УДК 514.75

Н.Н. Иванищева

(Калининградский государственный университет)

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА В МНОГООБРАЗИЕ ГИПЕРКВАДРИК ЦЕНТРОПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В [1] рассматривается дифференцируемое отображение проективного пространства в многообразие гиперквадрик другого проективного пространства. В данной статье изучается дифференцируемое отображение f: $P_m \to R(Q)$ проективного пространства P_m в многообразие R(Q) центропроективного пространства P_n^c. Введены понятия инфлексионной и слабо инфлексионной кривой l: $R \to R(Q)$ в элементе Q^o, сформулированы необходимое и достаточное условие слабой инфлексионности кривой в элементе Q^o, а также необходимое условие инфлексионности. Определены характеристические и слабо характеристические прямые, характеристические и слабо характеристические направления отображения f.

1. Дифференциальные уравнения отображения. Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n. Отнесем его к подвижному реперу $\{A_o,A_1,...,A_n\}$. Деривационные формулы репера имеют вид: $dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta$ $(\alpha,...=\overline{0,n})$, причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям Картана $D\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\Lambda\omega_\gamma^\beta$ $(\omega_\alpha^\alpha=0)$.

Уравнение гиперквадрики Q_{n-1} пространства P_n имеет вид: $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0$, причем $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$, $\det(a_{\alpha\beta})=\mathrm{const}$.

Зафиксировав вершину A_o, получим центропроективное пространство P_n^c, в котором $\omega_o^i=0$ $(i,...=\overline{1,n})$.

Возьмем другое проективное пространство P_m . Отнесем его к подвижному реперу $\{B_0,B_1,...,B_m)$. Деривационные формулы репера имеют вид: $dB_{\bar I}=\Omega_{\bar I}^{\bar K}B_{\bar K}$ $(\bar I,...=\overline{0,m})$, причем формы Пфаффа $\Omega_{\bar I}^{\bar K}$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана $D\Omega_{\bar I}^{\bar K}=\Omega_{\bar I}^{\bar J}\Lambda\Omega_{\bar J}^{\bar K}$ $(\Omega_{\bar I}^{\bar I}=0)$.

Рассмотрим дифференцируемое отображение проективного пространства P_m в многообразие гиперквадрик R(Q) проективного пространства P_n^c. Обозначим его f: $P_m \to R(Q)$. Система дифференциальных уравнений отображения f имеет вид:

$$\nabla a_{ij}-a_{(i}\omega_{j)}^o=\Lambda_{ijI}\Omega^I \quad (a_i=a_{oi}),\ \nabla a_i-\omega_i^o=\Lambda_{iI}\Omega^I, \tag{1}$$

где

$$\nabla a_{ij}\overset{\mathrm{def}}{=}da_{ij}-a_{k(j}\omega_{i)}^k+2a_{ij}\omega_o^o,\quad \nabla a_i\overset{\mathrm{def}}{=}da_i-a_k\omega_i^k+2a_j\omega_o^o,$$

а круглые скобки означают циклирование. Дважды продолжая систему дифференциальных уравнений (1) отображения f , получим

$$\nabla\Lambda_{ijI} - \Lambda_{(i|I|}\omega^{o}_{j)} = \Lambda_{ijIK}\Omega^{K}, \tag{2}$$

$$\nabla\Lambda_{ijIK} + \Lambda_{ij(I}\Omega^{o}_{K)} - \Lambda_{(i|IK|}\omega^{o}_{j)} = \Lambda_{ijIKL}\Omega^{L};$$

$$\nabla\Lambda_{iI} = \Lambda_{iIK}\Omega^{K},\ \nabla\Lambda_{iIK} + \Lambda_{i(I}\Omega^{o}_{K)} = \Lambda_{iIKL}\Omega^{L}. \tag{3}$$

Из уравнений (2),(3) следует, что системы величин

$$\Gamma_1 = \{a_{ij}, a_i, \Lambda_{ijI}, \Lambda_{iI}\},\ \Gamma_2 = \{\Gamma_1, \Lambda_{ijIK}, \Lambda_{iIK}\}$$

являются фундаментальными объектами отображения f первого и второго порядка соответственно.

Произведем следующую канонизацию: a_i=0. Геометрически это означает, что вершины A_i репера помещены на поляру точки A_o относительно гиперквадрики $f(B_o)$. С учетом канонизации дважды продолженная система дифференциальных уравнений отображения f состоит из уравнений (3) и следующих:

$$\nabla a_{ij} = \Lambda_{ijI}\Omega^{I},\ -\omega^{o}_{i} = \Lambda_{iI}\Omega^{I},\quad \nabla\Lambda_{ijI} = \Lambda_{ijIK}\Omega^{K} - \Lambda_{(i|I|}\Lambda_{j)K}\Omega^{K},$$

$$\nabla\Lambda_{ijIK} = \Lambda_{ijIKL}\Omega^{L} - \Lambda_{(i|IK|}\Lambda_{j)L}\Omega^{L} - \Lambda_{ij(I}\Omega^{o}_{K)}.$$

2. Отображения φ_1, φ_2, φ_3. Соответствующая точке $B \in P_m$ гиперквадрика Q индуцирует следующие фигуры в пространстве P^{c}_{n}: 1) гиперплоскость π, являющуюся полярой центра A_o относительно гиперквадрики Q; 2) квадратичный элемент $q=Q\cap\pi$; 3) гиперконус второго порядка К с вершиной A_o , образующие которого инцидентны элементу q.

Пусть $\Pi_1:Q\to\pi$; $\Pi_2:Q\to q$; $\Pi_3:Q\to K$. Отображение $f:P_m\to R(Q)$ индуцирует дифференцируемые отображения $\varphi_1=\Pi_1\circ f$, $\varphi_2=\Pi_2\circ f$, $\varphi_3=\Pi_3\circ f$.

Для гиперквадрики Q

$$(a^{o}_{ij} + \nabla a_{ij})x^i x^j - 2\omega^{o}_{i}x^i x^o + (x^o)^2 = 0.$$

$\Pi_1(Q)$ имеет вид: $-\ \omega^{o}_{i}x^i + x^o = 0$. Так как в нашем репере выполняется условие $-\omega^{o}_{i} = \Lambda_{iI}\Omega^{I}$, то точка B_o+dB_o тогда и только тогда лежит в подпространстве $\Lambda_{iI}X^{I} = 0$, когда для $\Pi_1(Q)$ выполняется $-\omega^{o}_{i}$=0, т.е. когда $\Pi_1(Q)$ совпадает с $\Pi_1(Q^o)$, имеющей уравнение x^o=0. Отсюда вытекает

Предложение. (m-n)-плоскость L_π: $\Lambda_{iI}X^{I} = 0$ является касательным в точке B_o подпространством к поверхности уровня отображения φ_1.

Конусы $\varphi_3(B)$ и $\varphi_3(B_o)$ в нашем репере задаются соответственно уравнениями:

$$(a^{o}_{ij} + \nabla a_{ij})x^i x^j = 0,\ \ a^{o}_{ij}x^i x^j = 0.$$

Рассуждая, как в случае φ_1 , получаем

Предложение. (m-$\frac{n(n-1)}{2}$) – плокость L_K: $\Lambda_{ijI}X^{I} = 0$ является касательным подпространством к многообразию уровня отображения φ_3.

3. Отображение Z. Пусть в центропроективном пространстве P_n^c фиксирована невырожденная гиперквадрика Q^o : $a_{ij}^o x^i x^j + (x^o)^2$ =0. Полярой центра A_o (x^i =0, $x^o \neq 0$) является гиперплоскость $П^o$: x^o=0. В пространстве P_n^c возникает структура расширенного центроаффинного пространства с центром A_o и несобственной гиперплоскостью $П^o$, которая связана с гиперквадрикой Q^o.

Рассмотрим произвольную невырожденную гиперквадрику Q:

$$a_{ij}x^i x^j + 2a_i x^i x^o + (x^o)^2 = 0. \qquad (4)$$

Построим соответствующую ей гиперквадрику Z(Q)

$$a_{ij}x^i x^j + (x^o)^2 = 0. \qquad (5)$$

Путем параллельного переноса совместим центр гиперквадрики Q с центром A_o. Полученная гиперквадрика принадлежит пучку гиперквадрик Q_μ:

$$a_{ij}x^i x^j + \mu(x^o)^2 = 0.$$

Рассмотрим пучок гиперплоскостей, базисными гиперплоскостями которого являются поляра x^o=0 гиперквадрики Q^o и поляра гиперквадрики Q относительно центра A_o, определяемая уравнением:

$$a_i x^i + (x^o)^2 = 0. \qquad (6)$$

Инцидентная центру A_o гиперплоскость π_c указанного пучка задается уравнением:

$$a_i x^i = 0. \qquad (7)$$

Среди всех квадратичных элементов $\pi_c \cap Q_\mu$ с центром A_o, лежащих в гиперквадриках Q_μ , единственным, лежащим в Z(Q), как следует из уравнений (7); (4); (5), является квадратичный элемент $\pi_c \cap$ Q. Таким образом, Z(Q) (5) можно определить как гиперквадрику пучка Q_μ, содержащую элемент $\pi_c \cap$ Q. Следовательно, определили в многообразии гиперквадрик R(Q) (при заданной гиперквадрике Q^o) отображение $Z:Q \to Z(Q)$, где Q и Z(Q) задаются соответственно формулами (4) и (5).

Как видно из уравнений (4); (5); (6), гиперквадрика Q(4) полностью определяется гиперквадрикой Z(Q) и полярой π(Q) и, с другой стороны, сама их определяет. Поэтому задание пары (Z(Q), π(Q)) и гиперквадрики Q эквивалентно друг другу.

4. Инфлексионные кривые. Элементом Q^o будем называть гиперквадрику Q^o, определяемую уравнением:

$$a_{ij}^o x^i x^j + (x^o)^2 = 0.$$

Определение. Кривой в многообразии гиперквадрик R(Q) центропроективного пространства P_n^c называется отображение $l:R \to R(Q)$, $l(0)=Q^o$.

Разложение в ряд Тейлора отображения имеет вид:

$$a_{ij}(t)=a_{ij}^{o}+\Lambda_{ij}t+\frac{1}{2}M_{ij}t^{2}+<3>,\ a_{i}(t)=\Lambda_{i}t+\frac{1}{2}M_{i}t^{2}+<3>.$$

Определение. Кривая l:R→R(Q) называется слабо инфлексионной кривой в элементе Q^o , если выполняются следующие условия:

$$M_{ij}=k\Lambda_{ij};\quad M_i=\chi\Lambda_i. \tag{8}$$

Теорема. *Кривая l:R→R(Q) является слабо инфлексионной в элементе Q^o тогда и только тогда, когда фокальные многообразия [2] первого и второго порядков кривой совпадают в элементе Q^o.*

Определение. Кривая l:R→R(Q) называется инфлексионной в элементе Q^o, если в условиях (8) выполняется $k=\chi$.

Теорема. *Если кривая l:R→R(Q) является инфлексионной в элементе Q^o, то фокальные многообразия первого и второго порядков кривой совпадают в элементе Q^o.*

5. Характеристические направления. Рассмотрим случай, когда $m\geq N$, где N – размерность многообразия гиперквадрик R(Q) центропроективного пространства P_n^c. Фундаментальный объект второго порядка Γ_2 определяет для любой точки B_o два алгебраических многообразия:

$$\Lambda_{ijIK}X^IX^K-2\Lambda_{ijI}X^IX^o=0; \tag{9}$$

$$\Lambda_{iIK}X^IX^K-2\Lambda_{iI}X^IX^o=0. \tag{10}$$

Многообразия (9) и (10) назовем соответственно I_1-индикатрисой и I_2-индикатрисой.

Пусть V – многообразие в P_m , содержащее точку B_o. Обозначим символом [V] конус, состоящий из прямых связки $\{B_o\}$, которые имеют с многообразием V менее двух общих точек.

Обозначим $\tilde{\chi}=[I_1]\cap[I_2]$, $\chi=[I_1\cap I_2]$.

Определение. Конус $\tilde{\chi}$ называется слабо характеристическим, а конус χ – характеристическим конусом отображения f; определяемые конусами $\tilde{\chi}$ и χ направления называются соответственно слабо характеристическими и характеристическими направлениями отображения f.

Предложение. Объект Λ^I задает слабо характеристическое направление в том и только том случае, когда выполняются условия:

$$\Lambda_{ijIK}\Lambda^I\Lambda^K-2\mu_1\Lambda_{ijI}\Lambda^I=0;\quad \Lambda_{iIK}\Lambda^I\Lambda^K-2\mu_2\Lambda_{iI}\Lambda^I=0. \tag{11}$$

Предложение. Объект Λ^I задает характеристическое направление в том и только том случае, когда выполняются условия (11) и $\mu_1=\mu_2$.

Рассмотрим кривую L:R→P_m, $L(0)=B_0$, для которой разложение в ряд Тейлора имеет вид:

$$J^I=\Lambda^It+1/2M^It^2+<3>. \tag{12}$$

Кривая (12) задает в точке B_o направление, определяемое объектом Λ^I, и является инфлексионной [3] в точке B_o, если $M^I=\tilde{k}\Lambda^I$.

Теорема. *Чтобы направление, определяемое в точке B_0 инфлексионной в ней кривой $L:R\rightarrow P_m$, было (слабо) характеристическим, необходимо и достаточно, чтобы кривая $f\circ L: R\rightarrow R(Q)$ была (слабо) инфлексионной в элементе $f\circ L(0)$.*

Список литературы

1. *Иванищева Н.Н.* Дифференцируемое отображение проективного пространства P_m в многообразие гиперквадрик пространства P_n // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1999. №30. С. 27 – 29.

2. *Рыжков В.В.* Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Алгебра. Топология. Геометрия. 1970 / ВИНИТИ. М., 1971. С. 153 – 174.

3. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразия гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 113 – 133.

N. Ivanischeva

DIFFERENTIABLE MAPPING OF THE PROJECTIVE SPACE
INTO HYPERQUADRICS MANIFOLD OF THE CENTREPROJECTIVE SPACE

УДК 514.76

В.А. Игошин, Е.К. Китаева

(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ НЕНУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

На базе метода пульверизационного моделирования [1; 2] и результатов [3] получен ряд теорем, касающихся размерностей алгебр Ли аффинных движений квадратичных квазигеодезических потоков.

Пусть M – (n-1)-мерное многообразие, $f\equiv(M,f)$ – квазигеодезический поток (КП) на M, имеющий следующее координатное выражение:

$$d^2x^i/dt^2 = f^i(x^j, t, dx^j/dt),$$

где i, j =1,…, n-1. КП $f\equiv(M,f)$ называется [4; 5] квадратичным или потоком второй степени (по скорости – первым производным dx/dt), если правые части f^i его координатного уравнения являются полиномами второй степени по dx^i/dt:

$$f^i = -\Gamma^i_{jk}(x^s,t)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} - 2B^i_j(x^s,t)\frac{dx^j}{dt} - A^i(x^s,t),$$