ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

Х. А. Баймуратов

О ЧЕТЫРЕ-ТКАНИ, ПОРОЖДЕННОЙ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ НА ТРЕХМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В P_5

Известно, что трехмерная тангенциально невырожденная поверхность V_3 в пятимерном проективном пространстве P_5 несет четыре семейства асимптотических линий. Распределения, определяемые парами асимптотических направлений, называются асимптотическими. На поверхности V_3 всего 6 асимптотических распределений. Если четыре из этих распределений голономны, то соответствующие интегральные поверхности образуют на V_3 четыре-ткань [1]. Целью настоящей работы является изучение свойств такой ткани.

1. Присоединим к V_3 канонический репер, построенный в работе [2]. Тогда асимптотические формы имеют вид

$$\varphi^4=(\omega^2)^2-(\omega^3)^2, \quad \varphi^5=(\omega^1)^2-(\omega^3)^2.$$

Асимптотические распределения задаются инвариантными формами $\omega^1\pm\omega^2$, $\omega^1\pm\omega^3$, $\omega^2\pm\omega^3$. Пусть распределения $\omega^1\pm\omega^3$, $\omega^2\pm\omega^3$ голономны. Тогда (см. [2]) сопряженная сеть на V_3 будет голономной и уравнения поверхности могут быть записаны следующим образом:

$$\omega^4=0, \quad \omega_1^4=0, \quad \omega_2^4=\omega^2, \quad \omega_3^4=-\omega^3, \qquad (1)$$

$$\omega^5=0, \quad \omega_1^5=0, \quad \omega_2^5=0, \quad \omega_3^5=-\omega^3;$$

$$\omega_1^2=\kappa_1\omega^2, \quad \omega_2^3=\kappa_2\omega^3, \quad \omega_3^1=\kappa_3\omega^1,$$

$$\omega_2^1=-\kappa_2\omega^1, \quad \omega_3^2=-\kappa_3\omega^2, \quad \omega_1^3=-\kappa_1\omega^3; \qquad (2)$$

$$\omega_5^4=-2\kappa_1\omega^1, \quad \omega_4^5=2\kappa_2\omega^2,$$

$$2\omega_1^1-\omega_5^5-\omega_0^0=-b_1^5\omega^1-\kappa_2\omega^2+\kappa_3\omega^3,$$

$$2\omega_2^2-\omega_4^4-\omega_0^0=\kappa_1\omega^1-b_2^4\omega^2-\kappa_3\omega^3,$$

$$2\omega_3^3-\omega_4^4-\omega_0^0=-3\kappa_1\omega^1+\kappa_2\omega^2+b_3^4\omega^3,$$

$$2\omega_3^3-\omega_5^5-\omega_0^0=-\kappa_1\omega^1+3\kappa_2\omega^2+b_3^5\omega^3.$$

Продолжая систему (2), (3), мы получим, в частности, следующие уравнения:

$$\omega_4^3=\ell_{42}^3\omega^2+\ell_{43}^3\omega^3, \quad \omega_5^3=\ell_{51}^3\omega^1+\ell_{53}^3\omega^3,$$

$$2d\kappa_1+2\kappa_1(\omega_0^0-\omega_1^1)=(\ell_{53}^3-\ell_{52}^2)\omega^1+(\ell_{51}^2-2\kappa_1\kappa_2)\omega^2-$$
$$-(\ell_{51}^3+2\kappa_1\kappa_3+2\kappa_1(b_3^5-b_3^4))\omega^3, \qquad (4)$$

$$2d\kappa_2+2\kappa_2(\omega_0^0-\omega_2^2)=(-\ell_{42}^1+2\kappa_1\kappa_2)\omega^1+(\ell_{41}^1-\ell_{43}^3)\omega^2+$$
$$+(\ell_{42}^3+2\kappa_2\kappa_3-2\kappa_3(b_3^4-b_3^5))\omega^3,$$

$$2\omega_1^0=(\ell_{52}^2+\ell_{53}^3+2\kappa_1^2)\omega^1-(\ell_{51}^2+2\kappa_1\kappa_2)\omega^2-$$
$$-(\ell_{51}^3+6\kappa_1\kappa_3+2\kappa_1(b_3^5-b_3^4))\omega^3,$$

$$2\omega_2^0=-(\ell_{42}^1+2\kappa_1\kappa_2)\omega^1+(\ell_{41}^1+\ell_{43}^3+2\kappa_2^2)\omega^2-$$
$$-(\ell_{42}^3+6\kappa_1\kappa_2-2\kappa_2(b_3^4-b_3^5))\omega^3,$$

$$2\omega_3^0=-(\ell_{31}+2\kappa_1\kappa_3)\omega^1+(\ell_{32}-2\kappa_2\kappa_3)\omega^2-$$
$$-(\ell_{41}^1+\ell_{42}^2+\ell_{51}^1+\ell_{52}^2-2\kappa_3^2)\omega^3,$$

$$db_3^4 + b_3^4(\omega_0^0 - \omega_3^3) = \left(-\tfrac{3}{2}\ell_{31} + 4\ell_{51}^3 + 4k_1(b_3^5 - b_3^4) + b_3^4 k_1 - 2k_1k_3\right)\omega^1 + \left(\tfrac{3}{2}\ell_{32} + 4\ell_{42}^3 + \ell_{43}^2 - 2k_2(b_3^4 - b_3^5) - b_3^4 k_2 - 2k_1k_3\right)\omega^2 + a_3^4\omega^3,$$

$$db_3^5 + b_3^5(\omega_0^0 - \omega_3^3) = \left(-\tfrac{3}{2}\ell_{31} + 4\ell_{51}^3 + \ell_{53}^1 + 2k_1(b_3^5 - b_3^4) + b_3^5 k_1 - 2k_1k_2\right)\omega^1 + \left(\tfrac{3}{2}\ell_{32} + 4\ell_{51}^3 - 4k_2(b_3^4 - b_3^5) - b_3^5 k_2 - 2k_2k_3\right)\omega^2 + a_3^5\omega^3.$$

2. Введем формы σ_j ($j = 0,1,2,3$):

$$\sigma_0 = \omega^1 + \omega^3,\quad \sigma_1 = -\omega^2 - \omega^3,\quad \sigma_2 = \omega^2 - \omega^3,\quad \sigma_3 = -\omega^1 + \omega^3. \tag{5}$$

Они связаны соотношением:

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0. \tag{6}$$

В силу голономности асимптотических распределений уравнения $\sigma_j = 0$ являются вполне интегрируемыми. Таким образом, на V_3 имеется четыре семейства двумерных поверхностей, причем , в силу условия (6), через каждую точку поверхности V_3 проходит одна и только одна поверхность из каждого семейства. Поэтому эти поверхности образуют на V_3 четыре-ткань. Введем далее три линейно независимые формы τ_i ($i = 1,2,3$):

$$2\tau_1 = \sigma_0 + \sigma_1 = \omega^1 - \omega^2,\quad 2\tau_2 = \sigma_0 + \sigma_2 = \omega^1 + \omega^2, \tag{7}$$
$$2\tau_3 = \sigma_0 + \sigma_3 = 2\omega^3.$$

Найдем внешние дифференциалы форм τ_i :

$$d\tau_1 = \left[\omega_0^0 - \omega_3^3 - k_1\omega^1 + k_2\omega^2 + \tfrac{1}{4}(b_3^4 + b_3^5)\omega^3\right]\wedge\tau_1 - \tfrac{1}{4}(b_3^5 - b_3^4 + 2k_3)\,\tau_2\wedge\tau_3, \tag{8}$$

$$d\tau_2 = \left[\omega_0^0 - \omega_3^3 - k_1\omega^1 + k_2\omega^2 + \tfrac{1}{4}(b_3^4 + b_3^5)\omega^3\right]\wedge\tau_2 + \tfrac{1}{4}(b_3^5 - b_3^4 + 2k_3)\,\tau_3\wedge\tau_1,$$

$$d\tau_3 = (\omega_0^0 - \omega_3^3 - k_1\omega^1 + k_2\omega^2)\wedge\tau_3.$$

Из соотношений (8) находим кривизны a_i ткани (см. [1]):

$$a_1 = -a_2 = -\tfrac{1}{4}(b_3^5 - b_3^4 + 2k_3),\quad a_3 = 0. \tag{9}$$

Из этих уравнений видно, что если $b_3^5 - b_3^4 + 2k_3 = 0$, то $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, и ткань будет октаэдрической. Но соотношение $b_3^5 - b_3^4 + 2k_3 = 0$, как нетрудно проверить пользуясь уравнениями (1)-(3), есть условие голономности третьей пары асимптотических распределений поверхности V_3 . Поэтому справедлива такая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Для того, чтобы четыре-ткань, образованная интегральными поверхностями уравнений $\sigma_j = 0$, была октаэдрической, необходимо и достаточно, чтобы и третья пара асимптотических распределений поверхности V_3 была голономной.

Из соотношения (8) видно, что форма связности γ ткани имеет вид:

$$\gamma = \omega_0^0 - \omega_3^3 - k_1\omega^1 + k_2\omega^2 + \tfrac{1}{4}(b_3^4 + b_3^5)\omega^3.$$

Дифференцируя γ внешним образом и используя соотношения (4), получим:

$$d\gamma = \left(-\tfrac{1}{4}\ell_{32} + \tfrac{1}{4}\ell_{43}^2 + \tfrac{1}{2}k_2(b_3^4 - b_3^5) - k_1k_2\right)\omega^2\wedge\omega^3 + \left(\tfrac{1}{4}\ell_{31} + \tfrac{1}{4}\ell_{53}^1 - \tfrac{1}{2}k_1(b_3^5 - b_3^4) - k_1k_3\right)\omega^1\wedge\omega^3.$$

Четыре-ткань, образованная поверхностями, будет шестиугольной тогда и только тогда, когда $d\gamma = 0$ [1], что дает в нашем случае

$$-\ell_{32} + \ell_{43}^2 + 2k_2(b_3^4 - b_3^5) - 4k_2k_3 = 0, \tag{10}$$
$$\ell_{31} + \ell_{53}^1 + 2k_1(b_3^4 - b_3^5) - 4k_1k_3 = 0.$$

3. Пусть теперь рассматриваемая нами поверхность V_3 несет четыре семейства прямолинейных асимптотических. Тогда, как показано в [3], имеют место соотношения :

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 0\,, \quad \ell^2_{43} = \ell^1_{53} = \ell_{31} = \ell_{32} = 0. \tag{11}$$

Уравнения (10) примут вид:

$$d\tau_1 = (\omega^0_0 - \omega^3_3)\wedge\tau_1 - 2\kappa_3\tau_2\wedge\tau_3\,,$$
$$d\tau_2 = (\omega^0_0 - \omega^3_3)\wedge\tau_2 + 2\kappa_3\tau_3\wedge\tau_1\,, \quad d\tau_3 = (\omega^0_0 - \omega^3_3)\wedge\tau_3\,, \tag{12}$$

а форма связности четыре-ткани $\gamma = \omega^0_0 - \omega^3_3$. Условия шестиугольности (10) выполняются тождественно в силу соотношений (11). Отсюда вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Если две пары асимптотических распределений поверхности V_3, несущей четыре семейства прямолинейных образующих, голономны, то четыре-ткань, образованная интегральными поверхностями голономных асимптотических распределений, будет шестиугольной.

Из (12) видно, что если $K_3 = 0$, то рассматриваемая ткань будет октаэдрической. Поверхность V_3, как доказано в [3], представляет собой в этом случае пересечение двух гиперконусов второго порядка, имеющих одномерные скрещивающиеся вершины. Отсюда приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. Четыре-ткань, образованная интегральными поверхностями любых двух пар асимптотических распределений поверхности V_3, являющейся пересечением двух гиперконусов второго порядка с одномерными скрещивающимися вершинами, будет октаэдрической.

Список литературы

1. Б л я ш к е В. Введение в геометрию тканей. М., 1959.

2. Б а й м у р а т о в Х.А. О геометрии трехмерной поверхности общего вида в пятимерном проективном пространстве. – В кн.: Сборник статей по дифференциальной геометрии. Калинин, 1975. Вып. 2, с. 3–14.

3. Б а й м у р а т о в Х.А. О геометрии трехмерной поверхности V_3, несущей четыре семейства прямолинейных образующих, в проективном пространстве P_5. – Изв. вузов, 1975, с. 3–14.