УДК 514.76

М. Б. Банару
Смоленский государственный университет
mihail.banaru@yahoo.com
SPIN-код: 1392-5918, Authors ID РИНЦ: 128852
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-2

О почти контактной метрической структуре на вполне омбилической гиперповерхности почти эрмитова многообразия

На всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура. Получены структурные уравнения такой почти контактной метрической структуры для случая, когда гиперповерхность является вполне омбилическим подмногообразием почти эрмитова многообразия.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, почти эрмитово многообразие, вполне омбилическая гиперповерхность, структурные уравнения

1. С середины XX в. известно, что на ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура. На начальном этапе работами по этой тематике выделялись в основном японские геометры С. Ишихара, С. Сасаки, Й. Таширо, Й. Хатакеяма и Х. Янамото. Позже в этой области стали работать десятки математиков из разных стран, среди которых следует особо отметить отечественного специалиста Лидию Васильевну Степанову. Под руководством замечательного геометра В. Ф. Ки-

Поступила в редакцию 28.03.2026 г.
© Банару М. Б., 2026

риченко она получила ряд очень интересных и важных результатов, связанных с почти контактными метрическими гиперповерхностями почти эрмитовых многообразий [1].

Несомненно, основным результатом Л. В. Степановой в области контактной геометрии гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий являются структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры, индуцированной на произвольной ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия. Эти структурные уравнения позволили Л. В. Степановой, а затем и другим геометрам получить множество фактов о различных видах почти контактных метрических структур (косимплектической, слабо косимплектической, кенмоцевой, сасакиевой, квазисасакиевой) на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий, принадлежащих различным классам Грея — Хервеллы. Отметим, что вывод этих общих структурных уравнений крайне сложен и очень громоздок (он был сделан «вручную», без использования компьютера). Насколько нам известно, существенно усовершенствовать эти выкладки пока никому не удалось. В обзоре [2] В. Ф. Кириченко и М. Б. Банару содержится описание этого вывода с некоторыми упрощениями.

В настоящей статье структурные уравнения, полученные Л. В. Степановой, детализируются для такого важного случая, когда гиперповерхность с почти контактной метрической структурой является вполне омбилическим подмногообразием почти эрмитова многообразия. Автору статьи не раз приходилось выводить подобные структурные уравнения (в том числе в работах, написанных совместно с Л. В. Степановой, А. Абу-Салимом и Г. А. Банару [3—6]), но эти структурные уравнения были получены лишь для частных случаев, например для почти контактных метрических структур на вполне омбилических гиперповерхностях многообразий, принадлежащих определенному классу почти эрмитовых многообразий.

2. Известно (см.: [7]), что почти контактной метрической структурой на нечетномерном многообразии N^{2n-1} называет-

ся система из четырех тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ на этом многообразии, для которой выполняются следующие условия:

$$\eta(\xi) = 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \aleph(N^{2n-1}).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N^{2n-1})$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N^{2n-1}.

Также известно (см.: [7]), что почти эрмитовой структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, \ g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом почти комплексная структура и риманова метрика должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется *почти эрмитовым* (almost Hermitian, AH-) многообразием.

Отметим, что структурные уравнения почти контактной метрической структуры рассматриваются записанными в репере, адаптированном к соответствующей структуре (А-репере). Конструкция А-репера и его применение к исследованию почти эрмитовых и почти контактных метрических структур разработаны В. Ф. Кириченко [7; 8].

3. Приведем наш основной результат.

Теорема. *Первая группа структурных уравнений Картана почти контактной метрической структуры на ориентируемой вполне омбилической гиперповерхности произвольного почти эрмитова многообразия имеет следующий вид*:

$$d\,\omega^{\alpha} = \omega_{\beta}^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} + B^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\omega^{\gamma} \wedge \omega_{\beta} + B^{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta} \wedge \omega_{\gamma} +$$

$$+ \left(\sqrt{2}B^{\alpha n}{}_{\beta} + i\lambda\delta_{\beta}^{\alpha}\right)\omega^{\beta} \wedge \omega +$$

$$+(-\sqrt{2}\tilde{B}^{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_{n} - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}^{\alpha\beta n})\omega_\beta \wedge \omega;$$

$$d\,\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\omega_\gamma \wedge \omega^\beta + B_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma +$$

$$+ \left(\sqrt{2}B_{\alpha n}{}^{\beta} - i\lambda\,\delta_\alpha^\beta\right)\omega_\beta \wedge \omega + \qquad (1)$$

$$+(-\sqrt{2}\tilde{B}_{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{\alpha\beta n} - \frac{1}{\sqrt{2}} B_{\alpha\beta}{}^{n})\omega^\beta \wedge \omega;$$

$$d\,\omega = \sqrt{2}B_{n\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \sqrt{2}B^{n\alpha\beta}\omega_\alpha \wedge \omega_\beta +$$

$$+ \left(\sqrt{2}B^{n\alpha}{}_{\beta} - \sqrt{2}B_{n\beta}{}^{\alpha} - 2i\,\lambda\,\delta_\beta^\alpha\right)\omega^\beta \wedge \omega_\alpha +$$

$$+ \left(\tilde{B}_{n\beta n} + B_{n\beta}{}^{n}\right)\omega \wedge \omega^\beta + \left(\tilde{B}^{n\beta n} + B^{n\beta}{}_{n}\right)\omega \wedge \omega_\beta,$$

где

$$B^{ab}{}_{c} = -\frac{i}{2}J^{a}_{\hat{b},c}, \quad B_{ab}{}^{c} = \frac{i}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}};$$

$$B^{abc} = \frac{i}{2}J^{a}_{[\hat{b},\hat{c}]}, \quad B_{abc} = -\frac{i}{2}J^{\hat{a}}_{[b,c]};$$

$$\tilde{B}^{abc} = -\frac{i}{2}J^{a}_{\hat{b},\hat{c}}, \quad \tilde{B}_{abc} = \frac{i}{2}J^{\hat{a}}_{b,c}.$$

Здесь через $\{J^{j}_{k,m}\}$ обозначены компоненты ∇J; системы функций $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$ и $\{B^{ab}{}_{c}\}$, $\{B_{ab}{}^{c}\}$ служат компонентами тензоров Кириченко [9; 10] почти эрмитовой структуры на многообразии M^{2n}; через $\{\tilde{B}^{abc}\}$ и $\{\tilde{B}_{abc}\}$ обозначены компоненты так называемых модифицированных тензоров Кириченко (их ввела в рассмотрение и использовала Л. В. Степанова [1]). Также отметим, что

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n-1; \quad a, b, c = 1, \ldots, n; \quad \hat{a} = a + n;$$

λ — некоторая константа, связанная со второй квадратичной формой погружения гиперповерхности N^{2n-1} в почти эрмитово многообразие M^{2n}; $\{\omega^\alpha\}$, $\{\omega_\alpha\}$ — компоненты форм смещения ($\omega^n = \omega$); $\{\omega_j^k\}$ — компоненты форм римановой связности; $\omega_\alpha = \omega^{\hat{a}}$; δ_a^b — кронекерова дельта.

Обратим внимание на то, что уравнения (1) легко детализировать для случаев, когда рассматривается вполне омбилическая гиперповерхность многообразия, принадлежащего какому-либо конкретному классу Грея — Хервеллы почти эрмитовых многообразий. Условия принадлежности произвольного AH-многообразия определенному классу, записанные в терминах тензоров Кириченко, давно известны [9; 10]; например, A-многообразие является эрмитовым в том и только том случае, когда все компоненты структурных тензоров Кириченко $\{B^{abc}\}$ и $\{B_{abc}\}$ обращаются в нуль.

Естественным продолжением вывода уравнений (1) может быть получение первой группы структурных уравнений почти контактной метрической структуры, индуцированной на гиперповерхности AH-многообразия каждого из 16 классов Грея — Хервеллы. Как упоминалось выше, для некоторых случаев (пока для гиперповерхностей AH-многообразий самых простых и хорошо изученных классов — классов келеровых, приближенно келеровых, локально конформно келеровых многообразий) такие уравнения были уже получены ранее.

С учетом того что известен вид структурных уравнений для наиболее важных почти контактных метрических структур [1; 2; 7; 11], из уравнений (1) можно относительно несложно получить результаты либо о существовании, либо о несуществовании (что, понятно, проще) определенной почти контактной метрической структуры на вполне омбилической гиперповерхности AH-многообразия.

Автор выражает благодарность Лидии Васильевне Степановой за полезные замечания, которые были учтены при написании данной статьи.

Список литературы

1. *Степанова Л.В.* Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1995.

2. *Banaru M. B., Kirichenko V. F.* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds // J. Math. Sci (New York). 2015. Vol. 207, № 4. P. 513—537.

3. *Banaru M. B.* Two theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Journal of Harbin Institute of Technology (New Series). 2001. Vol. 8, № 1. P. 38—40.

4. *Abu-Saleem A., Banaru M. B., Banaru G. A.* A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-sphere // Изв. Академии наук Республики Молдова. Математика. 2017. № 3 (85). С. 107—114.

5. *Степанова Л. В., Банару Г. А., Банару М. Б.* О геометрии *QS*-гиперповерхностей келеровых многообразий // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 815—822.

6. *Банару М. Б., Банару Г. А.* О гиперповерхностях со структурой Кириченко — Ускорева в келеровых многообразиях // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 1715—1721.

7. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

8. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных структур // Итоги науки и техн. Пробл. геом. 1986. Т. 18. С. 25—71.

9. *Банару М. Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1993.

10. *Banaru M.* On the Gray — Hervella classes of *AH*-structures on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra // Annuaire de l'Université de Sofia "St. Kliment Ohridski". Faculté de Mathématiques et Informatique. 2004. Vol. 95. P. 125—131.

11. *Банару Г. А.* О несуществовании структуры Кенмоцу на *acm*-гиперповерхностях косимплектического типа келерова многообразия // ДГМФ. 2019. Вып. 50. С. 23—28.

Для цитирования: *Банару М. Б.* О почти контактной метрической структуре на вполне омбилической гиперповерхности почти эрмитова многообразия // ДГМФ. 2026. № 57 (2). С. 11—18. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-2.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010:53B35, 53B25

M. B. Banaru
Smolensk State University
4 Przhevalskogo Str., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-2

On the almost contact metric structure on a totally umbilical hypersurface of an almost Hermitian manifold

Submitted on March 28, 2026

Since the middle of the last century, it has been known that an almost contact metric structure is induced on every orientable hypersurface of an almost Hermitian manifold. More than thirty years ago, L. V. Stepanova derived the Cartan structural equations for the almost contact metric structure induced on an arbitrary orientable hypersurface of an almost Hermitian manifold. These structure equations allowed L. V. Stepanova, and subsequently other geometers, to obtain numerous important results on various types of almost contact metric structures (cosymplectic, nearly cosymplectic, Kenmotsu, Sasakian, quasi-Sasakian, Kirichenko — Uskorev) on hypersurfaces of almost Hermitian manifolds belonging to certain Gray — Hervella classes.

In the present note, the structure equations obtained by L. V. Stepanova are detailed for the important case when a hypersurface with an almost contact metric structure is a totally umbilical submanifold of an almost Hermitian manifold.

Some problems in the geometry of almost contact metric hypersurfaces of almost Hermitian manifolds are formulated. These problems can be solved using the structural equations obtained in this paper.

Keywords: almost contact metric structure, almost Hermitian manifold, totally umbilical hypersurface, structure equations

Referenses

1. *Stepanova, L. V.*: Contact geometry of hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds. PhD Thesis. Moscow (1995).

2. *Banaru, M. B., Kirichenko, V. F.*: Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. J. Math. Sci. (New York), **207**:4, 513—537 (2015).

3. *Banaru, M. B.*: Two theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Journal of Harbin Institute of Technology (New Series), **8**:1, 38—40 (2001).

4. *Abu-Saleem, A., Banaru, M. B., Banaru, G. A.*: A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-sphere. Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, **3**:85, 107—114 (2017).

5. *Stepanova, L. V., Banaru, G. A., Banaru, M. B.*: On geometry of QS-hypersurfaces of Kählerian manifolds. Sib. Elektron. Mat. Izv., 15, 815—822 (2018).

6. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.*: On hypersurfaces with Kirichenko — Uskorev structure in Kählerian manifolds. Sib. Elektron. Mat. Izv., 17, 1715—1721 (2020).

7. *Kirichenko, V. F.*: Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

8. *Kirichenko, V. F.*: Methods of generalized Hermitian geometry in the theory of almost contact manifolds. J. Soviet Math., **42**:5, 1885—1919 (1988).

9. *Banaru, M. B.*: Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. PhD Thesis. Moscow (1993).

10. *Banaru, M.*: On the Gray — Hervella classes of *AH*-structures on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Annuaire de l'Université de Sofia "St. Kliment Ohridski". Faculté de Mathématiques et Informatique, 95, 125—131 (2004).

11. *Banaru, G. A.*: On nonexistence of Kenmotsu structure on *acm*-hypersurfaces of cosymplectic type of a Kählerian manifold. DGMF, 50, 23—28 (2019).

For citation: Banaru, M. B.: On the almost contact metric structure on a totally umbilical hypersurface of an almost Hermitian manifold. DGMF, **57**:2, 11—18 (2026). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-2.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)