ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I4 1983

УДК 514.75

Б. А к м а т о в

КЛАССИФИКАЦИЯ (f,ξ,η,ρ)-СТРУКТУР,ИНДУЦИРОВАННЫХ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА В МНОГООБРАЗИИ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРЫ M_n

Н.Д.Поляков провел классификацию $(f\xi\eta\rho)$-структур на дифференцируемом многообразии M_n [2].

В настоящей работе рассматриваются распределения m-мерных линейных элементов $(m>2)$ коразмерности два Λ^2 в многообразии почти комплексной структуры M_n, оснащенные полем двумерных нормалей ν ,и проводится классификация структур,индуцированных на распределении Λ^2 исходными структурами.

В основу классификации положено взаимное расположение элемента распределения Λ_x и его образа $F\Lambda_x$ (где F -аффинор почти комплексной структуры),а также расположение нормали ν_x относительно образа $F\Lambda_x$ и образа $F\nu_x$ самой нормали в каждой точке.

Как известно,в многообразии почти комплексной структуры на распределении линейных элементов Λ ,оснащенном полем нормалей,естественным образом индуцируется $(f\xi\eta\rho)$-структура [1] со структурными объектами $(f^i_j,\xi^i_\alpha,\eta^\beta_j,\rho^\beta_\alpha)$, удовлетворяющими конечным соотношением

$$\begin{gathered} f^i_k f^k_j = -\delta^i_j + \xi^i_\alpha \eta^\alpha_j, \\ f^i_k \xi^k_\alpha = -\rho^\beta_\alpha \xi^i_\beta , \quad f^i_k \eta^\alpha_i = -\rho^\alpha_\beta \eta^\beta_k, \qquad (1) \\ \rho^\alpha_\gamma \rho^\gamma_\beta = -\delta^\alpha_\beta + \xi^k_\beta \eta^\alpha_k \end{gathered}$$

и известными дифференциальными уравнениями.

Будем предполагать,что индексы пробегают следующие значения: $i,j,k,\ldots = 1,2,\ldots,m$; $\alpha,\beta,\gamma,\ldots = n-1,n$.

Если выполняются условия:

1/ $\Lambda_x \cap F\Lambda_x = \lambda_x$, $\dim \lambda_x = 2m-n$,

2/ $\nu_x \cap F\nu_x = \{x\}$, 3/ $\nu_x \cap F\Lambda_x = \{x\}$,

то индуцированная структура является $(f\xi\eta\rho)$ -структурой общего типа.

Положив в основу классификации взаимное расположение Λ_x и $F\Lambda_x$ для распределения Λ^2, вводим следующие три класса:

Класс I. $\Lambda_x \cap F\Lambda_x = \{x\}$. (2)

Этот класс возможен, когда коразмерность элементов больше или равна их размерности, т.е. $n-m \geqslant n$.

Класс II. $0 < \dim(\Lambda_x \cap F\Lambda_x) = \dim \lambda_x < m$. (3)

Для распределения элементов коразмерности два в этом случае $\dim \lambda_x = 2m-n = m-2$. Условия (3) эквивалентны условию

$$\operatorname{rang} \| \eta^{\alpha}_{i} \| = 2 \qquad (4)$$

Класс III.

$$\dim(\Lambda_x \cap F\Lambda_x) = m. \qquad (5)$$

Это F -инвариантное распределение элементов коразмерности два. Условия (5) эквивалентны условию

$$\operatorname{rang} \| \eta^{\alpha}_{i} \| = 0. \qquad (6)$$

Перейдем к рассмотрению классов II и III.

Класс II.

а/ Пусть $\nu_x \cap F\nu_x = \{x\}$. Из этого следует, что

$$\operatorname{rang} \| \xi^{i}_{\alpha} \| = 2 \qquad (7)$$

Из равенств (6) и (7) следует, что подпространства ξ_x и η_x в каждом элементе на распределении Λ^2 определяют π-структуру [2].

Рассмотрим три подслучая: I. Пусть $\nu_x \cap F\Lambda_x = \{x\}$. Это условие эквивалентно условию $\operatorname{rang} \| \rho^{\alpha}_{\beta} \| = 2$. На основании теоремы ранга и коранга $(f\xi\eta\rho)$-структуры (см. Н.М.Остиану и Н.Д.Поляков [1], [2]) получим $\operatorname{rang} \| f^{i}_{j} \| = m$. В этом случае на распределении Λ^2 естественным образом возникает $(f\xi\eta\rho)$ -структура рода $(m, 2, m-2, 2)$. Компоненты структурных объектов

удовлетворяют конечным соотношениям (1). (Понятие рода $(f\xi\eta\rho)$ -структуры введено Н.Д.Поляковым [2]).

2. Пусть $\nu_x \cap F\Lambda_x = S_x$; $\dim S_x = 1$. Проведем канонизацию репера так, чтобы вектор $\vec{\nu}_{n-1}$ совпадал с направляющим вектором пересечения $\nu_x \cap F\Lambda_x$. Из этого следует, что $\vec{\nu}_{n-1} \in \Lambda_x$, следовательно,

$$\rho^{\alpha}_{n-1} = 0, \qquad (8)$$

и ρ^{n}_{n} -абсолютный инвариант. При выполнении (8) конечные соотношения (1) упростятся. В этом случае матрица $\| \rho^{\alpha}_{\beta} \|$ имеет следующий вид: $\| \rho^{n-1}_{n} \ \rho^{n}_{n} \|$. Здесь возможны два подслучая: 1/ $\rho^{n}_{n} \neq 0$, 2/ $\rho^{n}_{n} = 0$, $\rho^{n-1}_{n} \neq 0$. При $\rho^{n}_{n} \neq 0$ репер можно канонизировать так, чтобы $\rho^{n-1}_{n} = 0$. В этом случае $\operatorname{rang} \| f^{i}_{j} \| = m-1$, и, следовательно, $\operatorname{rang} \| \rho^{\alpha}_{\beta} \| = 1$. Индуцированная структура будет $(f\xi\eta\rho)$ -структурой рода $(m-1, 2, m-2, 1)$. При $\rho^{n}_{n} = 0$ ρ^{n-1}_{n} становится абсолютным инвариантом. В предположении $\rho^{n-1}_{n} \neq 0$, на распределении Λ^2 возникает другая $(f\xi\eta\rho)$ -структура того же рода.

3. Пусть $\nu_x \cap F\Lambda_x = S_x$, $\dim S_x = 2$ (т.е. $\nu_x \in F\Lambda_x$). Из разложения

$$F\vec{\nu}_{\alpha} = -\xi^{\kappa}_{\alpha} \vec{\Lambda}_{\kappa} + \rho^{\beta}_{\alpha} \vec{\nu}_{\beta} \qquad (9)$$

следует, что

$$\rho^{\alpha}_{\beta} = 0.$$

Так как $\operatorname{rang} \| \rho^{\alpha}_{\beta} \| = 0$, то $\operatorname{rang} \| f^{i}_{j} \| = m-2$, т.е. индуцированная структура является $(f\xi\eta\rho)$ -структурой рода $(m-2, 2, m-2, 0)$.

в/ $\nu_x \cap F\nu_x = q_x$, $\dim q_x = 1$. Такой случай в многообразии почти комплексной структуры невозможен.

с/ $\nu_x \cap F\nu_x = q_x$, $\dim q_x = 2$. В этом случае $\operatorname{rang} \| \xi^{i}_{\alpha} \| = 0$. При условии с/ имеет место лишь подслучай: 1. $\nu_x \cap F\Lambda_x = \{x\}$, и, следовательно, индуцированная структура является $(f\xi\eta\rho)$ -структурой рода $(m, 0, m-2, 2)$. Подслучаи 2 и 3 невозможны.

З а м е ч а н и е 1. $(f\xi\eta\rho)$ -структуры класса IIа и в классификации Н.Д.Полякова [2] относятся к классу A_1 и соответствуют строке № 2 таблицы 1. $(f\xi\eta\rho)$ -структура класса IIс по классификации Н.Д.Полякова относится к классу A_2. Класс III. $\dim(\Lambda_x \cap F\Lambda_x) = m$ (т.е. $\Lambda_x \equiv F\Lambda_x$). В этом случае $\eta^{\alpha}_{i} = 0$. а). $\nu_x \cap F\nu_x = \{x\}$.

Следовательно, $rang\,\|\xi^i_\alpha\| = 2$, и на распределении Λ^2 возникает $(f\xi\eta\rho)$ - структура рода $(m,2,m,2)$.

в/ $\mathcal{V}_x \cap F\mathcal{V}_x = S_x$, $\dim S_x = 1$.

Такой случай в классе III невозможен.

с/ $\mathcal{V}_x \cap F\mathcal{V}_x = S_x$, $\dim S_x = 2$, т.е. $(\mathcal{V}_x \equiv F\mathcal{V}_x)$.

Это условие эквивалентно равенству $\xi^i_\alpha = 0$. В этом случае на распределении Λ^2 возникает $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(m,0,m,2)$, т.е. почти комплексная структура.

З а м е ч а н и е 2. $(f\xi\eta\rho)$-структура класса IIIa в классификации Н.Д.Полякова [2] относится к классу A_2, а класса IIIc к классу A_1 и соответствует строке 1 таблицы 1.

Имеют место следующие предложения:

П р е д л о ж е н и е 1. На распределении элементов коразмерности два Λ^2 в многообразии почти комплексной структуры M_n, в случае, когда элемент Λ_x пересекается образом $F\Lambda_x$ по минимально возможной размерности при всевозможных оснащениях распределения Λ^2 полями двумерных нормалей, индуцируются $(f\xi\eta\rho)$-структуры следующих родов: $(m,2,m-2,2)$, $(m-1,2,m-2,1)$, $(m-2,2,m-2,0)$, $(m,0,m-2,2)$ и только такие.

П р е д л о ж е н и е 2. На распределении элементов коразмерности два в многообразии почти комплексной структуры M_n, в случае, когда элемент Λ_x совпадает с образом $F\Lambda_x$, при различном оснащении распределения Λ^2 полями двумерных нормалей индуцируются $(f\xi\eta\rho)$-структуры следующих родов: $(m,2,m,2)$, $(m,0,m,2)$ и только такие.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемых многообразиях.- В сб.: Проблемы геом. Т.7. Итоги науки и техн. М., 1975, с.5-22.

2. Поляков Н.Д. Классификация $(f\xi\eta\rho)$-структур.- В сб.: Проблемы геометрии .Т.14. Итоги науки и техн. .М., 1982, с.57-72.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.14 1983

УДК 514.75

Б.А.А н д р е е в

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ И ГИПОХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ f

Продолжается изучение локального дифференцируемого отображения f [4],[5] точечного (проективного или аффинного) пространства P_N в пространство $R(p,q)$ неинцидентных пар (p,q), состоящих из точки p и невырожденной гиперквадрики q проективного пространства P_n, причем $N = rang(p,q)$ [1] и $rang\, f = N$ в каждой точке области определения. Введены понятия характеристических, собственно характеристических и гипохарактеристических направлений, являющиеся обобщениями понятия характеристических направлений теории точечных отображений [3].

Получены различные геометрические характеристики введенных понятий. В статье используются обозначения, принятые в работах [4],[5].

Пусть P° -произвольная точка области определения отображения f, $(p^\circ,q^\circ) = f(P^\circ)$, i -отображение, которое паре (p,q) ставит в соответствие индуцируемую ею пару нуль-пару (p,π), $(p^\circ,\pi^\circ) = i(p^\circ,q^\circ)$, $F = (i\circ f)^{-1}(p^\circ,\pi^\circ)$, а $\mathfrak{F}$ -многообразие невырожденных гиперквадрик q, относительно которых элементы пары (p°,π°) находятся в полярном соответствии. Имеем: $P^\circ \in F$, $\dim F = \dim \mathfrak{F} = N - 2n \stackrel{d}{=} \bar{N}$.

Пусть h -многообразие пар (p,q), для которых C-образы [5, стр.7] $C(q)$ гиперквадрик q совпадают с гиперквадрикой q°, а $\mathcal{H} = f^{-1}(h)$. Имеем: $P^\circ \in \mathcal{H}$, $\dim \mathcal{H} = 2n$, и многообразия F и $\mathcal{H}$ трансверсальны в P°. Обозначим касательные подпространства к F и $\mathcal{H}$ в P° соответственно L и H. Поместим вершины R_α $(\alpha,\ldots = \overline{1,\bar{N}})$ и $R_{\hat{\alpha}}$ $(\hat{\alpha},\ldots = \overline{\bar{N}+1,N})$ подвижного репера пространства P_N