнения $м_1ЦТ$ (33) допускают симметрию, связанную с динамикой по переменной t, которая описывается уравнениями (24).

LA-пару для (33) можно получить, используя цепочки дискретных симметрий для НУШ. Опустив вычисления, приведем окончательный ответ:

$$
\begin{gathered}
(\alpha - 2a_n)\partial\Psi_n + 2(\alpha_1 - A_n)(\alpha - 2a_n)\Psi_n - (\alpha_1 - 2A_n)(\partial b_n + 2a_n b_n) = 0,\\
\Psi_{n-1} = \frac{\left(\beta_1^2 - 4\Psi_n\Phi_n\right)\Phi_n}{\left(\alpha_1^2 - \beta_1^2\right)\Phi_n^2 - 2\alpha_1\Phi_n\partial\Phi_n + 4\Phi_n^3\Psi_n + \left(\partial\Phi_n\right)^2},\\
(\alpha - 2a_n)\partial\Phi_n + 2\left((\alpha - a_n)\alpha_1 + (4a_n - 3\alpha)A_n\right)\Phi_n - (\alpha - 2A_n)\partial c_n = 0,\\
\Phi_{n+1} = \frac{\left(\beta_1^2 - 4\Psi_n\Phi_n\right)\Psi_n}{\left(\alpha_1^2 - \beta_1^2\right)\Psi_n^2 + 2\alpha_1\Psi_n\partial\Psi_n + 4\Psi_n^3\Phi_n + \left(\partial\Psi_n\right)^2},
\end{gathered}
\tag{34}
$$

где Ψ_n, Φ_n — волновые функции спектральной задачи, α_1, β_1 — спектральные параметры (α и β считаются фиксированными), а функции a_n, A_n определены формулами

$$
a_n = \frac{1}{2}\left(\alpha \pm \sqrt{\beta^2 - 4b_n c_n}\right), \qquad A_n = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\Psi_n\Phi_n}\right).
$$

Уравнения (34) для (33) являются аналогом LA-пары (16) для уравнений ЦТ (8). Из (34) очевидно, что величины $\ln\Psi_n$ и $\ln\Phi_n$ удовлетворяют тем же уравнениям (33) с заменой $\alpha \to \alpha_1$, $\beta \to \beta_1$.

Наконец, используя преобразование Дарбу (13), можно вычислить соответствующую изоспектральную симметрию для (34). Ответ можно предсказать:

$$
b_n \to \Psi_n, \qquad c_n \to \Phi_n.
$$

Промежуточные уравнения $м_1^1ЦТ$ (то есть аналог уравнений Вольтерра для (33)) находится из приведенных выше соотношений для новых функций:

$$
\hat{\Psi}_n = \Psi_n - b_n, \ \hat{\Phi}_n = \Phi_n - c_n. \tag{35}
$$

LA-пара для уравнений $м_1^1ЦТ$ получается из (34) исключением Ψ_n и Φ_n с помощью (35). Роль волновых функций теперь играют b_n и c_n (возможно, с другими значениями α и β). Другими словами, описанный метод опять приводит к замкнутым одевающим цепочкам.

Двумеризованные уравнения мЦТ

Вся вышеописанная техника фактически без изменений переносится на двумеризованные уравнения ЦТ, которые порождаются уравнениями Дэви — Стюартсона (ДС):

$$\begin{aligned}
&iu_t + u_{xx} + \frac{1}{\alpha^2}u_{yy} - \frac{2}{\alpha^2}u^2 v + gu = 0,\\
&-iv_t + v_{xx} + \frac{1}{\alpha^2}v_{yy} - \frac{2}{\alpha^2}v^2 u + gv = 0,\\
&g_{yy} - \alpha^2 g_{xx} = -4(uv)_{xx}.
\end{aligned}\tag{36}$$

Здесь $\alpha^2 = \pm 1$. LA-«пара» для (36) записывается как система четырех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\psi_y = \alpha\psi_x + u\phi,\ \phi_y = -\alpha\phi_x + v\psi,\\
&\psi_t = 2i\psi_{xx} + \frac{2i}{\alpha}u\phi_x + \left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha}F_y + F_x\right] - \frac{i}{\alpha^2}uv\right)\psi + \frac{i}{\alpha^2}\left(\alpha u_x + u_y\right)\phi,\\
&\phi_t = -2i\phi_{xx} + \frac{2i}{\alpha}v\psi_x + \left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha}F_y - F_x\right] + \frac{i}{\alpha^2}uv\right)\phi + \frac{i}{\alpha^2}\left(\alpha v_x - v_y\right)\psi,
\end{aligned}\tag{37}$$

причем $g = -iF_x$.

Пусть две пары функций $\{\psi_1,\phi_1;\psi,\phi\}$ являются решениями (37) при некоторых фиксированных u, v и F. Элементарные преобразования Дарбу для уравнений ДС (аналог формул (11), (12)) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\psi \to \psi^{(1)} = -2\alpha\psi_x - u\phi + \left(2\alpha\psi_{1,x} + u\phi_1\right)\frac{\psi}{\psi_1},\ \phi \to \phi^{(1)} = \phi - \frac{\phi_1}{\psi_1}\psi,\\
&u \to u^{(1)} = \frac{u}{\psi_1}\left(2\alpha\psi_{1,x} + u\phi_1\right) - u_y - \alpha u_x,\ v \to v^{(1)} = \frac{\phi_1}{\psi_1},\\
&F \to F^{(1)} = F + 4i\frac{\psi_{1,x}}{\psi_1}
\end{aligned}\tag{38}$$

и

$$\begin{aligned}
&\phi \to^{(1)} \phi = 2\alpha\phi_x - v\psi - \left(2\alpha\phi_{1,x} - v\psi_1\right)\frac{\phi}{\phi_1},\ \psi \to^{(1)} \psi = \psi - \frac{\psi_1}{\phi_1}\phi,\\
&v \to^{(1)} v = \frac{v}{\phi_1}\left(v\psi_1 - 2\alpha\phi_{1,x}\right) - v_y + \alpha v_x,\ u \to^{(1)} u = \frac{\psi_1}{\phi_1},\\
&F \to^{(1)} F = F + 4i\frac{\phi_{1,x}}{\phi_1}.
\end{aligned}\tag{39}$$

Специфика двумерья проявляется в том, что список дискретных симметрий оказывается богаче, чем в одномерном случае. Так, уравнения ДС допускают «сопряженную» к (37) LA-пару:

$$p_y = \alpha p_x - vf, \qquad f_y = -\alpha f_x - up,$$

$$p_t = -2ip_{xx} + \frac{2i}{\alpha} vf_x - \left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha} F_y + F_x\right] - \frac{i}{\alpha^2} uv\right)p + \frac{i}{\alpha^2}\left(\alpha v_x + v_y\right)f, \tag{40}$$

$$f_t = 2if_{xx} + \frac{2i}{\alpha} up_x - \left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha} F_y - F_x\right] + \frac{i}{\alpha^2} uv\right)f + \frac{i}{\alpha^2}\left(\alpha u_x - u_y\right)p.$$

Для удобства чтения формул обозначим волновые функции пары (40) латинскими буквами p, f (ψ, ϕ оставим для пары (37)), а преобразования Дарбу для (40) будем помечать нижними индексами в круглых скобках:

$$p \to p_{(1)} = 2\alpha p_x - vf - \left(2\alpha p_{1,x} - vf_1\right)\frac{p}{p_1}, \qquad f \to f_{(1)} = f - \frac{f_1}{p_1} p,$$

$$v \to v_{(1)} = \frac{v}{p_1}\left(vf_1 - 2\alpha p_{1,x}\right) + v_y + \alpha v_x, \qquad u \to u_{(1)} = \frac{f_1}{p_1}, \tag{41}$$

$$F \to F_{(1)} = F + 4i\frac{p_{1,x}}{p_1},$$

$$f \to_{(1)} f = -2\alpha f_x - up + \left(2\alpha f_{1,x} + up_1\right)\frac{f}{f_1}, \qquad p \to_{(1)} p = p - \frac{p_1}{f_1} f,$$

$$u \to_{(1)} u = \frac{u}{f_1}\left(up_1 + 2\alpha f_{1,x}\right) + u_y - \alpha u_x, \qquad v \to_{(1)} v = \frac{p_1}{f_1}, \tag{42}$$

$$F \to_{(1)} F = F + 4i\frac{f_{1,x}}{f_1}.$$

Преобразования Дарбу (38) – (39) индуцируют следующие законы преобразования решений системы (40):

$$p \to p^{(1)} = \frac{A + \Omega(\psi_1, \phi_1; p, f)}{\psi_1}, \qquad f \to f^{(1)} = 2\alpha f + \frac{u}{\psi_1}\left(A + \Omega(\psi_1, \phi_1; p, f)\right),$$

$$f \to^{(1)} f = \frac{A + \Omega(\psi_1, \phi_1; p, f)}{\phi_1}, \qquad p \to^{(1)} p = -2\alpha p + \frac{v}{\phi_1}\left(A + \Omega(\psi_1, \phi_1; p, f)\right), \tag{43}$$

где

$$\Omega(\psi, \phi; p, f) = \int d\Omega(\psi, \phi; p, f), \; d\Omega(\psi, \phi; p, f) = (\psi p + \phi f)dx + \alpha(\psi p - \phi f)dy +$$

$$+2i\left[\frac{1}{\alpha}\left(v\psi f + u\phi p\right) + p\psi_x - p_x\psi + f_x\phi - f\phi_x\right]dt,$$

A — произвольная постоянная, 1-форма $d\Omega(\psi,\phi;p,f)$ замкнута, если ψ, ϕ, p и f — решения (37), (40) с одинаковыми потенциалами u, v и F. Аналогичные формулы для $\psi_{(1)}$, $\phi_{(1)}$, ${}_{(1)}\psi$, ${}_{(1)}\phi$, индуцируемые преобразованиями (41) — (42), имеют вид

$$\psi \to \psi_{(1)} = \frac{A+\Omega(\psi,\phi;p_1,f_1)}{p_1},\ \phi \to \phi_{(1)} = -2\alpha\phi + \frac{v}{p_1}\left(A+\Omega(\psi,\phi;p_1,f_1)\right),$$
$$\phi \to_{(1)} \phi = \frac{A+\Omega(\psi,\phi;p_1,f_1)}{f_1},\ \psi \to_{(1)} \psi = 2\alpha\psi + \frac{u}{f_1}\left(A+\Omega(\psi,\phi;p_1,f_1)\right). \quad (44)$$

Используя (38), (39), (41) — (44), можно определить элементарные бинарные преобразования Дарбу, позволяющие вычислить потенциалы с двумя индексами — верхним и нижним. Например:

$$u^{(1)}_{(1)} = {}^{(1)}_{(1)}u = \frac{1}{{}_{(1)}v^{(1)}} = u + \frac{2\alpha f_1\psi_1}{A+\Omega_1}, \qquad v^{(1)}_{(1)} = {}^{(1)}_{(1)}v = \frac{1}{{}^{(1)}u_{(1)}} = v - \frac{2\alpha p_1\phi_1}{A+\Omega_1}, \quad (45)$$

где $\Omega_1 = \Omega(\psi_1,\phi_1;p_1,f_1)$. Мы не будем выписывать формулы для соответствующих этим потенциалам преобразованных волновых функций.

Замечание. Пара линейных уравнений для ψ_y, ϕ_y (37) (или для p_y, f_y (40)) может быть записана как одно линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. При наложении на потенциалы u, v редукций определенного вида можно получить такие известные уравнения, как уравнение Лапласа — Мутара [15] или уравнение Гурса [16]. Последнее появляется, если положить

$$v = \pm\, u. \quad (46)$$

Обычные преобразования Дарбу не сохраняют редукционное ограничение (46), в то время как элементарные бинарные преобразования (45) позволяют легко это сделать редукцией

$$p = \psi, \qquad f = \mp\phi,$$

которая, очевидно, совместна с (37), (40). В результате получаем хорошо известный аналог преобразования Мутара для уравнения Гурса [17; 20] как результат двух последовательных элементарных преобразований Дарбу. Аналогично можно получить и само преобразование Мутара. Отметим, что это преобразование оказалось полезно для построения точных решений уравнений Веселова — Новикова [1; 18]. Уравнение же Гурса генерирует иерархию D = 2 мКдФ, поэтому преобразования (45), совместные с (46), можно использовать для нахождения точных решений уравнений этой иерархии.

Уравнения ДС (36) допускают преобразования Шлезингера [7; 19]

$$
\begin{aligned}
&u_n \to u_{n+1} = u_n\left(u_n v_n + \alpha^2(\ln u_n)_{xx} - (\ln u_n)_{yy}\right),\ v_n \to v_{n+1} = \frac{1}{u_n},\\
&g_n \to g_{n+1} = g_n + 4(\ln u_n)_{xx}\\
&u_n \to u_{n-1} = \frac{1}{v_n},\ v_n \to v_{n-1} = v_n\left(u_n v_n + \alpha^2(\ln v_n)_{xx} - (\ln v_n)_{yy}\right),\\
&g_n \to g_{n-1} = g_n + 4(\ln v_n)_{xx},
\end{aligned}
\tag{47}
$$

откуда немедленно следуют уравнения двумеризованной цепочки Тоды

$$\alpha^2 q_{n,xx} - q_{n,yy} = e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n - q_{n-1}},\ q_n = \ln(u_n). \tag{48}$$

Используя (48) и (36), находим симметрии уравнений (48) (ср. с (23)):

$$-iq_{n,t} = 2q_{n,xx} + q_{n,x}^2 + \frac{1}{\alpha^2}q_{n,y}^2 - \frac{1}{\alpha^2}\left(e^{q_{n+1}-q_n} + e^{q_n-q_{n-1}}\right) + g_n,$$

причем g_n может быть формально выражено в виде

$$g_n(x,y,t) = \tilde{g}_n(x,y) + 4\int_{-\infty}^{\infty} dx'dy' G(x',y';x,y)\left(e^{q_n-q_{n-1}}\right)_{x'x'},$$

где $G(x',y';x,y)$ — функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\left(\partial_y^2 - \alpha^2\partial_x^2\right)G(x',y';x,y) = -\delta(x-x')\delta(y-y'),$$

а $\tilde{g}_n$ — решение этого уравнения с нулевой правой частью.

Схема нахождения LA-пары, преобразования Дарбу и одевающей цепочки дискретных симметрий для (48) ничем не отличается от схемы, рассмотренной во втором разделе. Так, используя пары (37), (40) и формулы (47), находим две «сопряженные» LA-пары для (48):

$$
\begin{aligned}
&\psi_{n,y} = \alpha\psi_{n,x} + e^{q_n-q_{n-1}}\psi_{n-1},\\
&\psi_{n+1} = 2\alpha\psi_{n,x} - (\alpha q_{n,x} + q_{n,y})\psi_n + e^{q_n-q_{n-1}}\psi_{n-1}
\end{aligned}
\tag{49}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&f_{n,y} = -\alpha f_{n,x} - e^{q_n-q_{n-1}}f_{n-1},\\
&f_{n+1} = 2\alpha f_{n,x} + (q_{n,y} - \alpha q_{n,x})f_n + e^{q_n-q_{n-1}}f_{n-1}.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Используя преобразования Дарбу (38)—(39) и (41)—(42), легко получить соответствующие формулы для (49) и (50). Ответ полностью совпадает с R- и L-преобразованиями (14)—(15), причем это верно как для пары (49), так и для пары (50). Последнее утверждение очевидно, так как пара (50) может быть получена из (49) заменой

$$\alpha \to -\alpha, \qquad \psi_{n+k} \to f_{n+k} = (-1)^k\psi_{n+k}.$$

Выбирая, для определенности, пару (49), находим двумеризованные уравнения Вольтерра (ср. с (17))

$$\xi_{n,XY} = \xi_{n,X}\left(e^{\xi_n - \xi_{n+1}} - e^{\xi_{n-1} - \xi_n}\right), \tag{51}$$

где

$$\partial_X = \partial_y + \alpha\partial_x, \qquad \partial_Y = \partial_y - \alpha\partial_x, \qquad \xi_{n,X} = \frac{\psi_{1,n+1}}{\psi_{1,n}},$$

$\psi_{1,n}$ — некоторое частное решение уравнений (49). Отметим, что, вводя новые зависимые переменные a_n и b_n по формулам

$$a_n = \xi_{n,X}, \qquad b_n = e^{\xi_n - \xi_{n+1}},$$

можно записать (51) в более привычном виде:

$$\left(\ln a_n\right)_Y = b_n - b_{n-1}, \ \left(\ln b_n\right)_X = a_n - a_{n+1}. \tag{52}$$

Использование (50) приведет к уравнениям, калибровочно эквивалентным (51), которые мы не будем вычислять.

Наконец, выпишем одевающие цепочки дискретных симметрий. Выбирая, для определенности, пару (49) и R-преобразование (14) (оно получается из формул (38)), находим

$$e^{\zeta_n - \zeta_{n+1}}\zeta_{n,X} = e^{\xi_n - \xi_{n+1}}\xi_{n+1,X}, \qquad \left(\zeta_n - \xi_n\right)_Y = e^{\zeta_{n-1} - \zeta_n} - e^{\xi_n - \xi_{n+1}}, \tag{53}$$

где величина ζ_n определена так же, как во втором разделе.

Цепочки (53) являются двумерным аналогом цепочек (18). Кроме того, используя бинарные преобразования Дарбу, можно построить одевающие цепочки второго рода. Обозначая (см. (43))

$$\eta_{n,Y} = \frac{f_{n+1}^{(1)}}{f_n^{(1)}},$$

получаем

$$e^{\eta_{n+1} - \eta_n}\eta_{n,Y} = e^{\xi_n - \xi_{n+1}}\xi_{n+1,X}, \ \left(\eta_{n,X} - e^{\eta_n - \eta_{n-1}}\right)_Y = \left(e^{\xi_n - \xi_{n+1}} - \xi_{n,Y}\right)_X. \tag{54}$$

Исключая из (54) функции ξ_n, находим соответствующее нелинейное уравнение для функций η_n, а сами цепочки (54) могут рассматриваться как LA-пара для этого уравнения.

Заключение

Перечислим основные результаты работы.

1. Построены одевающие цепочки для уравнений Тоды с помощью изоспектральных симметрий НУШ.

2. Показано, что одевающие цепочки для уравнений ЦТ замкнуты.

3. Предложен способ построения уравнений $м_к^n ЦТ$ и рассмотрен конкретный пример уравнения, принадлежащего этому семейству, вместе с его LA-парой (формулы (33) — (34)).

4. Построены одевающие цепочки первого и второго рода для двумеризованных уравнений Тоды.

В работе [11] рассматривалась аналогичная задача. Вместо традиционной системы Захарова — Шабата (3) использовалось одно уравнение второго порядка

$$\Psi_{xx} + (z - 2i\lambda)\Psi_x + p\Psi = 0, \tag{55}$$

к которому легко сводится (3), если

$$z = -(\ln u)_x, \qquad p = uv, \qquad \Psi = e^{i\lambda x}\psi.$$

Изоспектральные симметрии, которые применялись в [11], совпадают с преобразованиями Шлезингера (6) (в [11] эти преобразования обозначены буквой T) и преобразованиями Дарбу (12) (в [11] это S-преобразования). Согласно доказанной в [11] лемме, преобразованиями S и T исчерпываются дискретные изоспектральные симметрии вида $\Psi \to f\Psi_x + g\Psi$ с коэффициентами f и g, не зависящими от спектрального параметра λ. Очевидно, что преобразования (4) — (5) и (11) не удовлетворяют этому условию. Можно показать, что они связаны с преобразованиями T^{-1} и S^{-1}. В случае (4) — (5) это очевидно. Несколько более тонким является вопрос о связи S^{-1} и (11), поэтому остановимся на нем подробнее.

Если непосредственно применить формулы (12), то получается S-преобразование для уравнения (55)

$$\Psi \to^{(1)} \Psi = \Psi - \frac{\Psi_x}{\Psi_{1,x}}\Psi_1, \tag{56}$$

где Ψ_1 — решение (55) с $\lambda = \lambda_1$.

Действуя по схеме, предложенной в [11], найдем обратное преобразование. Дифференцируя (56) и исключая из этих двух уравнений Ψ_x, получим Ψ в виде

$$\Psi = \Psi\left({}^{(1)}\Psi, {}^{(1)}\Psi_x; \Psi_1, \Psi_{1,x}\right). \tag{57}$$

Это еще не окончательный результат, поскольку обращение формулы (56) подразумевает, что правая часть (57) будет выражаться только через «одетые» величины с верхним левым индексом (1). Для того чтобы привести (57) к такому виду, введем линейно независимое с Ψ решение, которое обозначим «шляпкой» — $\hat{\Psi}$. При этом общее решение (55) при фиксированном λ будет линейной комбинацией Ψ и $\hat{\Psi}$ с произвольными постоянными коэффициентами. Функцию $\hat{\Psi}$ легко найти по стандартной схеме (умножить (55) на $\hat{\Psi}$; умножить уравнение для $\hat{\Psi}$ на Ψ; вычесть и проинтегрировать). Найденную $\hat{\Psi}_1$ (для $\lambda = \lambda_1$) можно одеть по формуле (56) (такой «окольный» способ понадобился, чтобы обойти результат ${}^{(1)}\Psi_1 = 0$, получаемый непосредственно из (57)):

$$\hat{\Psi}_1 \to {}^{(1)}\hat{\Psi}_1.$$

Дифференцируем эту формулу, выражаем Ψ_1 и $\Psi_{1,x}$ через ${}^{(1)}\hat{\Psi}_1$ и ${}^{(1)}\hat{\Psi}_{1,x}$, после чего подставляем в (57). Теперь можно убедиться, что (57) калибровочно эквивалентна (11). Пусть ψ и ϕ — решения (3). Нужные нам линейно независимые функции имеют вид

$$\hat{\psi}(x) = \frac{1}{2}\psi(x)\int dz\, sgn(x-z)\frac{u(z)}{\psi^2(z)}, \qquad \hat{\phi}(x) = \frac{1}{2}\phi(x)\int dz\, sgn(x-z)\frac{u(z)}{\psi^2(z)} - \frac{i}{\psi}.$$

«Одевая» эти выражения по формулам (12) и подставляя $\lambda = \lambda_1$, $\psi = \psi_1$, $\phi = \phi_1$, имеем

$${}^{(1)}\hat{\psi}_1 = \frac{i}{\phi_1}, \qquad {}^{(1)}\hat{\phi}_1 = -\frac{iv}{\phi_1}.$$

Наконец, подставляя найденные функции в (11), получаем

$${}^{(1)}u \to -u, \qquad {}^{(1)}v \to -v,$$

что и требовалось показать.

Принятая в [11] калибровка (55) удобна для изучения условий замыкания соответствующих цепочек и построения потенциалов, инвариантных относительно композиций преобразований *S* и *T*. Нашей же целью было построение одевающих цепочек в духе работы [13]. По нашему мнению, результаты, описанные во втором разделе, показывают, что для этой цели удобнее стандартная симметричная калибровка Захарова — Шабата.

В заключение отметим, что наличие богатого списка дискретных симметрий двумерной задачи Захарова — Шабата делает естественной попытку обощения результатов работы [11] на двумерные потенциалы. Авторы надеются вернуться к этому вопросу в дальнейших публикациях.

Список литературы

1. *Matveev V.B., Salle M.A.* Darboux Transformations and Solitons. Berlin ; Heidelberg, 1991.

2. *Yurov A.V., Yurov V.A.* The Landau-Lifshitz Equation, the NLS, and the Magnetic Rogue Wave as a By-Product of Two Colliding Regular «Positons» // Symmetry. 2018. Vol. 10, iss. 4, 82. arXiv: 1701.04903.

3. *Свинолупов С.И., Ямилов Р.И.* Явные автопреобразования для многополевых уравнений Шрёдингера и йордановы обобщения цепочки Тоды // Теоретическая и математическая физика. 1994. Т. 98, №2. С. 207—219.

4. *Адлер В.Э., Шабат А.Б.* Об одном классе цепочек Тоды // Теоретическая и математическая физика. 1997. Т. 111, №3. С. 323—334.

5. *Levi D.* Nonlinear Differential Difference Equations as Bäcklund Transformations // J. Phys. A: Math. Gen. 1981. Vol. 14, iss. 5. P. 1083—1098.

6. *Шабат А.Б., Ямилов Р.И.* Симметрии нелинейных цепочек // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, вып. 2. С. 183—208.

7. *Leznov A.N., Shabat A.B., Yamilov R.I.* Canonical Transformations Generated by Shifts in Nonlinear Lattices // Phys. Lett. A. 1993. Vol. 174, iss. 5—6. P. 397—402.

8. *Ямилов Р.И.* Классификация дискретных эволюционных уравнений // Успехи математических наук. 1983. Т. 38, вып. 6. С. 155—156.

9. *Адлер В.Э., Шабат А.Б.* Обобщенные преобразования Лежандра // Теоретическая и математическая физика. 1997. Т. 112, №2. С. 179—194.

10. *Адлер В.Э., Шабат А.Б.* Первые интегралы обобщенных цепочек Тоды // Теоретическая и математическая физика. 1998. Т. 115, №3. С. 349—357.

11. *Шабат А.Б.* Третий вариант метода одевания // Теоретическая и математическая физика. 1999. Т. 121, №1. С. 165—176.

12. *Юров А.В.* Сопряженные цепочки дискретных симметрий (1 + 2) нелинейных уравнений // Теоретическая и математическая физика. 1999. Т. 119, №3. С. 419—428.

13. *Борисов А.Б., Зыков С.А.* Одевающая цепочка дискретных симметрий и размножение нелинейных уравнений // Теоретическая и математическая физика. 1998. Т. 115, №2. С. 199—214.

14. *Leble S.B., Ustinov N.V.* Deep Reductions for Matrix Lax System, Invariant Forms and Elementary Darboux Transforms // J. Phys. A: Math. Gen. 1993. Vol. 26, iss. 19. P. 5007—5016.

15. *Moutard T.* Sur la construction des équations de la forme 1 z∂ 2z∂ x∂ y= λ (x, y) qui admettenent une intégrale générale explicit // J. Ecole Polytechnique. 1878. №45. P. 1—11.

16. *Goursat É.* Sur une équation aux dérivées partielles // Bull. Soc. Math. France. 1897. Vol. 25. P. 36—48.

17. *Ganzha E.* On One Analogue of the Moutard Transformation for the Goursat Equation // Theor. Math. Phys. 1999. Vol. 122, iss. 1. P. 39—45.

18. *Athorne C., Nimmo J.J.C.* On the Moutard Transformation for Integrable Partial Differential Equations // Inverse Problems. 1991. Vol. 7, iss. 5. P. 809—826.

19. *Юров А.В.* Преобразование Бэклунда — Шлезингера для уравнений Дэви — Стюартсона // Теоретическая и математическая физика. 1996. Т. 109, №3. С. 338—346.

20. *Yurov V.A., Yurov A.V.* The Cauchy Problem for the Generalized Hyperbolic Novikov — Veselov Equation. 2015. arXiv:1509.06078 [nlin. SI].

Об авторах

Артем Валерьянович Юров — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: AIUrov@kantiana.ru

Алла Александровна Юрова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта; Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: AIUrova@kantiana.ru

Роман Викторович Чириков — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.
E-mail: RCHirikov1@kantiana.ru

The authors

Prof. Artyom V. Yurov, I. Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: AIUrov@kantiana.ru

Dr Alla A. Yurova, PhD, Associate Professor, I. Kant Baltic Federal University; State Technical University, Russia.
E-mail: AIUrova@kantiana.ru

Roman V. Chirikov, PhD Student, I. Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: RCHirikov1@kantiana.ru