Раскрывая (*) по лемме Картана, будем иметь:

$$d\tilde{B}^i_j - \tilde{B}^i_k \omega^k_j = t^i_{jl}\omega^l , \text{ где } t^i_{jl} = t^i_{jl} .$$

Доказано, что

$$\hat{\hat{b}}{}^a_{ij} = B^k_i B^l_j b^a_{kl} ,$$

$$\hat{a}^j_{ik} = -B^l_i B^m_k t^j_{lm} .$$

Если обозначим $\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j$ через $\hat{\hat{\gamma}}_{ij}$, то $\hat{\gamma}_{ij} = \sum\limits_k B^k_i B^k_j$.

6. Рассмотрим случай, когда матрица $\mathcal{A}$ ортогональная. В этом случае V_2 налагается на плоскость, а на p -мерной поверхности новая сеть будет геодезической. Кроме того, на V_p в E_n новая сеть будет чебышевской тогда и только тогда, когда она получебышевская (то есть достаточно, чтобы $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ векторов $\vec{a}_{12}, \dots, \vec{a}_{1p-1}, \vec{a}_{23}, \dots, \vec{a}_{2p-1}, \dots, \vec{a}_{p-2p-1}$ из векторов $\vec{a}_{ij}$ при $i \neq j$ были равны нулю).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б а з ы л е в В.Т. Об одном свойстве геодезических линий на многомерных поверхностях.- Уч. записки МГПИ им. В.И.Ленина, 1, № 374, 1970, с.41-52.

2. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве.- Лит. матем. сб., 6, № 4, 1966, с.475-491.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.10 1979

УДК 513.73

Е.В.С к р ы д л о в а

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ КВАДРИКОЙ И ПРЯМОЙ

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрим частный класс вырожденных [1] конгруэнций $(QL)_{1,2}$, порожденных квадрикой Q, описывающей однопараметрическое семейство, и прямой L, описывающей конгруэнцию.

Вырожденные конгруэнции $(QL)_{1,2}$ характеризуются небиективным отображением, ставящим в соответствие каждой прямой L единственную квадрику Q, полным прообразом которой является некоторое однопараметрическое семейство $(L)_Q$ прямых L.

Изучение конгруэнции $(QL)_{1,2}$ проводится в подвижном репере $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, в котором вершины A_3 и A_4 являются точками пересечения прямой L с соответствующей ей квадрикой Q, а вершины A_1 и A_2 полярно сопряжены им и также принадлежат квадрике.

Уравнение квадрики Q и система пфаффовых уравнений конгруэнции $(QL)_{1,2}$ относительно выбранного репера, с учетом определенной нормировки вершин, могут быть записаны соответственно в виде:

$$x^1 x^2 + x^3 x^4 = 0 , \qquad (1)$$

$$\begin{gathered}
\omega^j_i = \Gamma^j_i \omega^3_4 , \quad \omega^4_3 = \Gamma^4_3 \omega^3_4 , \quad \omega^3_4 = \lambda_k \omega^k , \\
\omega^3_i = \Gamma^3_i \omega^3_4 - \omega^j_4 , \quad \omega^4_i = \Gamma^4_i \omega^3_4 - \omega^j , \qquad (2) \\
\omega^i_4 = \Gamma^i_{4k} \omega^k , \quad \omega^1_1 + \omega^2_2 - \omega^3_3 - \omega^4_4 = b\,\omega^3_4
\end{gathered}$$

Здесь предполагается, что $\omega_4^3 \neq 0$, формы $\omega_3^i \overset{def}{=} \omega^i$ приняты в качестве базисных, $i, j, k = 1,2$, причем $i \neq j$.

Нормируя вершины репера R так, чтобы единичная точка $E_{1,2} = A_1 + A_2$ прямой A_1A_2 была инцидентна касательной плоскости к поверхности $(L)_Q$ в точке A_3, получим

$$\omega_4^3 = \lambda\,(\omega^1 - \omega^2), \quad \lambda \neq 0. \tag{3}$$

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией K назовем вырожденную конгруэнцию $(QL)_{1,2}$, для которой выполняются следующие условия: I/пара прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (L) односторонне расслояема в направлении от (L) к (A_1A_2); 2/координатная сеть на поверхности (A_3) является асимптотической; 3/фокальные точки прямой L гармонически разделяют вершины A_3 и A_4 репера R.

Т е о р е м а 1. Конгруэнция K существует и определяется с произволом одной функции одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия 2/ определения конгруэнции K следует равенство

$$\omega_3^4 = 0, \tag{4}$$

замыкание которого с учетом системы (2) приводит к уравнениям

$$\omega_1^4 = -\omega^2, \quad \omega_2^4 = -\omega^1. \tag{5}$$

Продолжая систему (5), получим

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4 + \omega_1^2 + \omega_2^1 = 0, \tag{6}$$

$$\omega_1^2 = \omega_2^1. \tag{7}$$

Замыкание уравнения (6) приводит к соотношению

$$\omega_1^3 + \omega_2^3 = -\omega_4^1 - \omega_4^2. \tag{8}$$

Дифференцируя уравнения (7), (8) внешним образом, получим

$$\left[2\Gamma_1^2(\omega_1^1 - \omega_2^2) - \Gamma_1^3(\omega^1 + \omega^2)\right] \wedge \omega_4^3 = 0, \tag{9}$$

$$\left[\Gamma_1^3(\omega_1^1 - \omega_2^2) - 2(\omega^1 + \omega^2)\right] \wedge \omega_4^3 = 0, \tag{10}$$

откуда будем иметь

$$4\Gamma_1^2 - (\Gamma_1^3)^2 = 0. \tag{11}$$

Последнюю нормировку вершин репера R осуществим так, чтобы $\Gamma_1^3 = 2$ (из уравнения (10) следует, что $\Gamma_1^3 \neq 0$), тогда $\Gamma_1^2 = 1$. В силу нормировки получим

$$\omega_1^2 = \omega_4^3, \tag{12}$$

$$\omega_1^3 = 2\omega_4^3 - \omega_4^2. \tag{13}$$

Из уравнения (10) находим

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = s\,(\omega^1 - \omega^2) + \omega^1 + \omega^2. \tag{14}$$

Замыкание уравнения (12) приводит к квадратичному равенству

$$\left[\omega_4^4 - \omega_3^3 + 2\,(\omega_4^1 - \omega_4^2)\right] \wedge \omega_4^3 = 0. \tag{15}$$

Условие I/ определения конгруэнции K теперь может быть выражено системой равенств

$$\Gamma_{41}^1 + \Gamma_{42}^1 - \Gamma_{41}^2 - \Gamma_{42}^2 = 0, \quad \Gamma_{41}^1 - \Gamma_{42}^2 = 0, \tag{16}$$

причем в силу условия 3/ того же определения

$$\Gamma_{41}^1 + \Gamma_{42}^2 = 0. \tag{17}$$

Из соотношений (16), (17) будем иметь

$$\Gamma_{41}^1 = \Gamma_{42}^2 = 0, \quad \Gamma_{41}^2 = \Gamma_{42}^1 \overset{def}{=} q. \tag{18}$$

Продолжая систему уравнений

$$\begin{gathered} \omega_4^1 = q\,\omega^2, \quad \omega_4^2 = q\,\omega^1, \quad \omega_4^3 = \lambda\,(\omega^1 - \omega^2), \\ \omega_1^1 - \omega_2^2 = s\,(\omega^1 - \omega^2) + \omega^1 + \omega^2, \quad \omega_4^4 - \omega_3^3 = t\,(\omega_1^1 - \omega^2), \end{gathered} \tag{19}$$

находим, что она непротиворечива лишь при $s = 0$, причем в этом случае

$$t = 1 - 4\lambda, \tag{20}$$

$$dq + (4q-1)\,\omega_4^3 = 0\,. \tag{21}$$

Таким образом, окончательно пфаффова система уравнений конгруэнции K приводится к виду

$$\begin{gathered}\omega_i^j = \omega_4^3, \quad \omega_i^3 = (-1)^j 2\omega_4^3 - \omega_4^j, \quad \omega_i^4 = -\omega^j, \\ \omega_3^4 = 0, \quad \omega_4^i = q\omega^i, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4 + \omega_1^2 + \omega_2^1 = 0, \\ \omega_4^3 = \lambda(\omega^1 - \omega^2), \quad \omega_4^4 - \omega_3^3 = (1-4\lambda)(\omega^1 - \omega^2), \\ \omega_1^1 - \omega_2^2 = \omega^1 + \omega^2, \quad dq + (4q-1)\,\omega_4^3 = 0.\end{gathered} \tag{22}$$

Продолжение системы (22) приводит к единственному уравнению

$$d\lambda = \Lambda\,(\omega^1 - \omega^2), \tag{23}$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 2. Конгруэнция K обладает следующими геометрическими свойствами: I/фокальные точки прямой A_1A_2 гармонически разделяют вершины A_1 и A_2; 2/прямолинейные конгруэнции (A_iA_3), (A_iA_4) параболические; 3/касательные плоскости к поверхностям (A_i) пересекают прямую L в одной и той же точке F_1, являющейся двойной точкой гомографии поверхностей (A_1), (A_2) и фокальной точкой прямой L; 4/ фокальная точка F_2 прямой L является точкой пересечения прямых A_1M_2 и A_2M_1, где M_i -характеристическая точка плоскости $(A_jA_3A_4)$; 5/сложные отношения $(A_1,A_3;B_1,C_1)$ и $(A_2,A_3;B_2,C_2)$, где C_i-точки пересечения с прямыми A_iA_3 касательной плоскости к поверхности (A_4), а B_i -точки пересечения с теми же прямыми касательных плоскостей к поверхностям (A_j) одинаковы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/, 2/ Фокальные точки sA_1+tA_2, sA_i+tA_3, sA_i+tA_4 прямых A_1A_2, A_iA_3, A_iA_4 определяются соответственно уравнениями

$$s^2 - t^2 = 0, \quad s^2 = 0, \quad [s + (-1)^j t]^2 = 0.$$

3/Имеем

$$dA_i\Big|_{\omega^1-\omega^2=0} = \omega_i^i A_i - \omega^i (qA_3 + A_4),$$

причем координаты точки $F_1 = qA_3 + A_4$ удовлетворяют уравнению

$$s^2 - q^2t^2 = 0, \tag{24}$$

определяющему фокальные точки sA_3+tA_4 прямой L.
4/Характеристическая точка M_i плоскости $(A_jA_3A_4)$ определяется формулой

$$M_i = qA_j + (-1)^i\lambda(qA_3 - A_4).$$

Откуда следует, что прямые A_iM_j пересекаются в точке $F_2 = qA_3 - A_4$, которая, в силу уравнения (24), является фокусом прямой L.
5/Касательные плоскости к поверхностям (A_i) и (A_4) определяются соответственно точками

$$\begin{gathered}A_i,\ F_1,\ B_j = (-1)^j\lambda A_j + (2\lambda - q)A_3; \\ A_4,\ C_1 = qA_1 - \lambda A_3, \quad C_2 = qA_2 + \lambda A_3.\end{gathered}$$

Находим

$$(A_i, A_3; B_i, C_i) = \frac{q(2\lambda - q)}{\lambda^2},$$

откуда следует справедливость утверждения 5/ теоремы 2.

Рассмотрим конику C, являющуюся сечением квадрики Q плоскостью (E_{12}, A_3, A_4). Эта коника определяется уравнениями

$$x^1x^2 + x^3x^4 = 0, \quad x^1 - x^2 = 0,$$

и описывает конгруэнцию (C), ассоциированную с конгруэнцией K.

Т е о р е м а 3. Конгруэнция (C) имеет две фокальные поверхности (A_3) и (A_4), причем первая из них является пятикратной.

Доказательство теоремы следует из анализа системы уравнений

$$x^3(x^4)^5=0\,,\quad x^1-x^2=0\,,\; x^1x^2+x^3x^4=0\,,$$

определяющей фокальные точки коники C.

Т е о р е м а 4. Характеристическое многообразие [2] конгруэнции квадрик Ли поверхности (A_3) состоит из четырех прямых линий.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Квадрика Ли поверхности (A_3) задается уравнением

$$x^1x^2+x^3x^4-\lambda x^1x^4+\lambda x^2x^4-\frac{\Lambda+3\lambda^2+2\lambda}{2}(x^4)^2=0\,.$$

Характеристическое многообразие квадрики Ли определяется системой уравнений

$$\begin{aligned}&\lambda(x^1)^2+\lambda(x^2)^2+(2\lambda q+9\lambda\Lambda+\Lambda_1+\Lambda+9\lambda^3+3\lambda^2)(x^4)^2=0,\\ &(x^1+x^2)\left[\lambda x^1-\lambda x^2+(\Lambda+3\lambda^2+\lambda)x^4\right]=0\,.\end{aligned}\qquad(25)$$

Решая систему (25), убеждаемся в справедливости теоремы.

С л е д с т в и е. Так как характеристическое многообразие конгруэнции квадрик Ли поверхности (A_3) представляет собой четверку прямых, то все восемь фокальных [2] точек квадрики Ли могут быть найдены как точки пересечения этой квадрики с прямыми характеристического многообразия.

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.41-49.

2. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.- Тр. геом. семинара. Всес. ин-т научн. и технич. информации, 1974, 6, с.113-133.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. I0 1979

УДК 513.73

М.Р. С о к у ш е в а

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ОТОБРАЖЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

I. Рассмотрим поверхности $V_2\subset E_3$ и $\overline{V}_2\subset\overline{E}_3$, где E_3 и $\overline{E}_3$ - вполне ортогональные подпространства собственно евклидова пространства E_6, имеющие общую точку O. Диффеоморфизму T области $\Omega\subset V_2$ на область $\overline{\Omega}\subset\overline{V}_2$ соответствует поверхность

$$V_2^*=\{x\,|\,\vec{ox}=\vec{ox}_1+\vec{ox}_2\,,\; x_1\in\Omega\,,\; x_2=T(x_1)\in\overline{\Omega}\}\,,$$

называемая графиком отображения T. К поверхностям $V_2, \overline{V}_2, V_2^*$ присоединим соответственно реперы $R=\{x_1,\vec{e}_i\,\vec{e}_3\}$,

$$\overline{R}=\{x_2,\vec{e}_{i+3},\vec{e}_6\},\quad R^*=\{x,\vec{\varepsilon}_i,\vec{\varepsilon}_3,\vec{\varepsilon}_{i+3},\varepsilon_6\},\ (i,\gamma=1,2),$$

причем

$$\vec{e}_i\in T_2(x_1),\;\vec{e}_{i+3}\in T_2(x_2),\;\vec{\varepsilon}_i\in T_2(x)$$

$$\vec{\varepsilon}_i=\vec{e}_i+\vec{e}_{i+3}\,,\;\vec{\varepsilon}_{i+3}=\vec{e}_i-\gamma_{ik}\,\overline{\gamma}^{kt}\,\vec{e}_{t+3}\,,\;\vec{\varepsilon}_3=\vec{e}_3\,,\;\vec{\varepsilon}_6=\vec{e}_6,\quad(1)$$

где $T_2(x_1), T_2(x_2), T_2(x)$ - касательные плоскости к поверхностям $V_2, \overline{V}_2, V_2^*$ в соответствующих точках x_1, x_2, x; $\vec{e}_3, \vec{e}_6$ - единичные векторы нормали к поверхностям V_2 и $\overline{V}_2$; $\vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_{i+3}, \vec{\varepsilon}_6$ лежат в плоскости $T_2^*(x)$ - ортогональном дополнении к касательной плоскости $T_2(x)$ в пространстве E_6.

$$\gamma_{ij}=\vec{e}_i\vec{e}_j\,,\quad\overline{\gamma}_{ij}=\vec{e}_{i+3}\vec{e}_{j+3}\,,\quad g_{ij}=\vec{\varepsilon}_i\cdot\vec{\varepsilon}_j=\gamma_{ij}+\overline{\gamma}_{ij}\qquad(2)$$