ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

Ю.И. П о п о в

О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТАХ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА.

В настоящей работе инвариантным методом продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева [1] строятся поля геометрических объектов в дифференциальных окрестностях 2-го и 3-го порядков элемента m-мерной регулярной гиперполосы H_m аффинного пространства $\mathcal{A}_{n+1}$. Используя построенные поля геометрических объектов, в окрестности 2-го порядка элемента гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ внутренним инвариантным образом присоединяется поле однопараметрического пучка соприкасающихся гиперквадрик. Построен канонический пучок проективных нормалей (в окрестности 3-го порядка), который является обобщением на случай регулярных гиперполос канонического пучка проективных нормалей, рассмотренного в работах [1],[2], для гиперповерхностей проективного и аффинного пространств.

Обозначения и замечания:

1. Во всей работе мы придерживаемся следующей схемы использования индексов:

$$i,j,k,\ldots = 1,2,\ldots,m; \quad a,b,c,\ldots = m+1, m+2,\ldots,n;$$
$$\alpha,\beta,\gamma,\ldots = 1,2,\ldots,n+1.$$

2. Оператор ∇_d дифференцирования действует по закону:

$$\nabla_d T^{\alpha i a}_{\beta j b} = dT^{\alpha i a}_{\beta j b} - T^{\alpha i a}_{\gamma j b}\omega^{\gamma}_{\beta} - T^{\alpha i a}_{\beta k b}\omega^{k}_{j} - T^{\alpha i a}_{\beta j c}\omega^{c}_{b} + T^{\gamma i a}_{\beta j b}\omega^{\alpha}_{\gamma} + T^{\alpha k a}_{\beta j b}\omega^{i}_{k} + T^{\alpha i c}_{\beta j b}\omega^{a}_{c}.$$

3. Символом δ обозначаем дифференцирование по вторичным параметрам, а значение форм ω^{α}_{β} при фиксированных главных параметрах через π^{α}_{β}. В этом случае оператор обозначается символом ∇_δ.

I. В ($n+1$)-мерном аффинном пространстве $\mathcal{A}_{n+1}$ рассмотрим m-мерную гиперполосу H_m ($2 \le m \le n$) [3], т.е. m-параметрическое семейство гиперплоскостных элементов (A,τ), таких, что точка A описывает базисную поверхность V_m гиперполосы, а каждая гиперплоскость $\tau(A)$ касается поверхности V_m в соответствующей точке $A \in V_m$. Гиперплоскости $\tau(A)$ называются главными касательными гиперплоскостями. Семейство главных касательных гиперплоскостей $\tau(A)$ огибает тангенциально вырожденную гиперповерхность V^m_n, плоские ($n-m$)-мерные образующие E_{n-m} которой являются характеристиками гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ [3].

Отнесем ($n+1$)-мерное аффинное пространство $\mathcal{A}_{n+1}$ к подвижному реперу $R_o = \{M, \vec{e}_\alpha\}$, дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид:

$$d\vec{M} = \omega^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}, \qquad d\vec{e}_{\alpha} = \omega^{\beta}_{\alpha}\vec{e}_{\beta}, \tag{1}$$

где формы ω^α, ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям аффинного пространства:

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \quad d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta. \tag{2}$$

Совместим вершину M подвижного репера R_0 с текущей точкой $A \in V_m$ и расположим векторы $\{\vec{e}_i\}$ в касательной плоскости T_m базисной поверхности $V_m \subset H_m$, векторы $\{\vec{e}_a\}$ в характеристической плоскости $E_{n-m} \subset H_m$, а вектор $\vec{e}_{n+1}$ пусть занимает произвольное положение, образуя с векторами $\{\vec{e}_i, \vec{e}_a\}$ репер $\{\vec{e}_\alpha\}$ пространства A_{n+1}. В выбранном репере R_1 первого порядка дифференциальные уравнения гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ записываются в следующем виде:

$$\omega^{n+1} = 0, \tag{3}$$

$$\omega^a = 0, \tag{4}$$

$$\omega_i^{n+1} = b_{ij}\omega^j, \quad b_{ij} = b_{ji}; \tag{5}$$

$$\omega_i^a = \lambda_{ij}^a \omega^j, \quad \lambda_{ij}^a = \lambda_{ji}^a; \tag{6}$$

$$\omega_a^{n+1} = \Lambda_{ai}\omega^i, \tag{7}$$

$$\omega_a^j = \lambda_{ai}^j \omega^i, \tag{8}$$

$$\nabla_d b_{ij} = -b_{ij}\omega_{n+1}^{n+1} + b_{ijk}\omega^k, \tag{9}$$

$$\nabla_d \lambda_{ij}^a = -b_{ij}\omega_{n+1}^a + \lambda_{ijk}^a \omega^k, \tag{10}$$

$$\nabla_d \Lambda_{ai} = -\Lambda_{ai}\omega_{n+1}^{n+1} + \Lambda_{aik}\omega^k, \tag{11}$$

$$\nabla_d \lambda_{ai}^j = -\Lambda_{ai}\omega_{n+1}^j + \Lambda_{aik}^j \omega^k, \tag{12}$$

где b_{ijk}, λ_{ijk}^a симметричны по любой паре индексов, $\Lambda_{a[ik]} = 0$, $\lambda_{a[ik]}^j = 0$.

В настоящей работе изучаются регулярные гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ [3], которые характеризуются невырожденностью основного фундаментального тензора b_{ij} первого порядка:

$$b = \det \| b_{ij} \| \neq 0. \tag{13}$$

В силу (13) введем обратный фундаментальный тензор 1-го порядка b^{ij}:

$$b_{ik} b^{kj} = \delta_i^j; \quad \nabla_d b^{ij} = b^{ij}\omega_{n+1}^{n+1} - b^{ik} b^{jt} b_{ktp}\omega^p. \tag{14}$$

Системы величин $\Gamma_2 = \{b_{ij}, \lambda_{ij}^a, \Lambda_{ai}, \lambda_{ai}^j\}$ и $\Gamma_3 = \{\Gamma_2, b_{ijk}, \lambda_{ijk}^a, \Lambda_{aik}, \Lambda_{aik}^j\}$ образуют фундаментальные объекты соответственно второго и третьего порядков гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Дальнейшее продолжение системы уравнений (9)-(12) вводит геометрические объекты четвертого и более высоких порядков, определяемые гиперполосой $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Таким образом строится последовательность фундаментальных геометрических объектов регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

2. Построим ряд геометрических объектов во второй диф-

ференциальной окрестности образующего элемента регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

Используя компоненты фундаментального объекта Γ_2 второго порядка регулярной гиперполосы H_m, последовательно находим:

$$\Lambda^a = \frac{1}{m} b^{ij} \lambda^a_{ij}, \quad \nabla_\delta \Lambda^a = \Lambda^a \pi^{n+1}_{n+1} - \pi^a_{n+1}; \tag{15}$$

$$\Lambda^k_a = b^{ki} \Lambda_{ai}, \quad \nabla_\delta \Lambda^k_a = 0; \tag{16}$$

$$C^a_{ij} = \lambda^a_{ij} - \Lambda^a b_{ij}, \quad \nabla_\delta C^a_{ij} = 0; \tag{17}$$

$$l^{ak}_i = C^a_{ij} b^{jk}, \quad \nabla_\delta l^{ak}_i = l^{ak}_i \pi^{n+1}_{n+1}; \tag{18}$$

$$L_{ab} = \Lambda_{ak} \Lambda^k_b, \quad \nabla_\delta L_{ab} = -L_{ab} \pi^{n+1}_{n+1}. \tag{19}$$

Из уравнений (15)-(19) следует, что Λ^a -квазитензор, Λ^k_a, C^a_{ij} -абсолютные тензоры; l^{ak}_i, L_{ab}-тензоры второго порядка регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

С помощью геометрического объекта 2-го порядка

$$\lambda_{ijk} = b_{ijk} - \lambda^a_{ij} \Lambda_{ak}, \quad \nabla_\delta \lambda_{ijk} = -\lambda_{ijk} \pi^{n+1}_{n+1} + b_{(ij} b_{p)k} \pi^p_{n+1} \tag{20}$$

вводим в рассмотрение квазитензор

$$b^i = b^{ik} b^{ps} \lambda_{psk}, \quad \nabla_\delta b^i = b^i \pi^{n+1}_{n+1} + (m+2) \pi^i_{n+1}, \tag{21}$$

который является обобщением чебышевского вектора [4] на случай регулярных гиперполос аффинного пространства.

Каждая из следующих систем величин

$$\Lambda_k = \Lambda_{ak} \Lambda^a + \frac{1}{m} b^{ij} (b_{ijk} - \lambda_{ijk}), \quad \Lambda^i = b^{ik} \Lambda_k,$$
$$\Lambda^{bk} = \frac{1}{2} l^{bk}_i \Lambda^i, \quad \Lambda_{ak} \Lambda^{bk} = \Lambda^b_a \tag{22}$$

образует тензор 2-го порядка:

$$\nabla_\delta \Lambda_k = 0; \; \nabla_\delta \Lambda^i = \Lambda^i \pi^{n+1}_{n+1}; \; \nabla_\delta \Lambda^{bk} = \Lambda^{bk} \pi^{n+1}_{n+1}; \; \nabla_\delta \Lambda^b_a = 0 \tag{23}$$

причем Λ_k, Λ^b_a - абсолютные тензоры 2-го порядка. Комбинируя ранее введенные геометрические объекты, построим следующие геометрические объекты 2-го порядка:

$$B_k = \frac{1}{m} b^{ij} \left(b_{ijk} - \frac{2}{m+2} \lambda_{ijk}\right), \quad \nabla_\delta B_k = b_{ks} \pi^s_{n+1} + \Lambda_{ak} \pi^a_{n+1}; \tag{24}$$

$$B^k = b^{ks} B_s, \quad \nabla_\delta B^k = B^k \pi^{n+1}_{n+1} + \Lambda^i_a \pi^a_{n+1} + \pi^i_{n+1}; \tag{25}$$

$$L_a = B^k \Lambda_{ak}, \quad \nabla_\delta L_a = \Lambda_{ak} \pi^k_{n+1} + L_{ab} \pi^b_{n+1}; \tag{26}$$

$$\widetilde{B} = B_k B^k, \quad \nabla_\delta \widetilde{B} = \widetilde{B} \pi^{n+1}_{n+1} + 2 B_k \pi^k_{n+1} + 2 L_a \pi^a_{n+1}. \tag{27}$$

В дифференциальной окрестности 2-го порядка элемента гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ определяется симметрический по любой паре индексов тензор

$$l_{ijk} = (m+2) \lambda_{ijk} - b_{(ij} b_{k)}, \quad \nabla_\delta l_{ijk} = -l_{ijk} \pi^{n+1}_{n+1}, \tag{28}$$

который является аналогом обобщенного тензора Дарбу [1] для регулярных гиперполос аффинного пространства. Тензор Дарбу ℓ_{ijk} позволяет построить абсолютный тензор

$$\ell_{ij} = b^{ks} b^{pt} \ell_{kpi} \ell_{stj}, \quad \nabla_\delta \ell_{ij} = 0. \tag{29}$$

В общем случае тензор ℓ_{ij} невырожденный ($\ell = \det\|\ell_{ij}\| \neq 0$); следовательно, можно построить обратный ему абсолютный тензор ℓ^{ij}.

Кроме того, с помощью тензора Дарбу ℓ_{ijk} найдем относительный инвариант

$$\ell_o = \ell^{ijk} \ell_{ijk} = b^{ij} \ell_{ij}, \quad \nabla_d \ln \ell_o = \omega_{n+1}^{n+1} + \tilde{c}_k \omega^k. \tag{30}$$

Относительный инвариант ℓ_o является аналогом инварианта Пика [1], [2] для регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

3. Рассмотрим вектор, который проходит через точку базисной поверхности $V_m \subset H_m$ и не лежит в касательной гиперплоскости $\tau(A)$ гиперполосы H_m, т.е. вектор вида

$$\vec{p} = x^i \vec{e}_i + x^a \vec{e}_a + \vec{e}_{n+1}. \tag{31}$$

Дифференциальные уравнения инвариантности вектора $\vec{p}$ (инвариантности прямой $B_1 = \{A, \vec{p}\}$) относительно группы стационарности образующего элемента гиперполосы H_m имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta x^i &= -x^k \pi_k^i + x^i \pi_{n+1}^{n+1} - \pi_{n+1}^i, \\ \delta x^a &= -x^b \pi_b^a + x^a \pi_{n+1}^{n+1} - \pi_{n+1}^a. \end{aligned} \tag{32}$$

В силу соотношений (21), (15) системе уравнений (32) удовлетворяют величины:

$$x^i = -\frac{1}{m+2} b^i; \quad x^a = \Lambda^a. \tag{33}$$

Следовательно, поле вектора $\vec{p}$ (поле прямых B_1)

$$\vec{p} = -\frac{1}{m+2} b^i \vec{e}_i + \Lambda^a \vec{e}_a + \vec{e}_{n+1} \tag{34}$$

внутренним инвариантным образом присоединено к регулярной гиперполосе $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ в дифференциальной окрестности второго порядка её образующего элемента. Аналогично находим, что поле векторов

$$\vec{p}_a = \Lambda_a^b \vec{e}_b \tag{35}$$

внутренним инвариантным образом присоединено к регулярной гиперплосе $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ в дифференциальной окрестности 2-го порядка её образующего элемента.

Прямая $B_1 = \{A, \vec{p}\}$ для регулярных гиперполос аффинного пространства названа П.М.Олоничевым [5] аффинной нормалью Бляшке. Плоскость $N_{n-m+1} = \{A, \vec{p}, \vec{p}_a\}$, натянутая на аффинную нормаль Бляшке B_1 и характеристику $E_{n-m} = \{A, \vec{p}_a\}$, является внутренней инвариантной нормалью (1-го рода) гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Таким образом, в дифференциальной окрестности 2-го порядка элемента гиперполосы внутренним инвариантным образом присоединено к гиперполосе H_m поле нормалей N_{n-m+1} (1-го рода).

По аналогии с работой [5] гиперквадрику Q_n, касающуюся гиперплоскости $\tau(A)$ в точке $A \in V_m$, назовем соприкасающейся гиперквадрикой гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$, если она имеет касание 2-го порядка с базисной поверхностью $V_m \subset H_m$. В силу (9), (11), (19), (24), (26), (27), (30) в дифференциальной окрестности 2-го порядка элемента гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ найден однопараметрический пучок инвариантно (внутренним образом) присоединенных к гиперполосе полей соприкасающихся гиперквадрик, уравнения которых в репере R_1 первого порядка записываются в виде:

$$b_{ij} x^i x^j + L_{ab} x^a x^b + 2 L_a x^a x^{n+1} + 2 \Lambda_{ai} x^a x^i +$$

$$+ 2 B_i x^i x^{n+1} + (\widetilde{B} + \sigma \ell_0) x^{n+1} x^{n+1} = 2 x^{n+1}, \qquad (36)$$

где σ – инвариант.

4. Далее проведем построения геометрических объектов в 3-й дифференциальной окрестности образующего элемента гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$, следуя построениям Г.Ф. Лаптева [1] для гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ и построениям Э.Д. Алшибая [2] для гиперповерхности $V_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

Продолжая уравнения (21) для квазитензора ℓ^i, вводим систему величин p^i_k 3-го порядка, при помощи которых и ранее построенных величин 2-го порядка построим последовательно следующие тензоры и квазитензоры 3-го порядка регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$:

$$\widetilde{A}_{jk} = b_{ij} p^i_k + \frac{b^j b^k}{m+2} - (b_j \Lambda_{ak} + (m+2) b_{ij} \lambda^i_{ak}) \Lambda^a, \ \nabla_\delta \widetilde{A}_{ij} = 0; \qquad (37)$$

$$A = b^{ij} \widetilde{A}_{ij}, \quad \nabla_\delta A = A \pi^{n+1}_{n+1}; \qquad (38)$$

$$A_{ij} = \widetilde{A}_{ij} - \frac{1}{m} b_{ij} A, \ \nabla_\delta A_{ij} = 0; \ b^{ij} A_{ij} = 0; \qquad (39)$$

$$\widetilde{\tau}_k = b^{it} b^{js} b_{tsk} \widetilde{A}_{ij}, \ \nabla_\delta \widetilde{\tau}_k = \widetilde{\tau}_k \pi^{n+1}_{n+1}; \qquad (40)$$

$$\tau^p = \frac{1}{2} b^{pk} \widetilde{\tau}_k, \ \nabla_\delta \tau^p = \tau^p \pi^{n+1}_{n+1}; \qquad (41)$$

$$\tau_i = b_{is} \tau^s, \quad \nabla_\delta \tau_i = 0; \qquad (42)$$

$$W^i = \frac{1}{m+2} b^i + \tau^i, \quad \nabla_\delta W^i = W^i \pi^{n+1}_{n+1} + \pi^i_{n+1}; \qquad (43)$$

$$W_i = b_{ik} W^k, \ \nabla_\delta W_i = b_{ik} \pi^k_{n+1}; \ W_i = \frac{b_i}{m+2} + \tau_i. \qquad (44)$$

При условии $m = n$, когда базисная поверхность V_m гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ является гиперповерхностью, квазитензор W^i определяет директрису Вильчинского [1], [2]. В силу этого прямую $W_1(A) = \{A, \vec{n} = W^i \vec{e}_i + \Lambda^a \vec{e}_a + \vec{e}_{n+1}\}$ назовем нормалью Вильчинского регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

Аналогично, продолжая уравнения (30), вводим систему величин $\widetilde{c}_k$ 3-го порядка и затем последовательно находим новые геометрические объекты 3-го порядка гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$:

$$c_k = \widetilde{c}_k - \Lambda_{ak} \Lambda^a; \ c^i = b^{ik} c_k, \ \nabla_\delta c^i = c^i \pi^{n+1}_{n+1} - \pi^i_{n+1}, \qquad (45)$$

$$h_k = \frac{1}{2}\left(c_k + \frac{b_k}{m+2}\right), \quad \nabla_\delta h_k = 0; \tag{46}$$

$$h^i = b^{ik} h_k, \quad \nabla_\delta h^i = h^i \pi^{n+1}_{n+1}; \tag{47}$$

$$J_k = \frac{1}{2}\left(c_k - \frac{1}{m+2} b_k\right), \quad \nabla_\delta J_k = -b_{kt}\pi^t_{n+1}; \tag{48}$$

$$J^i = b^{ik} J_k, \quad \nabla_\delta J^i = J^i \pi^{n+1}_{n+1} - \pi^i_{n+1}; \tag{49}$$

$$\hat{c}_i = b_i + \tau_i, \quad \nabla_\delta \hat{c}_i = 0. \tag{50}$$

Квазитензор c^i при $m=n$ определяет аффинную нормаль 4-го порядка гиперповерхности $V_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ [2]. Поэтому по аналогии прямую $\mathfrak{A}_1 = \{A, \vec{n} = c^i\vec{e}_i + \Lambda^a\vec{e}_a + \vec{e}_{n+1}\}$, определяемую квазитензором c^i (45), назовем аффинной нормалью 3-го порядка гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Так как при $m=n$ квазитензор J^i определяет проективную нормаль 4-го порядка гиперповерхности $V_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ [2], то аналогично будем говорить, что квазитензор J^i (49) 3-го порядка определяет проективную нормаль $\Pi_1 = \{A, \vec{n} = J^i\vec{e}_i + \Lambda^a\vec{e}_a + \vec{e}_{n+1}\}$ гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

Следуя работам [1], [2], можно построить канонический пучок одномерных проективных нормалей, определяемый в каждой точке A базисной поверхности V_m регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ инвариантным вектором $\vec{n}(\sigma)$:

$$\vec{n} = [(\sigma-1)\ell^i + \sigma J^i]\vec{e}_i + \Lambda^a\vec{e}_a + \vec{e}_{n+1}, \tag{51}$$

где σ -инвариант.

В частности, отсюда выделяется при $\sigma = 0$ нормаль Вильчинского W_1, а при $\sigma = 1$ -проективная нормаль Π_1. Аффинная нормаль B_1 Бляшке, определяемая вектором $\vec{P}$ (34), вообще говоря, не входит в пучок (51). Для регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ имеет место предложение: для того, чтобы нормаль Вильчинского W_1 совпадала с нормалью Бляшке B_1, необходимо и достаточно, чтобы $\tau^i = 0$, а для совпадения проективной нормали Π_1 с нормалью Бляшке B_1 необходимо и достаточно, чтобы $h^i = 0$.

Если одновременно $\tau^i = 0$ и $h^i = 0$, то все прямые канонического пучка (51) регулярной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$ совпадают с нормалью Бляшке B_1.

При $m=n$ выводы данной работы согласуются с результатами работы [2]. Отметим, что инвариантный пучок (51) одномерных нормалей 3-го порядка в каждой точке $A \in V_m$ порождает инвариантный пучок $(n-m+1)$-мерных нормалей N_{n-m+1} 3-го порядка данной гиперполосы $H_m \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск.матем.о-ва, 1953, т.2, с.275-382.

2. А л ш и б а я Э.Д. Дифференциальная геометрия гиперповерхности в многомерном аффинном пространстве.-Тр. Тбилисского гос.ун-та, 1968, т.129, с.319-341.

3. В а г н е р В.В. Теория поля локальных гиперполос.-В кн.: Тр.семин.по векторн. и тензорн.анализу, вып.8, 1950, с.97-272.

4. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л., Гостехиздат, 1950.

5. О л о н и ч е в П.М. Общеаффинная и центрально-проективная теория гиперполос. ДАН СССР, т.80, №2, 1951, с.165-168.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 10 1979

УДК 513.73

Л.В. С б и т н е в а

СОВЕРШЕННЫЕ **S** – СТРУКТУРЫ

Цель настоящей работы – найти необходимые и достаточные условия на структуру геодуля канонической редуктивной связности касательно-регулярной **S** – структуры /в частности, симметрического пространства/.

I. Левая квазигруппа это алгебра $\langle M, \cdot, \backslash \rangle$ с двумя бинарными операциями – умножением $\cdot$ и левым делением $\backslash$ – и тождествами $x \backslash (x \cdot y) = y, \quad x \cdot (x \backslash y) = y.$ /1/

Если ещё имеется бинарная операция правого деления $/$ и выполняются тождества $(x \cdot y)/y = x, \; (x/y) \cdot y = x,$ /2/

то алгебра $\langle M, \cdot, \backslash, / \rangle$ называется квазигруппой /см. 10 /. Левая квазигруппа $(\mathcal{L}.\,Q.)$ /квазигруппа $(Q.)$/ называется леводистрибутивной $(\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}, \mathcal{L}, Q.)$, если имеет место тождество

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad /3/$$

Левая квазигруппа /квазигруппа/ идемпотентна $(\mathcal{Id}, \mathcal{L}, Q.)$, если

$$x \cdot x = x. \qquad /4/$$

Введём левые и правые сдвиги в квазигруппе $/ \mathcal{L}.\,Q.\,/$

$$S_x y \stackrel{def}{=} x \cdot y, \quad \tau_y x \stackrel{def}{=} x \cdot y. \qquad /5/$$

<u>Определение I.</u> Гладкая $\mathcal{Id}.\mathcal{L}.Q.\langle M, \cdot, \backslash \rangle$ называется гладкой **S** – структурой многообразия M, если $\forall x \in M\; \exists$ её окрестность U_x такая, что $x \cdot y = y \Rightarrow y = x$ для $\forall y \in U_x$.