УДК 514.75

О. О. Белова[1]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
olgaobelova@mail.ru

Об аналоге связности Нейфельда в пространстве центрированных плоскостей с двухиндексными базисно-слоевыми формами

В n-мерном проективном пространстве рассмотрено пространство центрированных плоскостей. Над ним возникает главное расслоение, двухиндексные структурные формы которого входят также в состав базисных форм. В этом расслоении задается аналог связности Нейфельда. Доказано, что аналог сильной нормализации Нордена индуцирует данный аналог связности Нейфельда.

Ключевые слова: проективное пространство, пространство центрированных плоскостей, аналог сильной нормализации Нордена, связность Нейфельда.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{ A, A_I \}$ ($I, \ldots = \overline{1, n}$), инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \ \ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A\,, \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω^I, ω_I^J, ω_I удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$ (см., напр., [1]):

$$\begin{gathered} D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \ \ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \\ D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I. \end{gathered} \tag{2}$$

Поступила в редакцию 01.04.2018 г.

В пространстве P_n рассмотрим пространство Π [2] центрированных плоскостей L_m^*. Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$ $(a,... = \overline{1, m};\ \alpha,... = \overline{m+1, n})$, помещая вершину A в центр m-мерной плоскости, а вершины A_a — на центрированную плоскость $L_m{}^*$. Из формул (1) следует, что для пространства Π формы ω^a, ω^α, ω_a^α являются базисными, $\dim \Pi = n + (n-m)m$.

Базисные формы удовлетворяют вытекающим из (2) структурным уравнениям (ср. [3])

$$D\omega^\alpha = \omega^a \wedge \Omega_a^\alpha + \omega^\beta \wedge \Omega_\beta^\alpha,\ D\omega^a = \omega^b \wedge \Omega_b^a + \omega^\alpha \wedge \Omega_\alpha^a,$$
$$D\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge \Omega_{a\beta}^{\alpha b} + \omega^\alpha \wedge \Omega_a, \tag{3}$$

где

$$\Omega_a^\alpha = \omega_a^\alpha,\ \Omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha,\ \Omega_b^a = \omega_b^a,\ \Omega_\alpha^a = \omega_\alpha^a,\ \Omega_a = -\omega_a, \tag{4}$$
$$\Omega_{a\beta}^{\alpha b} = \delta_a^b \Omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \Omega_a^b.$$

В данном случае двухиндексные формы $\Omega_a^\alpha = \omega_a^\alpha$ являются базисно-слоевыми [4; 5].

Находим внешние дифференциалы от форм (4):

$$D\Omega_a^\alpha = \Omega_b^\beta \wedge \Omega_{\beta a}^{\alpha b} + \omega^\alpha \wedge \Omega_a,$$
$$D\Omega_\beta^\alpha = \Omega_\beta^\gamma \wedge \Omega_\gamma^\alpha + \omega^\gamma \wedge \Omega_{\beta\gamma}^\alpha + \omega^a \wedge \Omega_{\beta a}^\alpha - \omega_a^\alpha \wedge \Omega_\beta^a,$$
$$D\Omega_b^a = \Omega_b^c \wedge \Omega_c^a + \omega^\alpha \wedge \Omega_{b\alpha}^a + \omega^c \wedge \Omega_{bc}^a + \omega_b^\alpha \wedge \Omega_\alpha^a, \tag{5}$$
$$D\Omega_\alpha^a = -\Omega_\beta^b \wedge \Omega_{b\alpha}^{\beta a} + \omega^a \wedge \Omega_\alpha,\ D\Omega_a = \Omega_a^b \wedge \Omega_b + \omega_a^\alpha \wedge \Omega_\alpha,$$

где

$$\Omega_{\beta\gamma}^\alpha = -\delta_\beta^\alpha \omega_\gamma - \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta,\ \Omega_{\beta a}^\alpha = \delta_\beta^\alpha \Omega_a,$$
$$\Omega_{bc}^a = -\delta_b^a \omega_c - \delta_c^a \omega_b,\ \Omega_{b\alpha}^a = -\delta_b^a \omega_\alpha,\ \Omega_\alpha = -\omega_\alpha.$$

Над пространством центрированных плоскостей Π возникает главное расслоение L (Π) со структурными уравнениями (3, 5), типовым слоем которого является группа Ли L, действующая в касательном пространстве к Π , $\dim \mathrm{L} = n^2 + m$. В главном расслоении L (Π) с многомерным приклеиванием [6; 7] зададим аналог связности Нейфельда [8—10] способом Лаптева — Лумисте.

Введем новые формы

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_a^\alpha &= \Omega_a^\alpha - \Gamma_{a\beta}^\alpha \omega^\beta - \Gamma_{ab}^\alpha \omega^b - L_{a\beta}^{\alpha b} \omega_b^\beta , \\
\tilde{\Omega}_\beta^\alpha &= \Omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma - \Gamma_{\beta a}^\alpha \omega^a - L_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega_a^\gamma , \\
\tilde{\Omega}_b^a &= \Omega_b^a - \Gamma_{b\alpha}^a \omega^\alpha - \Gamma_{bc}^a \omega^c - L_{b\alpha}^{ac} \omega_c^\alpha , \\
\tilde{\Omega}_\alpha^a &= \Omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha\beta}^a \omega^\beta - \Gamma_{\alpha b}^a \omega^b - L_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta , \\
\tilde{\Omega}_a &= \Omega_a - L_{a\alpha} \omega^\alpha - L_{ab} \omega^b - \Pi_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha .
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Находя дифференциалы форм (6), получаем, что связность в главном расслоении L (Π) задается с помощью поля объекта связности $\Gamma = \{ \Gamma_{a\beta}^\alpha ,\ \Gamma_{ab}^\alpha ,\ L_{a\beta}^{\alpha b} ,\ \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha ,\ \Gamma_{\beta a}^\alpha ,\ L_{\beta\gamma}^{\alpha a} ,\ \Gamma_{b\alpha}^a ,\ \Gamma_{bc}^a ,\ L_{b\alpha}^{ac} ,$ $\Gamma_{\alpha\beta}^a ,\ \Gamma_{\alpha b}^a ,\ L_{\alpha\beta}^{ab} ,\ L_{a\alpha} ,\ L_{ab} ,\ \Pi_{a\alpha}^b \}$ на базе Π сравнениями

$$
\begin{gathered}
\Delta\Gamma_{a\beta}^\alpha - \Gamma_{ab}^\alpha \Omega_\beta^b - L_{a\beta}^{\alpha b} \Omega_b - \delta_\beta^\alpha \omega_a \equiv 0 , \Delta\Gamma_{ab}^\alpha \equiv 0 , \Delta L_{a\beta}^{\alpha b} \equiv 0 , \\
\Delta\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta a}^\alpha \Omega_\gamma^a - L_{\beta\gamma}^{\alpha a} \Omega_a + \Omega_{\beta\gamma}^\alpha \equiv 0 , \Delta\Gamma_{\beta a}^\alpha + \delta_\beta^\alpha \Omega_a \equiv 0 , \\
\Delta L_{\beta\gamma}^{\alpha a} - \delta_\gamma^\alpha \Omega_\beta^a \equiv 0 , \Delta\Gamma_{b\alpha}^a - \Gamma_{bc}^a \Omega_\alpha^c - L_{b\alpha}^{ac} \Omega_c + \delta_b^a \Omega_\alpha \equiv 0 , \\
\Delta\Gamma_{bc}^a + \delta_b^a \Omega_c + \delta_c^a \Omega_b \equiv 0 , \Delta L_{b\alpha}^{ac} + \delta_b^c \Omega_\alpha^a \equiv 0 , \\
\Delta\Gamma_{\alpha\beta}^a - \Gamma_{\alpha b}^a \Omega_\beta^b - L_{\alpha\beta}^{ab} \Omega_b - \Gamma_{b\beta}^a \Omega_\alpha^b + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \Omega_\gamma^a \equiv 0 , \\
\Delta\Gamma_{\alpha b}^a - \Gamma_{cb}^a \Omega_\alpha^c + \Gamma_{\alpha b}^\beta \Omega_\beta^a + \delta_b^a \Omega_\alpha \equiv 0 , \Delta L_{\alpha\beta}^{ab} + L_{\alpha\beta}^{\gamma b} \Omega_\gamma^a - L_{c\beta}^{ab} \Omega_\alpha^c \equiv 0 , \\
\Delta L_{a\alpha} - L_{ab} \Omega_\alpha^b + (\Gamma_{a\alpha}^b - \Pi_{a\alpha}^b) \Omega_b \equiv 0 , \\
\Delta L_{ab} + \Gamma_{ab}^c \Omega_c \equiv 0 , \Delta\Pi_{a\alpha}^b + L_{a\alpha}^{cb} \Omega_c + \delta_a^b \Omega_\alpha \equiv 0 ,
\end{gathered}
\tag{7}
$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^a , ω^α , ω_a^α .

Осуществим аналог сильной нормализации Нордена [11] данного многообразия полями следующих геометрических образов: ($n-m-1$)-плоскостью P_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L_m^*, и ($m-1$)-плоскостью P_{m-1}, принадлежащей плоскости L_m^* и не проходящей через ее центр. Плоскость P_{n-m-1} зададим совокупностью точек $B_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha A$, а плоскость P_{m-1} — точками $B_a = A_a + \lambda_a A$. Находя дифференциалы базисных точек оснащающих плоскостей и требуя относительную инвариантность этих плоскостей, получим

$$\Delta\lambda_\alpha^a + \Omega_\alpha^a \equiv 0\,,\ \Delta\lambda_\alpha - \lambda_\alpha^a \Omega_a - \omega_\alpha \equiv 0\,,\ \Delta\lambda_a - \Omega_a \equiv 0\,. \qquad (8)$$

Аналог сильной нормализации Нордена, задаваемой полем квазитензора $\lambda = \{\lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha, \lambda_a\}$ на многообразии Π, позволяет охватить компоненты объекта связности Γ:

$$\Gamma_{a\beta}^\alpha = -\delta_\beta^\alpha \lambda_a\,,\ \Gamma_{ab}^\alpha = 0\,,\ L_{a\beta}^{\alpha b} = 0\,,$$

$$L_{\beta\gamma}^{\alpha a} = -\delta_\gamma^\alpha \lambda_\beta^a\,,\ \Gamma_{\beta a}^\alpha = -\delta_\beta^\alpha \lambda_a\,, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = -\delta_\gamma^\alpha \lambda_\beta - \delta_\beta^\alpha \eta_\gamma\,,$$

$$L_{b\alpha}^{ac} = \delta_b^c \lambda_\alpha^a\,,\ \Gamma_{bc}^a = -\delta_b^a \lambda_c - \delta_c^a \lambda_b\,,\ \Gamma_{b\alpha}^a = -\delta_b^a \eta_\alpha + \lambda_\alpha^a \lambda_b\,,$$

$$L_{\alpha\beta}^{ab} = -\lambda_\alpha^b \lambda_\beta^a\,,\ \Gamma_{\alpha b}^a = -\delta_b^a \eta_\alpha\,,\ \Gamma_{\alpha\beta}^a = -\lambda_b \lambda_\alpha^b \lambda_\beta^a\,, \qquad (9)$$

$$\Pi_{a\alpha}^b = -\delta_a^b \lambda_\alpha\,,\ L_{ab} = \lambda_a \lambda_b\,,\ L_{a\alpha} = -\lambda_a \lambda_b \lambda_\alpha^b\,,$$

где $\eta_\alpha = \lambda_\alpha - \lambda_\alpha^a \lambda_a$. Функции (9) в силу сравнений (8) удовлетворяют дифференциальным сравнениям (7). Таким образом, справедлива

Теорема. *Аналог сильной нормализации пространства центрированных плоскостей индуцирует аналог связности Нейфельда в ассоциированном расслоении* L *(*Π*).*

Замечание. Известно (см., напр., [12]), что связность Картана определяется в главном расслоении, имеющем однородное факторрасслоение с одинаковой размерностью слоя и базы и фиксированной секущей поверхностью. В статье [7] приравниванием некоторых базисных и слоевых форм, а также при введении особых условий на часть компонент структурных констант строится расслоение с приклеиванием, в котором задается связность, обобщающая связность Картана. Для пространства Π центрированных плоскостей $\overset{*}{L}_m$ двухиндексные формы ω_a^α естественным образом входят в состав как базисных, так и слоевых форм. Поэтому в данном случае связность, построенная с использованием теоремы Картана — Лаптева, является связностью картановского типа.

Список литературы

1. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

2. *Belova O.* Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centred planes // Journal of Mathematical Sciences. 2009. **162**: 5. P. 605—632.

3. *Белова О.О.* Индуцирование аналога связности Нейфельда в пространстве центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 24—28.

4. *Shevchenko Yu.I.* Degeneration of Stolyarov's plane affine connection // J. Math. Sci. 2011. **177**:5. P. 753—757.

5. *Шевченко Ю.И.* Полуканоническая нормальная аффинная связность, ассоциированная с распределением // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физ.-мат. науки. 2010. №4. С. 166—172.

6. *Шевченко Ю.И.* Об обобщениях проективной связности Картана на гладком многообразии // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физ.-мат. науки. 2014. №10. С. 60—68.

7. *Шевченко Ю.И.* Обобщенная связность Картана // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2011. Вып. 42. С. 159—172.

8. *Нейфельд Э.Г.* Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства // Известия вузов. Матем. 1976. №11. С. 48—55.

9. *Норден А.П.* Проективные метрики на грассмановых многообразиях // Там же. 1981. №11. С. 80—83.

10. *Малахальцев М.А.* О внутренней геометрии связности Нейфельда // Известия вузов. Матем. 1986. №2. С. 67—69.
11. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.
12. *Евтушик Л.Е.* Связности Картана и геометрия пространств Кавагути, полученная методом подвижного репера // Итоги науки и техники. Сер.: Соврем. матем. и ее прил. Темат. обзоры. 2002. Т. 30. С. 170—204.

O. Belova[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo ul., Kaliningrad, 236016, Russia
olgaobelova@mail.ru

About an analogue of Neifeld's connection on the space of centred planes with two-index basic-fibre forms

Submitted on April 1, 2018

Space *П* of centred *m*-planes is considered in the projective space P_n. Principal fiber bundle is arised above it. Two-index structural forms of the principal fiber are included also into structure of basic forms. An analogue of Neifeld's connection is given in this fibering. The case when two-index forms are basic-fibre forms is considered. It is proved that the analog of Norden strong normalization of the space of centred planes induces the analogue of Neifeld's connection.

Keywords: projective space, space of centred planes, analogue of Norden strong normalization, Neifeld's connection.

References

1. *Shevchenko, Yu.I.:* Clothings of centreprojective manifolds. Kaliningrad (2000) (in Russian).
2. *Belova, O.:* Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centred planes. J. Math. Sci., **162**: 5, 605—632 (2009).
3. *Belova, O.O.:* Inducing an analog of Neifeld's connection on the space of centred planes. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 47, 24—28 (2016) (in Russian).

4. *Shevchenko, Yu. I.:* Degeneration of Stolyarov's plane affine connection. J. Math. Sci., **177**:5, 753—757 (2011).

5. *Shevchenko, Yu. I.:* Semi-canonical normal affine connection associated with distribution. IKBFU's Vestnik: Physics, mathematics and technology, 4, 166—172 (2010) (in Russian).

6. *Shevchenko, Yu. I.:* About generalizations of Cartan projective connection on a smooth manifold. IKBFU's Vestnik: Physics, mathematics and technology, 10, 60—68 (2014) (in Russian).

7. *Shevchenko, Yu. I.:* Generalized Cartan connection. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 42, 159—172 (2011) (in Russian).

8. *Neifeld, E. G.:* Affine connections on the normalized manifolds of planes of the projective space. News of High Schools. Math. 11, 48—55 (1976) (in Russian).

9. *Norden, A. P.:* Projective metrics on Grassmann manifolds. News of High Schools. Math. 11, 80—83 (1981) (in Russian).

10. *Malakhaltsev, M. A.:* About the internal geometry of Neifeld's con-nection. News of High Schools. Math. 2, 67—69 (1986) (in Russian).

11. *Norden, A. P.:* Spaces with an affine connection. Nauka, Moscow (1976) (in Russian).

12. *Evtushik, L. E.*: Cartan connection and geometry of Kavaguti spaces received by the moving frame method. Itogi nauki I tekhniki. Seriya "Sovremennaya matematika I ee prilozheniya. Tematicheskie obzory 30, 170—204 (2002) (in Russian).