ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Андреев Б.А.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ТОЧЕЧНЫМ ПРОЕКТИВНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ И ПРОСТРАНСТВОМ НУЛЬ-ПАР.

Продолжается изучение локального дифференцируемого отображения из точечного проективного пространства P_N в пространство нуль-пар $R(p,\pi)$ ([4], стр.12), проводившегося в предположении, что $N \geqslant rang\,(p,\pi)$ ([1], стр.181). В настоящей работе более подробно рассматривается случай $N = rang\,(p,\pi)$. Приводятся уравнения конусов слабо характеристических и характеристических прямых и дается их геометрическая характеристика. Изучается геометрия распределения пар n-плоскостей в P_N, порождаемого рассматриваемым отображением. Объект 1-го порядка этого распределения охватывается объектом 2-го порядка отображения. Устанавливается связь между геометрическими образами, ассоциированными с данным распределением и другими геометрическими образами, присоединенными к рассматриваемому отображению во 2-й дифференциальной окрестности.

§1. Фундаментальный объект II-го порядка. Характеристические направления.

Пусть P_n – n-мерное проективное пространство, p и π – соответственно его точка и неинцидентная ей гиперплоскость, так что $N = rang\,(p,\pi) = 2n$. Рассмотрим дифференцируемое отображение φ некоторой области $U \subset P_N$ в пространство $R(p,\pi)$. Определим отображения φ_a $(a,b=1,2;\ a\neq b)$ формулами: $\varphi_1(P)=p$, $\varphi_2(P)=\pi$, если $\varphi(P)=(p,\pi)$, $P\in U$. Отнесем пространства P_N и P_n, соответственно, к подвижным реперам $R=\{R_{\mathcal{I}'}\}$, $(\mathcal{I}',\mathcal{K}',\ldots=0,1,\ldots,N)$ и $\tau=\{\tau_{i'}\}$ $(i',j',\ldots=0,1,\ldots,n)$, деривационные формулы которых имеют вид:

$$d\bar{R}_{\mathcal{I}'}=\Omega^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{I}'}\bar{R}_{\mathcal{K}'},\quad d\bar{\tau}_{i'}=\omega^{j'}_{i'}\bar{\tau}_{j'}, \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа

$$\Omega^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{I}'},\quad \omega^{j'}_{i'} \tag{1.2}$$

подчиняются уравнениям структуры проективных пространств

$$\mathcal{D}\Omega^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{I}'}=\Omega^{\mathcal{L}'}_{\mathcal{I}'}\wedge\Omega^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{L}'},\quad \mathcal{D}\omega^{j'}_{i'}=\omega^{k'}_{i'}\wedge\omega^{j'}_{k'} \tag{1.3}$$

Поместим вершину R_0 репера R в произвольную точку области U, вершину τ_0 репера τ в точку $\varphi_1(R_0)$, а вершины $\tau_i\ (i,j,\ldots=1,2,\ldots n)$ – в гиперплоскость $\pi^0=\varphi_2(R_0)$. Система пфаффовых уравнений отображения φ запишется в виде ([4], стр.12):

$$\omega^i_0=\Lambda^i_{\mathcal{J}}\Omega^{\mathcal{J}}_0,\quad \omega^0_i=\Lambda_{i\mathcal{J}}\Omega^{\mathcal{J}}_0\quad (\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\ldots=1,2,\ldots N) \tag{1.4}$$

Система величин $\{\Lambda^i_{\mathcal{J}},\Lambda_{i\mathcal{J}}\}$ образует фундаментальный геометрический объект I-го порядка отображения φ. Компоненты полученного путем продолжения системы (I.4) фундаментального объекта 2-го порядка $\{\Lambda^i_J, \Lambda^i_{JK}, \Lambda_{iJ}, \Lambda_{iJK}\}$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
d\Lambda^i_J &= \Lambda^i_{\mathcal{L}}\Omega^{\mathcal{L}}_J - \Lambda^\ell_J\omega^i_\ell + \Lambda^i_J(\omega^0_0 - \Omega^0_0) + \Lambda^i_{JK}\Omega^K_0, \\
d\Lambda_{iJ} &= \Lambda_{i\mathcal{L}}\Omega^{\mathcal{L}}_J + \Lambda_{\ell J}\omega^\ell_i - \Lambda_{iJ}(\omega^0_0 + \Omega^0_0) + \Lambda_{iJK}\Omega^K_0, \\
\delta\Lambda^i_{JK} &= \Lambda^i_{J\mathcal{L}}\Pi^{\mathcal{L}}_K + \Lambda^i_{\mathcal{L}K}\Pi^{\mathcal{L}}_J - \Lambda^\ell_{JK}\pi^i_\ell + \Lambda^i_{JK}(\pi^0_0 - 2\Pi^0_0) - \Lambda^i_{(J}\Pi^0_{K)} \\
\delta\Lambda_{iJK} &= \Lambda_{iK\mathcal{L}}\Pi^{\mathcal{L}}_K + \Lambda_{i\mathcal{L}K}\Pi^{\mathcal{L}}_J + \Lambda_{\ell JK}\pi^\ell_i - \Lambda_{iJK}(\pi^0_0 + 2\Pi^0_0) - \Lambda_{i(J}\Pi^0_{K)}.
\end{aligned}
\qquad (1.5)
$$

Здесь $\Pi^{K'}_{J'}, \pi^{j'}_{i'}$ и δ означают, соответственно, формы Пфаффа (I.2) и символ дифференцирования при фиксированных первичных параметрах, а $a_{(J}b_{K)} = a_J b_K + a_K b_J$.

Координатные представления отображения φ_1 и φ_2 в окрестности точки R_0 имеют вид:

$$\tilde{x}^i = \Lambda^i_J\tilde{X}^J + \frac{1}{2}\Lambda^i_{JK}\tilde{X}^J\tilde{X}^K + \langle 3\rangle, \quad \tilde{\xi}_i = -\Lambda_{iJ}\tilde{X}^J - \frac{1}{2}\Lambda_{iJK}\tilde{X}^J\tilde{X}^K + \langle 3\rangle, \qquad (1.6)$$

где $\tilde{X}^J$, $\tilde{x}^i$ и $\tilde{\xi}_i$ – соответственно, неоднородные координаты точек $P = R_0 + dR_0 + \frac{1}{2}d^2R_0 + \dots$, $p = \varphi_1(P)$ и неоднородные тангенциальные координаты гиперплоскости $\pi = \varphi_2(P)$, а $\langle 3\rangle$ означает совокупность членов 3-го порядка малости относительно $\tilde{X}^J$.

Отображение φ_a порождает локальное расслоение пространства P_N на n-параметрическое семейство n-мерных подмногообразий, являющихся прообразами элементов $\varphi_a(P)$.

Каждая точка окрестности U является пересечением двух подмногообразий, относящихся к разным семействам. Касательные к ним в точке R_0 n-плоскости L_a называющиеся F_a-подпространствами. Таким образом, с отображением φ ассоциируется 2 голономных распределения $\{(L_1)\}$ и $\{(L_2)\}$ трансверсально расположенных n-плоскостей. Уравнения последних в точке R_0 имеют в однородных координатах X^J следующий вид:

$$\Lambda^i_J X^J = 0, \quad \Lambda_{iJ}X^J = 0 \qquad (1.7)$$

Совокупность F_a-характеристических прямых, определяемых как характеристические прямые отображения φ_a в общем случае зависит от n параметров и является алгебраическим конусом порядка $2^n - 1$ ([2], стр.240), F_1 и F_2-характеристические конусы χ_1 и χ_2 задаются системами уравнений ([4], стр.I2):

$$\Lambda^i_{JK}X^J X^K - 2\Lambda^i_J X^J(X^0 + \rho) = 0, \qquad (1.8)$$

$$\Lambda_{iJK}X^J X^K - 2\Lambda_{iJ}X^J(X^0 + \sigma) = 0. \qquad (1.9)$$

Конус $\tilde{\chi}$ слабо характеристических прямых ([4], стр.II) задается системой (I.8), (I.9) и в общем случае является I-параметрическим семейством прямых. Совокупность характеристических прямых χ, определяемых системой (I.8), (I.9) при $\sigma = \rho$, в общем случае содержит $2^N - 1$ прямую. В [4] дано несколько геометрических критериев, выделяющих характеристические прямые из конуса $\widetilde{X}$ слабо характеристических прямых. Для рассматриваемого случая $N=2n$ справедлива кроме того нижеследующая теорема.

Пусть $K(P_J,\hat{P}_J)=(K_1(P_J),K_2(\hat{P}_J))$ —касательное к φ отображение, компоненты которого $K_1(P_J)$ и $K_2(\hat{P}_J)$ имеют, соответственно, вид:

$$\widetilde{x}^i=\frac{\Lambda^i_J\widetilde{X}^J}{1-P_x\widetilde{X}^x}\,,\quad \widetilde{\xi}_i=\frac{-\Lambda_{iJ}\widetilde{X}^J}{1-\hat{P}_x\widetilde{X}^x}\,, \qquad (1.10)$$

причем $P_J=\hat{P}_J$, что геометрически характеризуется равенством:

$$K_1^{-1}(P_J)(\pi^0)=K_2^{-1}(P_J)(\tau_0).$$

Здесь π^0 и τ_0 рассматриваются, соответственно, как множества точек гиперплоскости π^0 и, дуально, гиперплоскостей связки $\{\tau_0\}$.

Т е о р е м а I. Характеристические направления отображения φ являются характеристическими направлениями точечного отображения $K^{-1}(P_J,P_J)\circ\varphi: U\to P_N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнения обратного к (I.10) отображения имеют в некоторой окрестности элемента $\varphi(R_0)$ следующий вид:

$$\widetilde{X}^J=\frac{V^J_i\widetilde{x}^i-V^{Ji}\widetilde{\xi}_i}{1+P_xV^x_j\widetilde{x}^j-P_xV^{xj}\widetilde{\xi}_j}\,, \qquad (1.11)$$

где V^J_i, V^{Ji} -компоненты матрицы, обратной к матрице отображения (I.4), так что выполняется:

$$V^J_i\Lambda^i_x+V^{Ji}\Lambda_{ix}=\delta^J_x,\quad V^J_i\Lambda^j_J=\delta^j_i,\quad V^{Ji}\Lambda_{Jj}=\delta^i_j$$
$$V^J_i\Lambda_{jJ}=0,\quad V^{Ji}\Lambda^j_J=0, \qquad (1.12)$$

$$\delta V^{Ji}=-V^{xi}\Pi^J_x-V^{Jl}\pi^i_l+V^{Ji}(\pi^0_0+\Pi^0_0),$$
$$\delta V^J_i=-V^x_i\Pi^J_x+V^J_l\pi^l_i+V^J_i(\Pi^0_0-\pi^0_0). \qquad (1.13)$$

Разложив отображение (I.II) в степенной ряд в окрестности элемента $\varphi(R_0)$, и используя формулы (I.6) и (I.I2), получим представление отображения $K^{-1}(P_J,P_J)\circ\varphi$ в виде:

$$\widetilde{Y}^J=\widetilde{X}^J+\tfrac{1}{2}(\Gamma^J_{xz}-\delta^J_{(x}P_{z)})\widetilde{X}^x\widetilde{X}^z+\langle 3\rangle, \qquad (1.14)$$

где $\widetilde{Y}^J$ -неоднородные координаты точки $K^{-1}\circ\varphi(P)$, а

$$\Gamma^z_{Jx}=V^z_i\Lambda^i_{Jx}+\Lambda^{zi}\Lambda_{iJx}. \qquad (1.15)$$

Пусть координаты точки $A(X^0,X^J), X^J\neq 0$ удовлетворяют уравнениям

$$\Gamma^z_{Jx}X^JX^x-2X^z(X^0+\sigma)=0. \qquad (1.16)$$

Тогда прямая AR_0 имеет касание 2-го порядка со своим образом при отображении (I.I4), т.е. является характеристической прямой. Но из (I.I5) и (I.I2) следует, что система (I.I6) равносильна системе (I.8), (I.9) при $\sigma=\rho$.

§2. Окрестность I-го порядка распределения $\{(L_1,L_2)\}$.

Поместим вершины R_α $(\alpha,\beta,...=1,2,...,n)$ репера R в F_1-подпространство, а вершины $R_{\hat\alpha}$ $(\hat\alpha,\hat\beta,...=n+1,n+2,...,N)$ - в F_2-подпространство. Имеем:

$$\Lambda^i_{\hat\alpha}\equiv 0,\quad \Lambda_{i\alpha}\equiv 0,\quad V^{\hat\alpha}_i\equiv 0,\quad V^{\alpha i}\equiv 0.$$

С учетом этих соотношений получаем из (I.5):

$$\Omega^{\alpha}_{\hat\alpha}=\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\gamma}\Omega^{\gamma}_{0}, \quad \Omega^{\hat\alpha}_{\alpha}=\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma}\Omega^{\gamma}_{0}. \tag{2.1}$$

где системы величин $\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\gamma}$ и $\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma}$ определены равенствами

$$\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\gamma}=-V^{\alpha}_{i}\Lambda^{i}_{\hat\alpha\gamma}, \quad \Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma}=-V^{\hat\alpha i}\Lambda_{i\alpha\gamma}. \tag{2.2}$$

Зададим оператор $\overset{\circ}{\nabla}$ формулой:

$$\overset{\circ}{\nabla}E^{\alpha_1\dots\alpha_s\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_q}_{\beta_1\dots\beta_r\hat\beta_1\dots\hat\beta_p}=\delta E^{\alpha_1\dots\alpha_s\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_q}_{\beta_1\dots\beta_r\hat\beta_1\dots\hat\beta_p}+E^{\gamma\alpha_2\dots\alpha_s\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_q}_{\beta_1\dots\beta_r\hat\beta_1\dots\hat\beta_p}\Pi^{\alpha_1}_{\gamma}+\dots+$$

$$+E^{\alpha_1\dots\alpha_{s-1}\gamma\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_q}_{\beta_1\dots\beta_r\hat\beta_1\dots\hat\beta_p}\Pi^{\alpha_s}_{\gamma}+E^{\alpha_1\dots\alpha_s\hat\gamma\hat\alpha_2\dots\hat\alpha_q}_{\beta_1\dots\beta_r\hat\beta_1\dots\hat\beta_p}\Pi^{\hat\alpha_1}_{\hat\gamma}+\dots+$$

$$+E^{\alpha_1\dots\alpha_s\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_{q-1}\hat\gamma}_{\beta_1\dots\beta_r\hat\beta_1\dots\hat\beta_p}\Pi^{\hat\alpha_q}_{\hat\gamma}-E^{\alpha_1\dots\alpha_s\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_q}_{\gamma\beta_2\dots\beta_r\hat\beta_1\dots\hat\beta_p}\Pi^{\gamma}_{\beta_1}-\dots-$$

$$-E^{\alpha_1\dots\alpha_s\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_q}_{\beta_1\dots\beta_r\hat\beta_1\dots\hat\beta_{p-1}\hat\gamma}\Pi^{\hat\gamma}_{\hat\beta_p}-(s+q-r-p)E^{\alpha_1\dots\alpha_s\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_q}_{\beta_1\dots\beta_r\hat\beta_1\dots\hat\beta_p}\Pi^{0}_{0}.$$

Системы величин (2.I), которые подчиняются, как это следует из (I.5), дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{\nabla}\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}\Pi^{0}_{\hat\alpha}, \quad \overset{\circ}{\nabla}\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\hat\beta}=0,\\ \overset{\circ}{\nabla}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\hat\beta}=\delta^{\hat\alpha}_{\hat\beta}\Pi^{0}_{\alpha}, \quad \overset{\circ}{\nabla}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}=0\end{gathered} \tag{2.3}$$

является фундаментальным геометрическим объектом I-го порядка распределения ([3], стр.60) пары n-плоскостей (L_1, L_2). При этом тензоры $\{\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\hat\beta}\}$ и $\{\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\}$ симметричны по нижним индексам, так что распределения $\{L_1\}$ и $\{L_2\}$ голономны, что, впрочем, следует и из геометрического смысла плоскостей L_a. Квазитензорами $\{\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\beta}\}$ и $\{\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\hat\beta}\}$ охватываются, соответственно, одновалентные квазитензоры:

$$\Lambda_{\hat\alpha}\overset{d}{=}\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\alpha}, \quad \overset{\circ}{\nabla}\Lambda_{\hat\alpha}=n\Pi^{0}_{\hat\alpha}. \tag{2.4}$$

$$\Lambda_{\alpha}\overset{d}{=}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\hat\alpha}, \quad \overset{\circ}{\nabla}\Lambda_{\alpha}=n\Pi^{0}_{\alpha}. \tag{2.5}$$

Найдем основные геометрические образы первой дифференциальной окрестности распределения $\{(L_1, L_2)\}$.

Пусть тензор $A^{\alpha}_{\hat\alpha}$ $(\overset{\circ}{\nabla}A^{\alpha}_{\hat\alpha}=0)$ определяет нормаль I-го рода распределения $\{L_1\}$:

$$X^{\alpha}-A^{\alpha}_{\hat\alpha}X^{\hat\alpha}=0. \tag{2.6}$$

Ассоциированный с распределением $\{L_1\}$ обобщенный проективитет Бомпиани-Пантази ([3], стр.85) ставит в соответствие нормали (2.6) нормаль II-го рода:

$$X^{\hat\alpha}=0, \; X^{0}+\frac{1}{n}X^{\alpha}(\Lambda_{\alpha}+\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}A^{\beta}_{\hat\alpha})=0, \tag{2.7}$$

определенную квазитензором

$$A_{\alpha}=-\frac{1}{n}(\Lambda_{\alpha}+\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{\hat\alpha}), \; \overset{\circ}{\nabla}A_{\alpha}=-\Pi^{0}_{\alpha}. \tag{2.8}$$

Аналогично, с распределением $\{L_2\}$ ассоциируется обобщенный проективитет Бомпиани-Пантази, который ставит в соответствие нормали I-го рода этого распределения

$$X^{\hat\alpha}-A^{\hat\alpha}_{\alpha}X^{\alpha}=0, \; \overset{\circ}{\nabla}A^{\hat\alpha}_{\alpha}=0. \tag{2.9}$$

нормаль II-го рода:

$$X^{\alpha}=0,\ X^{0}+\frac{1}{n}X^{\hat\alpha}(\Lambda_{\hat\alpha}+\Lambda^{\alpha}_{2\hat\beta}A^{\hat\beta}_{\alpha})=0. \qquad (2.10)$$

Взяв в качестве нормали I-го рода распределения $\{L_a\}$ n-плоскость L_b, получим внутренние связанные с распределением $\{(L_1, L_2)\}$ инвариантные нормали II-го рода, лежащие в плоскостях L_1 и L_2 и определяемые, соответственно, объектами $\{\Lambda_\alpha\}$ и $\{\Lambda_{\hat\alpha}\}$:

$$X^{\hat\alpha}=0,\ X^{0}+\frac{1}{n}\Lambda_{\alpha}X^{\alpha}=0, \qquad (2.11)(1)$$

$$X^{\alpha}=0,\ X^{0}+\frac{1}{n}\Lambda_{\hat\alpha}X^{\hat\alpha}=0 \qquad (2.11)(2)$$

Пусть точка R_0 смещается в n-плоскости L_a. Характеристика элемента L_a, определяемая системой

$$X^{\hat\alpha}=0,\ X^{\alpha}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\Omega^{\beta}=0, \qquad (2.12)(1)$$

для $a=1$, и

$$X^{\alpha}=0,\ X^{\hat\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\hat\beta}\Omega^{\hat\beta}=0 \qquad (2.12)(2)$$

для $a=2$ в общем случае является прямой. Уравнения асимптотических конусов для многообразий $\varphi^{-1}(\varphi_1(R_0))$ и $\varphi^{-1}(\varphi_2(R_0))$ в точке R_0 имеют, соответственно, вид:

$$\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta}=0,\ X^{\hat\alpha}=0, \qquad (2.13)(1)$$

$$\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\hat\beta}X^{\hat\alpha}X^{\hat\beta}=0,\ X^{\alpha}=0. \qquad (2.13)(2)$$

Уравнение фокального многообразия элемента L_a при смещении точки R_0 в n-плоскости L_b имеет вид:

$$\det(X^{0}\delta^{\hat\alpha}_{\hat\beta}+X^{\alpha}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\hat\beta})=0,\ X^{\hat\alpha}=0 \qquad (2.14)(1)$$

для $a=1$ и

$$\det(X^{0}\delta^{\alpha}_{\beta}+X^{\hat\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\beta})=0,\ X^{\alpha}=0 \qquad (2.14)(2)$$

для $a=2$. В общем случае система (2.14) (a) определяет ($n-1$)-мерную алгебраическую поверхность в F_a-подпространстве. Каждой её точке $P(X^{J'})$ соответствует направление в L_b, для которого эта точка является фокальной. Это направление определяется системой ([3], стр.81)

$$(X^{0}\delta^{\hat\alpha}_{\hat\beta}+X^{\alpha}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\hat\beta})\Omega^{\hat\beta}_{0}=0.\ \Omega^{\hat\alpha}=0, \qquad (2.15)(1)$$

если точка P лежит на многообразии (2.14) (1).

Объект I-го порядка распределения $\{(L_1, L_2)\}$ определяет два инвариантных ($n-1$)-параметрических линейных семейства гиперквадрик, соприкасающихся в точке R_0 с многообразиями $\varphi^{-1}(\varphi_1(R_0))$ и $\varphi^{-1}(\varphi_2(R_0))$. Уравнения базисных гиперквадрик этих семейств имеют, соответственно, вид:

$$F^{\hat\alpha}\equiv\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta}-2\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\hat\beta}X^{\alpha}X^{\hat\beta}-\frac{2}{n}\Lambda_{\hat\beta}X^{\hat\alpha}X^{\hat\beta}-2X^{\hat\alpha}X^{0}=0, \qquad (2.16)(1)$$

$$F^{\alpha}\equiv\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\hat\beta}X^{\hat\alpha}X^{\hat\beta}-2\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\beta}X^{\hat\alpha}X^{\beta}-\frac{2}{n}\Lambda_{\beta}X^{\alpha}X^{\beta}-2X^{\alpha}X^{0}=0, \qquad (2.17)(2)$$

так что произвольные гиперквадрики этих семейств задаются уравнениями:

$$\Lambda_{2} F^{\hat{\alpha}} = 0, \qquad (2.17)\ (1)$$

$$\Lambda_{\alpha} F^{\alpha} = 0 . \qquad (2.17)\ (2)$$

Кроме соприкосновения с многообразием $\varphi^{-1}(\varphi_a(R_0))$ гиперквадрики (2.I6)(a) характеризуются геометрически следующими двумя свойствами. Поляры точек n-плоскости L_b относительно семейства гиперквадрик вида (2.I7)(a) (т.е. общая часть поляр относительно всех гиперквадрик этого семейства), пересекающие F_a-подпространство, имеют точками пересечения точки фокального многообразия (2.I4)(a).

• Пересечения гиперквадрик (2.I7)(a) с F'_b-подпространством распадается на две $(n-1)$-плоскости, одна из которых является общей для всего семейства и совпадает с нормалью II-го рода (2.II)(b).

С каждой прямой ℓ связки $\{R_0\}$, не лежащей в n-плоскостях L_a, ассоциируется содержащая её двумерная плоскость, определяемая прямыми $\ell_1 = K^{-1}(R_\gamma, P_\gamma) \circ K_1(\hat{P}_\gamma)(\ell)$ и $\ell_2 = K^{-1}(P_\gamma, P_\gamma) \circ K_2(\hat{P}_\gamma)(\ell)$. Пусть прямая ℓ задается тензором $A^\gamma (\overset{\circ}{\nabla} A^\gamma = 0)$. Тогда прямая ℓ^* с координатами $(A^\alpha, -A^{\hat{\alpha}})$ будет гармонически сопряжена прямой ℓ относительно n-плоскостей L_a (т.е. относительно прямых ℓ_a).

Т е о р е м а 2. Множество фокальных точек n-плоскости L_1 соответствующих направлению, задаваемому прямой ℓ, является пересечением n-плоскости L_1, с полярой прямой ℓ^* относительно семейства гиперквадрик (2.I7)(I)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Координаты фокальных точек удовлетворяют системе:

$$X^{\hat{\alpha}} = 0, \ \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} A^\beta X^\alpha + \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\hat{\beta}} A^{\hat{\beta}} X^\alpha + A^{\hat{\alpha}} X^0 = 0 \qquad (2.18)$$

([3], стр. 80). К тем же уравнениям приходим при определении пересечения n-плоскости L_1 и поляр точек прямой ℓ^* относительно гиперквадрик (2.I7)(I).

Имеет место аналогичная теорема для L_2 и гиперквадрик (2.I7)(2).

§3. Связь геометрии распределения $\{(L_1, L_2)\}$ с отображением φ.

Введем системы величин:

$$\Gamma_1 = \{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\}, \ \Gamma_2 = \{\Gamma^\gamma_{\alpha\hat{\beta}}\}, \ \Gamma_3 = \{\Gamma^\gamma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\},$$
$$\Gamma^1 = \{\Gamma^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\}, \ \Gamma^2 = \{\Gamma^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\beta}\}, \ \Gamma^3 = \{\Gamma^{\hat{\gamma}}_{\alpha\beta}\}, \qquad (3.1)$$

где

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = V^\gamma_i \Lambda^i_{\alpha\beta}, \ \Gamma^\gamma_{\alpha\hat{\beta}} = V^\gamma_i \Lambda^i_{\alpha\hat{\beta}}, \ \Gamma^\gamma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = V^\gamma_i \Lambda^i_{\hat{\alpha}\hat{\beta}},$$
$$\Gamma^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = V^{\hat{\gamma}i} \Lambda_{i\hat{\alpha}\hat{\beta}}, \ \Gamma^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\beta} = V^{\hat{\gamma}i} \Lambda_{i\hat{\alpha}\beta}, \ \Gamma^{\hat{\gamma}}_{\alpha\beta} = V^{\hat{\gamma}i} \Lambda_{i\alpha\beta}, \qquad (3.2)$$

$$\overset{\circ}{\nabla} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = -\delta^\gamma_{(\alpha} \Pi^0_{\beta)}, \ \overset{\circ}{\nabla} \Gamma^\gamma_{\alpha\hat{\beta}} = -\delta^\gamma_\alpha \Pi^0_{\hat{\beta}}, \ \overset{\circ}{\nabla} \Gamma^\gamma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0,$$
$$\overset{\circ}{\nabla} \Gamma^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -\delta^{\hat{\gamma}}_{(\hat{\alpha}} \Pi^0_{\hat{\beta})}, \ \overset{\circ}{\nabla} \Gamma^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\beta} = -\delta^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}} \Pi^0_\beta, \ \overset{\circ}{\nabla} \Gamma^{\hat{\gamma}}_{\alpha\beta} = 0 \qquad (3.3)$$

Тогда уравнения инвариантных направляющих конусов χ_1 и χ_2 получаемых из систем (I.8) и (I.9) при $\rho = 0$ и $\sigma = 0$, примут, соответственно, вид

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta}+2\Gamma^{\gamma}_{\alpha\hat\beta}X^{\alpha}X^{\hat\beta}+\Gamma^{\gamma}_{\hat\alpha\hat\beta}X^{\hat\alpha}X^{\hat\beta}-2X^{\gamma}X^{0}=0, \qquad (3.4)(1)$$

$$\Gamma^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\hat\beta}X^{\hat\alpha}X^{\hat\beta}+2\Gamma^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\beta}X^{\hat\alpha}X^{\beta}+\Gamma^{\hat\gamma}_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta}-2X^{\hat\gamma}X^{0}=0. \qquad (3.4)(2)$$

Назовем их, соответственно, F_1- и F_2-индикатрисами. Их геометрическая характеристика дается в [4]. В общем случае F_a-индикатриса является n-мерным алгебраическим многообразием порядка 2^n, содержащим точку R_0. Нулевые направления отображения φ_a выделяются из множества характеристических направлений этого отображения тем, что определяемые ими прямые касаются F_a-индикатрисы в точке R_0. Более полно, F_b-подпространство является касательным подпространством к F_a-индикатрисе в точке R_0.

Т е о р е м а 3. Асимптотические направления многообразия $\varphi^{-1}(\varphi_a(R_0))$ в точке R_0 совпадают с асимптотическими направлениями F_a-индикатрисы.

Заметим, что

$$\Lambda^{\alpha}_{\hat\alpha\mathcal{J}}=-\Gamma^{\alpha}_{\mathcal{J}\hat\alpha}, \quad \Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\mathcal{J}}=-\Gamma^{\hat\alpha}_{\mathcal{J}\alpha}. \qquad (3.5)$$

Доказательство теоремы следует теперь из (2.I3) и (3.4).

Рассмотрим два линейных $(n-1)$-параметрических семейства гиперквадрик вида

$$\Lambda_{\alpha}\Phi^{\alpha}=0, \qquad (3.6)(1)$$

$$\Lambda_{\hat\alpha}\Phi^{\hat\alpha}=0, \qquad (3.6)(2)$$

где Φ^{α} и $\Phi^{\hat\alpha}$ - соответственно, левые части уравнений (3.4)(1) и (3.4)(2). F_a-индикатриса является пересечением всех гиперквадрик (3.6)(a).

Пусть поляра точки $P_1\in L_1$ относительно F_1-индикатрисы (т.е. пересечение поляр относительно всех гиперквадрик (3.6)(I)) имеет с F_2-подпространством общую точку $P_2(Y^{\mathcal{J}'})$. Координаты $X^{\mathcal{J}'}$ точки P_1 тогда удовлетворяют системе

$$X^{\hat\alpha}=0, \quad \Gamma^{\gamma}_{\alpha\hat\beta}Y^{\hat\beta}X^{\alpha}-X^{\gamma}Y^{0}=0, \qquad (3.7)$$

которая имеет решение только в случае, если выполняется

$$\det(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\hat\beta}Y^{\hat\beta}-\delta^{\gamma}_{\alpha}Y^{0})=0. \qquad (3.8)$$

Следовательно, точка P_2 является фокальной точкой n-плоскости L_2. Аналогичным свойством обладает и F_2-индикатриса, т.е. справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 4. Поляры точек F_a-подпространства относительно F_a-индикатрисы, пересекающие F_b-подпространство, имеют своими точками пересечения точки фокального многообразия (2.I5)(b).

Следующая теорема доказывается так же, как и теорема 2 с учетом равенств (3.5).

Т е о р е м а 5. Пересечение F_a-подпространства с полярой некоторой прямой связки $\{R_0\}$ относительно F_a-индикатрисы состоит из фокальных точек F_a-подпространства, соответствующих направлению, задаваемому этой прямой.

Кроме инвариантно связанной с распределением $\{(L_1, L_2)\}$ нормали II-го рода (2.II)(I) многообразия $\varphi^{-1}(\varphi_1(R_0))$ объектами $\{\Gamma^{\gamma}_{\gamma\alpha}\}$ и $\{\Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\alpha}\}$ определяются еще две инвариантных нормали II-го рода

$$X^{\hat{\alpha}}=0, \quad \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}X^{\alpha}-(n+1)X^{\circ}=0, \tag{3.9}$$

$$X^{\hat{\alpha}}=0, \quad \Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\alpha}X^{\alpha}-(N+1)X^{\circ}=0. \tag{3.10}$$

Для характеристики последней нормали выделим в пучке касательных отображений $K(P_{\mathcal{J}})=(K_1(P_{\mathcal{J}}),K_2(P_{\mathcal{J}}))$ одно отображение $K(\mathring{P}_{\mathcal{J}})$, определяемое равенством

$$\mathring{P}_{\mathcal{J}}=\frac{1}{N+1}\Gamma^{\varkappa}_{\varkappa\mathcal{J}}. \tag{3.11}$$

Оно характеризуется более тесным сближением с отображением φ в том смысле, что в точке $R_{\circ}$ выполняется

$$d\mathfrak{I}(K(\mathring{P}_{\mathcal{J}}))=d\mathfrak{I}(\varphi), \tag{3.12}$$

где $\mathfrak{I}(K(\mathring{P}_{\mathcal{J}}))$ и $\mathfrak{I}(\varphi)$, соответственно, якобианы отображений $K(\mathring{P}_{\mathcal{J}})$ и φ в точке $R_{\circ}$.

Действительно, из (I.6) и (I.10) получаем:

$$d\ln\mathfrak{I}(\varphi)=\Gamma^{\varkappa}_{\varkappa\mathcal{J}}\widetilde{X}^{\mathcal{J}}, \tag{3.13}$$

$$d\ln\mathfrak{I}(K(P_{\mathcal{J}}))=(N+1)P_{\mathcal{J}}\widetilde{X}^{\mathcal{J}}, \tag{3.14}$$

откуда, учитывая касание φ и $K(\mathring{P}_{\mathcal{J}})$ в точке $R_{\circ}$, получаем (3.I2).

Из (I.IO) и (3.II) вытекает следующее утверждение: Нормаль II-го рода (3.IO) является прообразом гиперплоскости π при отображении, являющемся сужением $K(\mathring{P}_{\mathcal{J}})$ на L_1.

Подобным же образом дается характеристика нормали (3.9) ([4], стр. II).

Между нормалями II-го рода (3.9), (3.IO) и (2.II) (I) существует следующая связь:

Т е о р е м а 6. Ассоциированная с распределением $\{(L_1,L_2)\}$ нормаль II-го рода (2.II)(I) многообразия $\varphi^{-1}(\varphi_1(R_{\circ}))$ принадлежит пучку нормалей II-го рода

$$X^{\hat{\alpha}}=0, \left[\frac{1}{N+1}\Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\alpha}+\sigma\left(\frac{1}{n+1}\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}-\frac{1}{N+1}\Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\alpha}\right)\right]X^{\alpha}-X^{\circ}=0, \tag{3.15}$$

порожденному нормалями 2-го рода (3.9) и (3.IO) и определяется значением $\sigma=-(1+\frac{1}{n})$.

Аналогичным образом интерпретируются нормали II-го рода

$$X^{\alpha}=0, \quad \Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\hat{\alpha}}X^{\hat{\alpha}}-(N+1)X^{\circ}=0, \tag{3.16}$$

$$X^{\alpha}=0, \quad \Gamma^{\hat{\beta}}_{\hat{\beta}\hat{\alpha}}X^{\hat{\alpha}}-(n+1)X^{\circ}=0. \tag{3.17}$$

многообразия $\varphi^{-1}(\varphi_2(R_{\circ}))$ в точке $R_{\circ}$, определяющие пучок нормалей II-го рода

$$X^{\alpha}=0, \left[\frac{1}{N+1}\Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\hat{\alpha}}+\sigma\left(\frac{1}{n+1}\Gamma^{\hat{\beta}}_{\hat{\beta}\hat{\alpha}}-\frac{1}{N+1}\Gamma^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\hat{\alpha}}\right)\right]X^{\hat{\alpha}}-X^{\circ}=0, \tag{3.18}$$

который содержит нормаль (2.II) (2).

§4. Классификация точек вырождения отображения φ.

Рассмотрим тензоры

$$T_1=\{\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}-\frac{1}{n+1}\delta^{\gamma}_{(\alpha}\Gamma^{\eta}_{\beta)\eta}\},\ T_2=\{\Gamma^{\gamma}_{\alpha\hat{\beta}}-\frac{1}{n}\delta^{\gamma}_{\alpha}\Gamma^{\eta}_{\eta\hat{\beta}}\},\ T_3=\{\Gamma^{\gamma}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\},$$

$$T^1=\{\Gamma^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}-\frac{1}{n+1}\delta^{\hat{\gamma}}_{(\hat{\alpha}}\Gamma^{\hat{\eta}}_{\hat{\beta})\hat{\eta}}\},\ T^2=\{\Gamma^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\beta}-\frac{1}{n}\delta^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}}\Gamma^{\hat{\eta}}_{\hat{\eta}\beta}\},\ T^3=\{\Gamma^{\hat{\gamma}}_{\alpha\beta}\},\quad(4.1)$$

$$T_4=\{\frac{1}{N+1}\Gamma^{J}_{J\alpha}-\frac{1}{n+1}\Gamma^{\hat{\gamma}}_{\hat{\gamma}\alpha}\},\ T^4=\{\frac{1}{N+1}\Gamma^{J}_{J\hat{\alpha}}-\frac{1}{n+1}\Gamma^{\gamma}_{\gamma\hat{\alpha}}\}.$$

Обращение одного из них в фиксированной точке R_0 в нулевой тензор инвариантно и не зависит от типа остальных тензоров. Строение присоединенных геометрических образов второй дифференциальной окрестности при этом отличается от общего случая, т.е. отображение φ претерпевает в точке R_0 вырождение определенного типа. Возникает следующая классификация точек области U по признаку указанных вырождений в них отображения φ. Будем обозначать тип точки R_0 буквой Z с указанием номеров тензоров (4.I), аннулирующихся в точке R_0. Таким образом, эта классификация выделяет $255 = 2^8-I$ типов точек вырождения отображения φ. Рассмотрим некоторые из них.

Точки типа Z_3 являются точками уплощения многообразия $\varphi^{-1}(\varphi_2(R_0))$. Проективитет Бомпиани-Пантази (2.IO) вырождается в тождественное отображение, которое всем нормалям I-го рода (2.9) распределения $\{L_2\}$ ставит в соответствие инвариантную нормаль II-го рода (2.II)(2). Множества фокальных точек n-плоскости L_2, соответствующих направлениям Ω^J_0, которые имеют одинаковые проекции Ω^{α}_0 на n-плоскость L_1, совпадают.

Точки типа Z_2 характеризуются тем, что фокальное многообразие (2.I4)(2) распределения $\{L_2\}$ соответствующее n-плоскости L_1, вырождается в $(n-1)$-плоскость, совпадающую с нормалью II-го рода (2.II)(2).

Точки типа $Z_{2,3}$ обладают всеми свойствами точек типов Z_2 и Z_3. Фокальным многообразием, соответствующим любому направлению, является в этих точках $(n-1)$-плоскость (2.II)(2). Конус χ_1 F_1-характеристических прямых распадается на $(n+1)$-плоскости, каждая из которых определяется F_2-подпространством и одной из собственно F_1-характеристических прямых (т.е. F_1-характеристических прямых, лежащих в F_1-подпространстве).

Аналогичными свойствами обладает отображение φ в точках типов Z^3, Z^2 и $Z^{2,3}$.

В точке типа Z_1 (Z^1) каждое направление, лежащее в F_1- (F_2)-подпространстве, является F_1- (F_2)-характеристическим.

F_1-индикатриса в точке типа $Z_{1,2,3}$ распадается на n-плоскость L_2 и неинцидентную точке R_0 гиперплоскость, пересекающую L_2 и L_1, соответственно, по нормали II-го рода (2.II)(2) распределения $\{L_2\}$ и по $(n-1)$-плоскости (3.9). Таким образом, любое направление является F_1-характеристическим, а конус $\widetilde{\chi}$ слабо характеристических прямых совпадает с конусом χ F_2-характеристических. Направляющей конуса характеристических прямых, не лежащих в F_1 подпространстве, является пересечение F_2-индикатрисы с указанной гиперплоскостью. Аналогичное строение имеют соответствующие геометрические образы в точке $Z^{1,2,3}$.

В точке типа $Z^{1,2,3}_{1,2,3}$ любое направление является слабо характеристическим направлением. Характеристические направления в такой точке лежат в гиперплоскости

$$\left(\frac{1}{n+1}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}-\frac{1}{n}\Gamma^{\hat\beta}_{\alpha\hat\beta}\right)X^{\alpha}-\left(\frac{1}{n}\Gamma^{\beta}_{\hat\alpha\beta}-\frac{1}{n+1}\Gamma^{\hat\beta}_{\hat\alpha\hat\beta}\right)X^{\hat\alpha}=0, \quad (4.2)$$

а также в F_1 и F_2-подпространствах.

И, наконец, в точке типа $Z^{1,2,3,4}_{1,2,3,4}$ любое направление является характеристическим.

Литература

I. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. (Труды геом. семинара, т.2, I969, ВИНИТИ АН СССР, стр.I79-206).

2. Рыжков В.В., Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n. (Труды геом. семинара, т.3, I97I, ВИНИТИ АН СССР, с.235-242).

3. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М., Распределения m-мерных линейчатых элементов в пространстве проективной связности I. (Труды геом. семинара, т.3, I97I, ВИНИТИ АН СССР, с.49-94)

4. Андреев Б.А., О дифференциальной геометрии соответствий между точечными пространствами и некоторыми пространствами пар фигур. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, Калининград, I973, с.6-I9.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Ивлев Е.Т.

ОБ ОСНАЩЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ ПРОСТРАНСТВА ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ.

В статье [I] в пространстве проективной связности геометрически построены поля нормалей первого и второго рода в смысле Нордена А.П. m-поверхности S_m с заданным полем гиперплоскостей, проходящих через соответствующие m-плоскости L_m, касательные к S_m, т.е. m-мерной гиперполосы в смысле Вагнера В.В. [2]. Настоящая статья посвящена другому построению поля нормалей первого рода m-мерной гиперполосы в $P_{n,n}$, отличному от того, которое дается в статье [I]. В заключительном параграфе данной статьи решается одна задача, связанная с оснащением m-мерной гиперполосы в пространстве проективной связности.

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [3]-[5] и [I].

§I. Аналитический аппарат.

Как известно [4], пространство проективной связности $P_{n,n}$ есть расслоенное пространство, базой которого служит