

**Н. Л. Великанов, В. А. Наумов, С. И. Корягин**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ  
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ДИСПЕРСНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ  
БЛИЗКОЙ ПЛОТНОСТИ**

72

*Рассмотрены методики и алгоритмы расчета характеристик гидромеханических процессов при течении вязкой жидкости (воды) с дисперсными включениями близкой плотности. В частности, исследованы зависимости безразмерной интенсивности диссипации пульсационной энергии от инерционности включений при различной нагрузке. Представлены результаты решения краевой численным методом в среде Mathcad. Получено, что интенсивность диссипации пульсационной энергии несущей среды прямо пропорциональна отношению распределенной плотности дисперсной и несущей фаз и зависит от инерционности включений, характеризующейся безразмерной величиной.*

*The authors consider the methods and algorithms for calculating the characteristics of hydro-mechanical processes in the flow of viscous liquid (water) with dispersed inclusions of close density. In particular, the dependences of the dimensionless intensity of the pulsation energy dissipation on the inertness of inclusions at different loads are investigated. The paper presents the results of the solution by the boundary numerical method in Mathcad. It is found that the intensity of the pulsation energy dissipation of the carrier medium is directly proportional to the ratio of the distributed density of the dispersed phase and the carrier phase depends on the inertia of the inclusions, characterized by a dimensionless value.*

**Ключевые слова:** дисперсные включения, вязкая жидкость, турбулентное течение, кривая сопротивления.

**Keywords:** dispersed inclusions, viscous liquid, turbulent flow, resistance curve.

Для повышения энергетической эффективности систем гидротранспорта широко используется математическое моделирование (см. [1–4] и библиографию в них). В данной статье рассматривается математическая модель течения вязкой жидкости (воды) с дисперсными включениями близкой плотности, например, при гидротранспорте рыбы [5].

Известный подход к описанию движения сплошной среды, называемый эйлеровым, заключается в изучении скоростей (температур и др.) в неподвижных точках области течения.

В [6; 7] с помощью пространственного осреднения получена система уравнений двухфазной среды:



1) уравнения сохранения массы (неразрывности) несущей и дисперсной фаз:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \vec{V}_f) = -J, \quad \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_p \vec{V}_p) = J, \quad (1)$$

где  $\alpha_k$  — доли объема смеси, занимаемые каждой фазой  $\alpha_k = \rho_k / \rho_k^0$ ;  $\rho_k^0, \rho_k$  — истинная и распределенная плотности  $k$ -й фазы соответственно;  $J$  — интенсивность перехода массы из несущей фазы в дисперсную (например, при испарении капель  $J < 0$ , при конденсации  $J > 0$ );

2) уравнения движения несущей и дисперсной фаз в проекции на  $i$ -ю ось:

$$\rho_f \left( \frac{\partial V_{fi}}{\partial t} + \sum_j V_{fj} \frac{\partial V_{fi}}{\partial X_j} \right) = -\alpha_f \frac{\partial p}{\partial X_i} + \sum_j \frac{\partial \tau_{fji}}{\partial X_j} - (P_i + J(V_{fpi} - V_{fi})) + \rho_f g_i, \quad (2)$$

$$\rho_p \left( \frac{\partial V_{pi}}{\partial t} + \sum_j V_{pj} \frac{\partial V_{pi}}{\partial X_j} \right) = -\alpha_p \frac{\partial p}{\partial X_i} + \sum_j \frac{\partial \tau_{pij}}{\partial X_j} + (P_i + J(V_{fpi} - V_{pi})) + \rho_p g_i, \quad (3)$$

где  $V_{fpi}$  — проекция на  $i$ -ю ось скорости движения межфазной границы;  $\tau_{fji}, \tau_{pij}$  — составляющие тензоров напряжения в несущей и дисперсной фазах;  $P_i$  — сила межфазного взаимодействия, отнесенная к единице объема смеси;  $g_i$  — составляющая объемной (массовой) силы.

При течении дисперсных смесей полагают  $V_{fpi} = V_{pi}$  объемную долю дисперсной фазы считают малой и в бесстолкновительной дисперсной смеси пренебрегают первым и вторым слагаемыми в правой части уравнения (3).

При отсутствии фазовых переходов в уравнениях (1)–(3)  $J=0$ . Уравнения неразрывности при несжимаемой несущей среде примут следующий вид:

$$\text{div } \vec{V}_f = 0, \quad \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \text{div} (\rho_p \vec{V}_p) = 0. \quad (4)$$

Сила межфазного взаимодействия рассчитывается как произведение силы, действующей на единичную частицу, на величину  $n$ . Счетная концентрация частиц выражается через объемную долю дисперсной фазы и объем частицы  $\Theta_1$ :

$$n = \frac{\alpha_p}{\Theta_1} = \frac{\rho_p / \rho_p^0}{\pi \delta^3 / 6}. \quad (5)$$

В открытых источниках стандартную кривую сопротивления чаще всего представляют следующими зависимостями [8]:

$$C_R^0 = \begin{cases} \frac{24}{\text{Re}} (1 + 0,15 \text{Re}^{0,687}) & \text{при } \text{Re} < 1000 \\ 0,44 & \text{при } 1000 \leq \text{Re} < 2 \cdot 10^5 \end{cases}. \quad (6)$$



Тогда основная составляющая силы межфазного взаимодействия — сила гидродинамического сопротивления — для  $Re_p < 1000$  может быть вычислена по формуле [9]

$$\vec{P}_\mu = 0,5C_R \frac{\pi\delta^2}{4} \rho_g^o (\vec{V}_f - \vec{V}_p) |\vec{V}_f - \vec{V}_p| \frac{6\rho_p}{\pi\delta^3\rho_p^o} = \beta f(Re_p) \vec{V}_R \rho_p, \quad (7)$$

$$\beta = 18\rho_f^o \nu / (\delta^2 \rho_p^o),$$

где  $\delta$  — размер включения;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости.

Аналогичным образом вычисляются и другие составляющие силы межфазного взаимодействия [10].

Уравнения движения упрощаются до следующего вида:

$$\rho_f \left( \frac{\partial V_{fi}}{\partial t} + \sum_j V_{fj} \frac{\partial V_{fi}}{\partial X_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial X_i} + \sum_j \frac{\partial \tau_{fij}}{\partial X_j} - \rho_p F_i + \rho_f g_i, \quad (8)$$

$$\rho_p \left( \frac{\partial V_{pi}}{\partial t} + \sum_j V_{pj} \frac{\partial V_{pi}}{\partial X_j} \right) = \rho_p F_i + \rho_p g_i. \quad (9)$$

При указанных допущениях левую и правую части уравнения (9) можно разделить на распределенную плотность дисперсной фазы. То есть в указанной постановке данное уравнение не зависит от концентрации частиц.

Если объемная доля дисперсной примеси мала, то полагают, что тензор касательных напряжений в несущей среде определяется как в [11]:

$$\tau_f = 2\mu S - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial r} (V_f E_1), \quad (10)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_{fi}}{\partial X_j} + \frac{\partial V_{fj}}{\partial X_i} \right), \quad (11)$$

где  $E_1$  — единичный тензор;  $S$  — тензор скоростей деформации жидкого элемента.

Система уравнений (4), (8), (9) может быть непосредственно использована для описания ламинарных двухфазных течений. Для турбулентных потоков, как и в однородных течениях, с помощью процедуры Рейнольдса получают осредненные по времени уравнения. Для этого заменим в исходных уравнениях актуальные значения величин на сумму средних и пульсационных и осредним по времени. Осредненные по времени уравнения неразрывности каждой из фаз:

$$\sum_j \frac{\partial \overline{V_{fj}}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial \overline{\rho_p}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \overline{\rho_p V_{pj}}}{\partial x_j} = -\sum_j \frac{\partial \overline{\rho_p' V_{pj}'}}{\partial x_j}. \quad (12)$$

Осредненное по времени уравнение движения несжимаемой несущей среды:

$$\rho_f \left[ \frac{\partial \overline{V_{fi}}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial X_j} (\overline{V_{fj} V_{fi}} - \overline{V_{fj}' V_{fi}'}) \right] = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial X_i} + \sum_j \frac{\partial \overline{\tau_{fij}}}{\partial X_j} - (\overline{\rho_p} F_i + \overline{\rho_p' F_i}). \quad (13)$$



Осредненное по времени уравнение движения дисперсной фазы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho_p V'_{pi}} + \overline{\rho'_p V'_{pi}}) + \sum_j \frac{\partial}{\partial X_j}(\overline{\rho_p V'_{pi} V'_{pj}} + \overline{\rho'_p V'_{pi} V'_{pj}} + \\ + \overline{\rho'_p V'_{pj} V'_{pi}} + \overline{\rho_p V'_{pi} V'_{pj}} + \overline{\rho'_p V'_{pi} V'_{pj}}) = \overline{\rho_p F_i} + \overline{\rho'_p F'_i}. \end{aligned} \quad (14)$$

Одной из важнейших проблем теоретического исследования турбулентных течений является представление в уравнениях Рейнольдса (12)–(14) корреляционных моментов, описывающих перенос массы и импульса в пульсационном движении.

Из системы актуальных и осредненных уравнений турбулентного двухфазного течения можно получить уравнения переноса для вторых моментов, фигурирующих в последней системе (12)–(14) [7]. При этом из-за нелинейности исходных уравнений эти уравнения переноса будут содержать третьи моменты пульсационных величин. Эта цепочка может быть продолжена до бесконечности. В настоящее время, как правило, ограничиваются уравнениями для вторых моментов скоростей, представляя остальные корреляции с помощью алгебраических соотношений.

Проекция уравнения движения несжимаемой несущей среды на  $i$ -ю ось координат при наличии фазовых переходов:

$$\rho_f \left( \frac{\partial V_{fi}}{\partial t} + \sum_j V_{fj} \frac{\partial V_{fi}}{\partial X_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial X_i} + \sum_j \frac{\partial \tau_{fij}}{\partial X_j} - [\rho_p F_i + J(V_{pi} - V_{fi})]. \quad (15)$$

Заменим в уравнении (15) актуальные значения величин на сумму средних и пульсационных и осредним его по времени:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_f \left( \frac{\partial \bar{V}_{fi}}{\partial t} + \sum_j (\bar{V}_{fj} \frac{\partial \bar{V}_{fi}}{\partial X_j} + \overline{V'_{fj} \frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j}}) \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial X_i} + \sum_j \frac{\partial \bar{\tau}_{fij}}{\partial X_j} - \\ - \sum_{s=1}^N [\bar{\rho}_p \bar{F}_i + \overline{\rho'_p F'_i} + \bar{J}(\bar{V}_{fpi} - \bar{V}_{fi}) + \overline{J'(V'_{fpsi} - V'_{fi})}]. \end{aligned} \quad (16)$$

Вычитая (16) из (15), получим уравнение для пульсационной скорости газа:

$$\begin{aligned} \rho_f \left( \frac{\partial V'_{fi}}{\partial t} + \sum_j (V'_{fj} \frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j} + V'_{fj} \frac{\partial \bar{V}_{fi}}{\partial X_j} + \bar{V}_{fj} \frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j} + V'_{fj} \frac{\partial \overline{V'_{fi}}}{\partial X_j}) \right) = -\frac{\partial p'}{\partial X_i} + \\ + \sum_j \frac{\partial \tau'_{fij}}{\partial X_j} - [\rho'_p F'_i + \rho'_p \bar{F}_i + \overline{\rho_p F_i} - \overline{\rho'_p F'_i} + J'(V'_{fpi} - V'_{fi}) + \\ + \bar{J}(V'_{fpi} - V'_{fi}) + J'(\bar{V}_{fpi} - \bar{V}_{fi}) - \overline{J'(V'_{fpsi} - V'_{fi})}]. \end{aligned} \quad (17)$$



Умножим уравнение (17) на  $V'_{fk}$  и осредним по времени:

$$\begin{aligned} & \overline{\rho_f \left( \frac{\partial}{\partial t} \overline{V'_{fi} V'_{fi}} + \sum_j \overline{(V'_{fk} V'_{fj})} \frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j} + \overline{V'_{fk} V'_{fj}} \frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j} + \overline{V'_{fj} V'_{fk}} \frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j} + \right.} \\ & \left. + V'_{fi} \frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j} \right) \left( \sum_j \overline{(V'_{fk} V'_{fj})} \frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j} + \overline{V'_{fk} V'_{fj}} \frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j} + \overline{V'_{fj} V'_{fk}} \frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j} + \overline{V'_{fi} \frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j}} \right)} = \\ & = -\overline{V'_{fk} \frac{\partial p'}{\partial X_i}} + \sum_j \overline{V'_{fk} \frac{\partial \tau'_{fij}}{\partial X_j}} - [\overline{\rho'_p V'_{fk} F'_i} + \overline{\rho'_p V'_{fk} F'_i} + \overline{\rho'_p V'_{fk} F'_i} + \\ & + \overline{V'_{fk} J' (V'_{fpi} - V'_{fi})} + \overline{J' V'_{fk} (V'_{fpi} - V'_{fi})} + \overline{V'_{fk} J' (V'_{fpi} - V'_{fi})}]. \end{aligned} \quad (18)$$

Если в (18) индексы  $i, k$  поменять местами и сложить с уравнением (18), то получится уравнение для реинльдсовых напряжений несущей среды:

$$\begin{aligned} & \overline{\rho_f \left[ \frac{\partial}{\partial t} \overline{V'_{fk} V'_{fi}} + \sum_j \overline{(V'_{fk} V'_{fj})} \frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j} + \overline{V'_{fi} V'_{fj}} \frac{\partial V'_{fk}}{\partial X_j} + \overline{V'_{fk} V'_{fj}} \frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j} + \overline{V'_{fj} V'_{fk}} \frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j} + \right.} \\ & \left. + \overline{V'_{fi} \frac{\partial}{\partial X_j}} + \overline{V'_{fk} V'_{fi}} \right]} = -\overline{V'_{fk} \frac{\partial p'}{\partial X_i}} - \overline{V'_{fi} \frac{\partial p'}{\partial X_k}} + \sum_j \overline{(V'_{fk} \frac{\partial \tau'_{fij}}{\partial X_j} + V'_{fi} \frac{\partial \tau'_{fjk}}{\partial X_j})} - \\ & - (\overline{\rho'_p V'_{fk} F'_i} + \overline{\rho'_p V'_{fi} F'_k} + \overline{\rho'_p (F'_i V'_{fk} + F'_k V'_{fi})} + \overline{\rho'_p V'_{fk} F'_i} + \overline{\rho'_p V'_{fi} F'_k} + \\ & + \overline{V'_{fk} J' (V'_{fpi} - V'_{fi})} + \overline{V'_{fi} J' (V'_{fjk} - V'_{fk})} + \overline{J' (V'_{fk} (V'_{fpi} - V'_{fi}) + V'_{fi} (V'_{fjk} - V'_{fk}))} + \\ & + \overline{V'_{fi} J' (V'_{fpk} - V'_{fk})} + \overline{V'_{fk} J' (V'_{fpi} - V'_{fi})}). \end{aligned} \quad (19)$$

В уравнении (19) положим  $i = k$  и просуммируем по  $i$ . Тогда получится уравнение переноса кинетической энергии турбулентных пульсаций несущей среды при двухфазном течении:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial k}{\partial t} + \sum_j \overline{V'_{fj}} \frac{\partial k}{\partial X_j} = \sum_j \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ v \frac{\partial k}{\partial X_j} - \overline{V'_{fi} \left( \frac{1}{2} \sum_i V'^2_{fi} + \frac{p'}{\rho_f} \right)} \right] - \\ & - \sum_{i,j} \overline{V'_{fj} V'_{fi}} \frac{\partial \overline{V'_{fi}}}{\partial X_j} - \varepsilon - \varepsilon_p - \varepsilon_{f'} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\varepsilon = v \sum_{i,j} \overline{\frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j} \frac{\partial V'_{fi}}{\partial X_j}} \quad (21)$$

$$\varepsilon_p = \frac{1}{\rho_f} \sum_{s,i} [\overline{\rho'_p V'_{fi} F'_i} + \overline{\rho'_p F'_i V'_{fi}} + \overline{\rho'_p V'_{fi} F'_i}], \quad (22)$$

$$\varepsilon_{f'} = \frac{1}{\rho_f} \sum_{s,i} [\overline{V'_{fi} J' (V'_{fpi} - V'_{fi})} + \overline{J' V'_{fi} (V'_{fpi} - V'_{fi})} + \overline{V'_{fi} J' (V'_{fpi} - V'_{fi})}]. \quad (23)$$



Отличие (20) от классического уравнения переноса кинетической энергии турбулентных пульсаций, полученного академиком А. Н. Колмогоровым, в двух последних слагаемых. Они обусловлены межфазным обменом импульсом (22) и массой (23).

Корреляции, связанные с несущей средой, находят так же, как и в однофазном течении, по известным гипотезам А. Н. Колмогорова. Тензор турбулентных напряжений в несущей среде:

$$-\overline{V'_{fi}V'_{fj}} = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{V_{fi}}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V_{fj}}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij},$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\nu_t$  – кинематический коэффициент турбулентной вязкости.

Диффузионный член и интенсивность диссипации (рассеивания) в уравнении переноса пульсационной энергии:

$$-V'_{fj} \left( \frac{1}{2} \sum_j V'^2_{fj} + \frac{p'}{\rho_f} \right) = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial X_j},$$

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{\ell_t},$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} = C_\mu \ell_t \sqrt{k},$$

где  $C_D = 1$ ;  $C_\mu = 0,09$ ;  $\sigma_k = 1$  – эмпирические константы;  $\ell_t$  – макромасштаб турбулентности.

В ( $k$ - $\varepsilon$ )-модели турбулентности для  $\varepsilon$  записывается и решается свое уравнение переноса. В однопараметрической  $k$ -модели турбулентности [7] макромасштаб  $\ell_t$  вычисляется по эмпирической формуле. Для пристенных течений  $\ell_t = C_{\ell 1} y$ , где  $y$  – расстояние от стенки. Для осесимметричных струйных течений  $\ell_t = C_{\ell 2} R_{1/2}$ , где  $R_{1/2}$  – расстояние от оси струи, на котором продольная скорость уменьшается до половины осевой, а  $C_{\ell 1}, C_{\ell 2}$  – эмпирические константы.

Если плотности несущей среды и дисперсных включений близки, то осредненные скорости фаз можно считать одинаковыми, различаться будут только пульсационные составляющие. В этом случае [12]

$$\frac{dV'_{pi}}{dt} = \beta V'_{Ri} = \beta(V'_{fi} - V'_{pi}). \quad (24)$$

Для уравнения (24) получим

$$V'_{pi}(t) = V'_{pi}(0) \exp(-\beta t) + \beta \int_0^t \exp(-\beta(t-t_1)) V'_{fi}[r_p(t_1), t_1] dt_1, \quad (25)$$

где  $V'_{fi}[r_p(t_1), t_1]$  – пульсационная скорость несущей среды вдоль траектории движения частицы.



Формулу (22), пренебрегая тройной корреляцией (первое слагаемое), преобразуем, используя выражение для силы гидродинамического сопротивления:

$$\varepsilon_p = \frac{\beta}{\rho_f} \sum_i [\overline{p_p} (\overline{V_{fi}^2} - \overline{V'_{fi} V'_{pi}}) + \overline{p'_p} V'_{fi} (\overline{V'_{fi}} - \overline{V'_{pi}})]. \quad (26)$$

При близкой плотности фаз, например, в гидротранспорте рыбы, осредненные скорости фаз практически одинаковы и вторым слагаемым в квадратных скобках формулы (26) можно пренебречь.

Чтобы получить корреляцию, воспользуемся следующей процедурой [7]. Умножим обе части равенства (25) на  $V'_{fi}(t)$ , осредним по Рейнольдсу:

$$\overline{V'_{pi}(t)V'_{fi}(t)} = \overline{V'_{fi}(t)V'_{pi}(0)}e^{-\beta t} + \beta \int_0^t e^{-\beta(t-t_1)} \overline{V'_{fi}(t)V'_{fi}(t_1)} dt_1. \quad (27)$$

При большом времени  $t$  первое слагаемое в правой части (27) обращается в нуль, поэтому, перейдя к новой переменной  $\theta = t - t_1$ , можно записать

$$\overline{V'_{pi} V'_{fi}} = \beta \int_0^\infty e^{-\beta \theta} \overline{V'_{fi}(t)V'_{fi}(t+\theta)} d\theta. \quad (28)$$

Для распределения Эйлера

$$R_{Ei}(\theta) \equiv \overline{V'_{fi}(t)V'_{fi}(t+\theta)} / [\overline{V'_{fi}(t)}]^2. \quad (29)$$

При простейшей аппроксимации  $R_{Ei}(\theta)$  ступенчатой функцией [7]

$$R_{Ei}(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \leq \theta_{Ei} \\ 0, & \theta > \theta_{Ei} \end{cases} \quad (30)$$

для стационарного однородного потока ( $\overline{V_{fi}^2}(t) \approx const$ ). Подставляя (29) в (28), после интегрирования получим

$$\overline{V'_{pi} V'_{fi}} = \wp_i \overline{V_{fi}^2}, \quad \wp_i = 1 - \exp(-\beta \theta_{Ei}), \quad (31)$$

где  $\wp_i$  называют функцией вовлечения частицы в пульсационное движение несущей среды;  $\theta_{Ei}$  — время затухания пространственно-временной корреляции.

Полученную формулу (31) используем для преобразования (26):

$$\varepsilon_p = \beta \frac{\overline{p_p}}{\rho_f} \sum_i \overline{V_{fi}^2} (1 - \wp_i) = \beta \frac{\overline{p_p}}{\rho_f} \sum_i \overline{V_{fi}^2} \exp(-\beta \theta_{Ei}). \quad (32)$$

В стационарном однородном течении показатели затухания не должны зависеть от направления  $\theta_{Ei} = \theta_E$ , а сумма квадратов пульсационных скоростей равна удвоенной пульсационной энергии несущей среды  $k$ . Отсюда получается формула

$$\varepsilon_p = 2k \frac{\overline{p_p}}{\rho_f} \beta \exp(-\beta \theta_E). \quad (33)$$



Формулу (33) запишем в безразмерном виде:

$$\hat{\varepsilon}_p = \frac{\varepsilon_p \cdot \theta_E}{2k} = \lambda \cdot \tau \cdot \exp(-\tau), \quad \lambda = \frac{\bar{\rho}_p}{\rho_f}. \quad (34)$$

По рисунку 1 видно, что интенсивность диссипации пульсационной энергии несущей среды из-за взаимодействия с частицами  $\varepsilon_p$  прямо пропорциональна отношению распределенной плотности дисперсной и несущей фаз  $\lambda$  и зависит от инерционности включений, характеризующейся безразмерной величиной  $\tau = \beta\theta_E$ . Максимум  $\varepsilon_p$  достигается при  $\tau = 1$ . И при малоинерционных включениях ( $\tau \rightarrow \infty$ ), и при существенно инерционных ( $\tau \rightarrow 0$ ) величина  $\varepsilon_p \rightarrow 0$ .

79

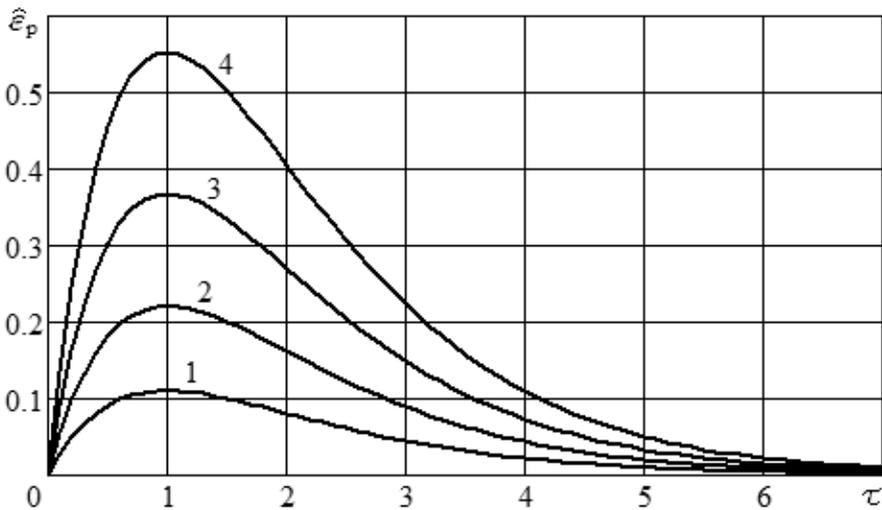


Рис. 1. Зависимость безразмерной интенсивности диссипации пульсационной энергии от инерционности включений при различной нагрузке:

1 –  $\lambda = 0,3$ ; 2 –  $\lambda = 0,6$ ; 3 –  $\lambda = 1,0$ ; 4 –  $\lambda = 1,5$

Строго говоря, формулы (33)–(34) справедливы для сферических частиц. Для включений другой формы необходимо учитывать изменение коэффициента гидродинамического сопротивления [3]. При этом количественные отличия могут быть существенными, но качественная картина явления (рис. 1) не изменится. Значительная нагрузка потока дисперсными включениями любой формы с плотностью, близкой к плотности несущей среды, вызовет рост величины  $\varepsilon_p$ , что должно привести к уменьшению турбулентной энергии. Значит, при определенных условиях может наблюдаться ламинаризация течения, что подтверждается экспериментальными данными по гидротранспорту рыбы [5].



## Список литературы

1. Панков А.О. Расчет процессов гидротранспорта неструктурных суспензий в гетерогенном и гомогенном режимах течения : дис. ... канд. техн. наук. Казань, 2007.
2. Приходченко С.Д. Анализ современных моделей гидротранспортных систем // Гірничя електромеханіка та автоматика : наук.-техн. зб. Дніпропетровськ, 2007. Вип. 78. С. 56–62.
3. Великанов Н.Л., Наумов В.А., Космодамианский А.С. Моделирование осаждения твердых частиц в пульпопроводе // Наука и техника транспорта. 2011. №2. С. 69–78.
4. Великанов Н.Л., Наумов В.А., Примак Л.В. Осаждение частиц взвесей в воде // Механизация строительства. 2013. №7. С. 44–48.
5. Фонарев А.Л. Повышение эффективности средств гидромеханизации в промышленном рыболовстве. М., 1986.
6. Нугматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М., 1978.
7. Shraiber A.A., Gavin L.B., Naumov V.A., Yatsenko V.P. Turbulent Flows in Gas Suspensions. N. Y., 1990.
8. Crowe C.T., Sommerfeld M., Tsuji Y. Flows with Droplets and Particles. Florida, 1998.
9. Наумов В.А. Динамика дисперсной частицы в вязкой среде // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, №5. С. 27–36.
10. Наумов В.А. Влияние подъемной силы Сафмэна на движение частицы в слое Куэтта // Инженерно-физический журнал. 1995. Т. 68, №5. С. 840–844.
11. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., 1987.
12. Великанов Н.Л., Наумов В.А., Корягин С.И. Расчет коэффициента диффузии твердых примесей в водотоках // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2017. №2. С. 75–81.

## Об авторах

Николай Леонидович Великанов — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: monolit8@yandex.ru

Владимир Аркадьевич Наумов — д-р техн. наук, проф., Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: van-old@rambler.ru

Сергей Иванович Корягин — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru

## The authors

Prof. Nikolay L. Velikanov, I. Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: monolit8@yandex.ru

Prof. Vladimir A. Naumov, Kaliningrad State Technical University, Russia.

E-mail: van-old@rambler.ru

Prof. Sergey I. Koryagin, I. Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru