ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

В.М.Овчинников

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ ПОЛУКВАДРАТИЧНЫХ ПАР ФИГУР

В статье [1] частично исследовались геометрические образы, ассоциированные с полуквадратичным многообразием $V_{k,n}$ пар фигур $\{F_1, F_2\}$, где F_1 – квадратичный элемент, а F_2 не инцидентная ему точка. В данной работе исследуются дополнительные геометрические образы в полярно канонизированном репере [2].

§1. Система дифференциальных уравнений многообразия полуквадратичных пар фигур

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим k-мерное многообразие $V_{k,n}$ полуквадратичных пар фигур $\{F_1, F_2\}$, где F_1 – квадратичный элемент, а F_2 – не инцидентная ему точка. Расположим $(n-k)$ вершин A_a $(a,b=k+1,\dots,n)$ репера $\{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\}$ в характеристическом [2] подпространстве, а k вершин $A_{\hat a}$ $(\hat a,\hat b=1,2,\dots,k)$ в его полярном относительно квадратичного элемента подпространстве. Вершину A_{n+1} совместим с точкой F_2. Формы Пфаффа $\omega_\mathcal{J}^\mathcal{K}$ удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\mathcal{J}^\mathcal{K} = \omega_\mathcal{J}^\mathcal{L}\wedge\omega_\mathcal{L}^\mathcal{K}, \quad (\mathcal{J},\mathcal{K}=1,2,\dots,n+1).$$

Пространство главных параметров обозначим через $\mathfrak{M}_k[1]$. Вводим на $\mathfrak{M}_k$ систему форм $\theta^{\hat a}$, которая является вполне интегрируемой и удовлетворяет структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\theta^{\hat a} = \theta^{\hat b}\wedge\theta^{\hat a}_{\hat b}.$$

Выберем формы $\theta^{\hat a}$ за базисные. Система дифференциальных уравнений k-мерного многообразия полуквадратичных пар фигур $V_{k,n}$ примет вид:

$$\begin{gathered}
\theta_{\hat a\hat b} = P_{\hat a\hat b,\hat c}\,\theta^{\hat c}, \qquad \theta_{ab} = P_{ab,\hat c}\,\theta^{\hat c},\\
\omega_a^{\hat a} = C^{\hat a}_{a\hat b}\,\theta^{\hat b}, \quad \omega_a = 0, \quad \omega_{\hat a} = C_{\hat a\hat b}\,\theta^{\hat b},\\
\omega_{\hat a}^{b} = C^{b}_{\hat a\hat b}\,\theta^{\hat b}, \qquad \omega^\alpha = \Lambda^\alpha_{\hat b}\,\theta^{\hat b},
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где

$$\theta_{\alpha\beta} \equiv da_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta - a_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha + \frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\omega^\gamma_\gamma,$$

$$\det\|C_{\hat a\hat b}\| \neq 0, \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,\dots,n).$$

Имеем тождества

$$a^{\hat a\hat b}P_{\hat a\hat b,\hat c} + a^{ab}P_{ab,\hat c} \equiv 0. \tag{1.2}$$

где

$$a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}.$$

Считаем,что характеристическое и полярное подпространства не пересекаются,т.е.ранг матрицы

$$\operatorname{rang} \| a_{ab} \| = n - h. \qquad (1.3)$$

Продолжая систему дифференциальных уравнений (1.1) и тождества (1.2), получим

$$dP_{\hat a\hat e,\hat c} = P_{\hat a\hat e,\hat d}\,\theta^{\hat d}_{\hat c} + P_{\hat a\hat d,\hat c}\,\omega^{\hat d}_{\hat e} + P_{\hat d\hat e,\hat c}\,\omega^{\hat d}_{\hat a} - \frac{2}{n}P_{\hat a\hat e,\hat c}\,\omega^{\gamma}_{\gamma} + P_{\hat a\hat e,\hat c\hat d}\,\theta^{\hat d},$$

$$dP_{ae,\hat c} = P_{ae,\hat \ell}\,\theta^{\hat \ell}_{\hat c} + P_{ac,\hat c}\,\omega^{c}_{e} + P_{ce,\hat c}\,\omega^{c}_{a} - \frac{2}{n}P_{ae,\hat c}\,\omega^{\gamma}_{\gamma} + P_{ae,\hat c\hat \ell}\,\theta^{\hat \ell},$$

$$dc^{\hat a}_{a\hat e} = c^{\hat a}_{a\hat \ell}\,\theta^{\hat \ell}_{\hat e} + c^{\hat a}_{\ell\hat e}\,\omega^{\ell}_{a} - c^{\hat c}_{a\hat e}\,\omega^{\hat a}_{\hat c} + c^{\hat a}_{a\hat e,\hat \ell}\,\theta^{\hat \ell},$$

$$dc_{\hat a\hat e} = c_{\hat a\hat \ell}\,\theta^{\hat \ell}_{\hat e} + c_{\hat \ell\hat e}\,\omega^{\hat \ell}_{\hat a} - c_{\hat a\hat e}\,\omega^{n+1}_{n+1} + c_{\hat a\hat e,\hat \ell}\,\theta^{\hat \ell},$$

$$dc^{e}_{\hat a\hat e} = c^{e}_{\hat a\hat \ell}\,\theta^{\hat \ell}_{\hat e} + c^{e}_{\hat \ell\hat e}\,\omega^{\hat \ell}_{\hat a} - c^{c}_{\hat a\hat e}\,\omega^{e}_{c} + c^{e}_{\hat a\hat e,\hat \ell}\,\theta^{\hat \ell},$$

$$a^{\hat a\hat e}P_{\hat a\hat e,\hat c\hat \ell} + a^{ae}P_{ae,\hat c\hat \ell} - a^{ae}_{\hat c}P_{ae,\hat \ell} - a^{\hat a\hat e}_{\hat c}P_{\hat a\hat e,\hat \ell} \equiv 0.$$

§ 2 . Геометрические образы многообразия $V_{h,n}$

Зададим однопараметрическое семейство (I-семейство) полуквадратичных пар фигур $V_{h,n}$ системой

$$\theta^{\hat a} = x^{\hat a}\,\Omega, \quad D\Omega = 0, \qquad (2.1)$$

где

$$dx^{\hat a} + x^{\hat e}\,\theta^{\hat a}_{\hat e} = x^{\hat a}_{\hat e}\,\theta^{\hat e}. \qquad (2.2)$$

Всякому I-семейству (2.1) в пространстве Π_{h-1} соответствует точка

$$X = x^{\hat a} M_{\hat a} \qquad (2.3)$$

относительно некоторого проективного репера $\{M_1, \dots, M_h\}$.

Рассмотрим в полярном подпространстве точку

$$C = a^{\hat a} A_{\hat a}. \qquad (2.4)$$

Получим

$$dC = (da^{\hat a} + a^{\hat e}\,\omega^{\hat a}_{\hat e})A_{\hat a} + a^{\hat a}\,\omega^{a}_{\hat a}A_a + a^{\hat a}\,\omega_{\hat a}A_{n+1}.$$

Точка

$$E = a^{\hat a} x^{\hat e}(c^{a}_{\hat a\hat e}A_a + c_{\hat a\hat e}A_{n+1}) \qquad (2.5)$$

принадлежит касательной к линии, описываемой точкой C.

Выделим теперь другое I-семейство многообразия $V_{h,n}$:

$$\theta^{\hat a} = y^{\hat a}\,\Omega^{*}, \quad D\Omega^{*} = 0, \qquad (2.6)$$

где

$$dy^{\hat a} + y^{\hat e}\,\theta^{\hat a}_{\hat e} = y^{\hat a}_{\hat e}\,\theta^{\hat e}.$$

Из уравнения (2.5) получим

$$dE = a^{\hat c} x^{\hat b} (c^{a}_{\hat c \hat b} \omega^{\hat a}_{a} + c_{\hat c \hat b} \omega^{\hat a}) A_{\hat a} + [d a^{\hat a} x^{\hat b} c^{a}_{\hat a \hat b} +$$

$$+ a^{\hat a} dx^{\hat b} c^{a}_{\hat a \hat b} + a^{\hat a} x^{\hat b} (c^{a}_{\hat a \hat l} \theta^{\hat l}_{\hat b} + c^{a}_{\hat l \hat b} \omega^{\hat l}_{\hat a} + c^{a}_{\hat a \hat b, \hat l} \theta^{\hat l} +$$

$$+ c_{\hat a \hat b} \omega^{a})] A_{a} + [dx^{a} x^{\hat b} c_{\hat a \hat b} + a^{\hat a} dx^{\hat b} c_{\hat a \hat b} +$$

$$+ a^{\hat a} x^{\hat b} (c_{\hat a \hat l} \theta^{\hat l}_{\hat b} + c_{\hat l \hat b} \omega^{\hat l}_{\hat a} + c_{\hat a \hat b, \hat l} \theta^{\hat l})] A_{n+1}. \qquad (2.7)$$

Используя значения (2.6), из уравнения (2.7) находим:

$$E^{*} = u^{* \hat c} A_{\hat c}, \qquad (2.8)$$

где

$$u^{* \hat c} = a^{\hat a} (c^{a}_{\hat a \hat b} c^{\hat c}_{a \hat d} + c_{\hat a \hat b} \Lambda^{\hat c}_{\hat d}) y^{\hat d} x^{\hat b}, \qquad (2.9)$$

является пересечением полярного подпространства с касательной, описываемой точкой E. Получили проективное преобразование (2.9) полярного подпространства в себя, которое в общем случае является невырожденным. Если проективное преобразование (2.9) будет преобразованием W [3], то совокупности I-семейств (2.6) в Π_{k-1} соответствует гиперплоскость

$$b_{\hat a \hat b} x^{\hat a} y^{\hat b} = 0, \qquad (2.10)$$

где

$$b_{\hat a \hat l} = c^{a}_{\hat a \hat d} c^{\hat d}_{a \hat l} + c_{\hat a \hat d} c^{\hat d}_{\hat l}. \qquad (2.11)$$

Выделим теперь некоторую точку в характеристическом подпространстве

$$P = a^{a} A_{a}. \qquad (2.12)$$

Тогда

$$dP = a^{a} \omega^{\hat a}_{a} A_{\hat a} + (d a^{a} + a^{b} \omega^{a}_{b}) A_{a}. \qquad (2.13)$$

Точка

$$P^{*} = a^{a} C^{\hat a}_{a b} x^{b} A_{\hat a}. \qquad (2.14)$$

является пересечением полярного подпространства с касательной к кривой, описанной точкой P.

Из

$$dP^{*} = a^{c} x^{\hat b} C^{\hat a}_{c \hat b} \omega^{a}_{\hat a} A_{a} + (d a^{a} C^{\hat a}_{a \hat b} x^{\hat b} + a^{a} d c^{\hat a}_{a \hat b} x^{\hat b} +$$

$$+ a^{a} C^{\hat a}_{a \hat b} dx^{\hat b} + a^{a} C^{\hat c}_{a b} x^{b} \omega^{\hat a}_{\hat c}) A_{\hat a} + a^{a} C^{\hat a}_{a \hat b} \omega_{\hat a} A_{n+1} \qquad (2.15)$$

с учетом систем (I.I) и (2.6) получаем, что точка

$$V^{*} = V^{a} A_{a}, \qquad (2.16)$$

где

$$V^{a} = a^{b} C^{\hat a}_{b \hat b} C^{a}_{\hat a \hat c} x^{\hat b} y^{\hat c} \qquad (2.17)$$

будет такой, что V^{*} является пересечением характеристического подпространства с касательной к кривой, описанной точкой P^{*}. Если проективные преобразования (2.17) являются преобразованиями W, то I-семейству (2.6) в проективном пространстве Π_{k-1} соответствует гиперплоскость

$$\tilde{b}_{\hat a \hat e}\, x^{\hat a} y^{\hat e} = 0, \qquad (2.18)$$

где

$$\tilde{b}_{\hat a \hat e} = c^{\hat e}_{a \hat a}\, c^{a}_{\hat e \hat e}.$$

Если гиперплоскости (2.10) и (2.18) совпадают, то в пространстве Π_{k-1} относительно тензора $b_{\hat a \hat e}$ существует основная гиперквадрика

$$b_{(\hat a \hat e)}\, x^{\hat a} x^{\hat e} = 0. \qquad (2.19)$$

Будет определен также и основной линейный гиперкомплекс пространства Π_{k-1}

$$b_{[\hat a \hat e]}\, x^{\hat a} y^{\hat e} = 0.$$

Главные точки $X_a(x^{\hat e}_{\hat a})$ [3] проективного пространства Π_{k-1} определяются из системы

$$\left[b_{[\hat a \hat e]}\, b^{(\hat e \hat c)} + \mu_{\hat c}\, \delta^{\hat c}_{\hat a}\right] x^{\hat a}_{\hat c} = 0,$$

где $\mu_{\hat c}$ – корень уравнения

$$\det \left\| b_{[\hat a \hat e]}\, b^{(\hat e \hat c)} + \mu\, \delta^{\hat c}_{\hat a} \right\| = 0,$$

причем

$$b^{\hat a \hat e} \cdot b_{(\hat e \hat c)} = \delta^{\hat a}_{\hat c} \cdot \det \left\| b_{(\hat e \hat c)} \right\|.$$

Список литературы

1. I. О в ч и н н и к о в В.М. Некоторые геометрические образы, ассоциированные с многообразием полуквадратичных пар фигур.–В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.5. Калининград, 1974, с.97–102.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Поля геометрических объектов на многообразии квадратичных элементов.–"Труды Томск. ун-та", вып.4, 1964, т.176, с.11–19.

3. И в л е в Е.Т., Исабеков М.Б. К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами.–В кн.: Материалы 3-й научной конференции по математике и механике. Вып.1. Изд.-во Томского ун-та, 1973, с.50–52.