4. *Столяров А. В., Глухова Т. Н.* Конформно-дифференциальная геометрия оснащенных многообразий. Чебоксары, 2007.

A. Stolyarov

About one addition to result of M. A. Akivis

An addition to result of M. A. Akivis concerning the set of Darboux cyclides which have the contact of the second order with a hypersurface of conformal space is given.

УДК 514.764.3

А. В. Христофорова

(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)

Нормальные связности на оснащенной в смысле Нордена — Картана гиперповерхности в пространстве аффинной связности

Работа посвящена геометрии нормальных связностей, индуцируемых на оснащенной в смысле Нордена — Картана гиперповерхности в пространстве аффинной связности.

Ключевые слова: гиперповерхность, пространство аффинной связности, нормальная связность, оснащение в смысле Нордена — Картана.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I, J, L, K, T, S = \overline{1, n};\ \bar{I}, \bar{J} = \overline{0, n};\ i, j, l, k, t, s = \overline{1, n-1}.$$

Рассмотрим пространство аффинной связности $A_{n,n}$, заданное системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\{\theta^I, \theta^I_K\}$, подчиненных структурным уравнениям [1]

$$D\theta^I = \theta^K \wedge \theta^I_K + \frac{1}{2} r^I_{ST} \theta^S \wedge \theta^T, D\theta^I_J = \theta^K_J \wedge \theta^I_K + \frac{1}{2} r^I_{JST} \theta^S \wedge \theta^T,$$

$$r^I_{(ST)} = 0, \;\; r^I_{L(ST)} = 0, \;\; \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \ldots \wedge \theta^n \neq 0;$$

r^I_{PQ} и r^I_{KPQ} — тензоры кручения и кривизны пространства $A_{n,n}$.

В соответствии с работой [3] пространство проективной связности $P_{n,n}$, определяемое системой форм Пфаффа $\omega^{\bar{I}}_{\bar{L}}$

$$\omega^I_0 = \theta^I, \; \omega^0_0 = -\frac{1}{n+1} \theta^K_K, \; \omega^0_I = 0, \; \omega^I_L = \theta^I_L - \frac{1}{n+1} \delta^I_L \theta^K_K,$$

представляет собой расширенное пространство аффинной связности $P_{n,n} \equiv \overset{*}{A}_{n,n}$.

Рассмотрим гиперповерхность $V_{n-1} \in A_{n,n}$, заданную в репере первого порядка уравнением [1] $\omega^n_0 = 0$, последовательно продолжая которое, получаем поля фундаментальных геометрических объектов второго $\{\Lambda^n_{kj}\}$, третьего $\{\Lambda^n_{kj}, \Lambda^n_{kjl}\}$ порядков и т. д. Далее будем считать гиперповерхность $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ регулярной ($\Lambda \overset{def}{=} \left|\Lambda^n_{ij}\right| \neq 0$).

Согласно А. В. Столярову [2], оснащение в смысле Нордена — Картана гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ равносильно заданию на ней полей квазитензора ν^i_n, тензора ν^0_i и относительного инварианта ν^0_n:

$$d\nu^i_n - \nu^i_n \omega^n_n + \nu^j_n \omega^i_j + \omega^i_n = \nu^i_{nk} \omega^k_0, \; d\nu^0_i + \nu^0_i \omega^0_0 - \nu^0_j \omega^j_i = \nu^0_{ik} \omega^k_0$$

$$d\nu^0_n + \nu^0_n \omega^0_0 - \nu^0_n \omega^n_n + \nu^s_n \omega^0_s (= 0) = \nu^0_{nk} \omega^k_0. \tag{1}$$

В работе [4] доказано, что на оснащенной в смысле Нордена гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ в расслоениях нормалей I и II родов индуцируются соответственно двойственные нормальные связности $\nabla^{\perp}$ и $\overline{\nabla}^{\perp}$, определяемые системами слоевых форм $\left\{\overset{1}{\theta}{}_n^0, \overset{1}{\theta}{}_n^n\right\}$, $\left\{\overset{2}{\theta}{}_n^0, \overset{2}{\theta}{}_n^n\right\}$. Приведем строение форм связности $\nabla^{\perp}$:

$$\begin{aligned} \overset{1}{\theta}{}_n^0 &= v_n^i \omega_i^0 (=0) - v_i^0 (v_{nj}^i \omega_0^j - v_n^i v_n^j \omega_j^n), \\ \overset{1}{\theta}{}_n^n &= \omega_n^n + v_n^i \omega_i^n - \omega_0^0 + v_i^0 \omega_0^i. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим системы форм Пфаффа $\left\{\overset{1a}{\theta}{}_n^0, \overset{1a}{\theta}{}_n^n\right\}, a = \overline{1,4}$:

$$\begin{aligned} \overset{11}{\theta}{}_n^0 &= \overset{1}{\theta}{}_n^0 + v_n^0 \left(\frac{b_i}{n+1} - v_i^0 + \Lambda_{si}^n v_n^s\right)\omega_0^i, \\ \overset{11}{\theta}{}_n^n &= \overset{1}{\theta}{}_n^n + \left(\frac{b_i}{n+1} - v_i^0 + \Lambda_{si}^n v_n^s\right)\omega_0^i; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \overset{12}{\theta}{}_n^0 &= \overset{1}{\theta}{}_n^0 + v_n^0 (B_i - v_i^0 - \Lambda_{ij}^n v_n^j)\omega_0^i, \\ \overset{12}{\theta}{}_n^n &= \overset{1}{\theta}{}_n^n + (B_i - v_i^0 - \Lambda_{ij}^n v_n^j)\omega_0^i; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \overset{13}{\theta}{}_n^0 &= \overset{1}{\theta}{}_n^0 + v_n^0 \left(B_i + \frac{3b_i}{n+1} - 4v_i^0 + 2\Lambda_{ij}^n v_n^j\right)\omega_0^i, \\ \overset{13}{\theta}{}_n^n &= \overset{1}{\theta}{}_n^n + \left(B_i + \frac{3b_i}{n+1} - 4v_i^0 + 2\Lambda_{ij}^n v_n^j\right)\omega_0^i; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\overset{14}{\theta}{}_n^0 = \overset{1}{\theta}{}_n^0 + v_n^0 \Lambda_{ij}^n T_n^j \omega_0^i, \quad \overset{14}{\theta}{}_n^n = \overset{1}{\theta}{}_n^n + \Lambda_{ij}^n T_n^j \omega_0^i; \tag{6}$$

где функции b_i, B_i, T_n^i представляют собой охваты, строение которых приведено в работе [4].

В соотношениях (3) — (6) каждый из наборов функций

$$\begin{aligned} &\overset{1}{\tilde{A}}{}_{ni}^n = \frac{b_i}{n+1} - v_i^0 + \Lambda_{si}^n v_n^s, \quad \overset{2}{\tilde{A}}{}_{ni}^n = B_i - v_i^0 - \Lambda_{ij}^n v_n^j, \\ &\overset{3}{\tilde{A}}{}_{ni}^n = B_i + \frac{3b_i}{n+1} - 4v_i^0 + 2\Lambda_{ij}^n v_n^j, \quad \overset{4}{\tilde{A}}{}_{ni}^n = \Lambda_{ij}^n T_n^j \end{aligned} \tag{7}$$

образует тензор $d\tilde{A}^n_{ni} + \tilde{A}^n_{ni}\omega^0_0 - \tilde{A}^n_{nj}\omega^j_i = \tilde{A}^n_{nij}\omega^j_0$.

Каждая из систем форм (3) — (6) удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева [1]:

$$D\overset{1a}{\theta}{}^0_n = \overset{1a}{\theta}{}^n_n \wedge \overset{1a}{\theta}{}^0_n + \frac{1}{2}\overset{1a}{R}{}^0_{nst}\,\omega^s_0 \wedge \omega^t_0,\ D\overset{1a}{\theta}{}^n_n = \frac{1}{2}\overset{1a}{R}{}^n_{nst}\,\omega^s_0 \wedge \omega^t_0,$$

где компоненты тензора кривизны-кручения $\left\{\overset{1a}{R}{}^{\bar{n}}_{nst}\right\}$, где $\bar{n} = \overline{0,n}$, нормальной связности $\overset{1a}{\nabla}{}^\perp$ имеют следующие строения:

$$\overset{1a}{R}{}^n_{nst} = \overset{1}{\mathfrak{R}}{}^n_{nst} - 2\overset{a}{\tilde{A}}{}^n_{n[st]} + \overset{a}{\tilde{A}}{}^n_{ni}R^i_{0st},$$

$$\overset{1a}{R}{}^0_{nst} = \overset{1}{\mathfrak{R}}{}^0_{nst} + \nu^0_n(\overset{1a}{R}{}^n_{nst} - \overset{1}{\mathfrak{R}}{}^n_{nst}) + 2\overset{a}{\tilde{A}}{}^n_{ni}(\nu^0_{n[s}\delta^i_{t]} -$$

$$-\nu^0_n\nu^0_{[s}\delta^i_{t]} - \nu^0_l\nu^l_{n[s}\delta^i_{t]} - \Lambda^n_{j[s}\delta^i_{t]}\nu^0_n\nu^j_n + \Lambda^n_{j[s}\delta^i_{t]}\nu^0_l\nu^l_n\nu^j_n),$$

$\left\{\overset{1}{\mathfrak{R}}{}^n_{nst}, \overset{1}{\mathfrak{R}}{}^0_{nst}\right\}$ — тензор кривизны-кручения связности $\nabla^\perp$.

Теорема 1. *На оснащенной в смысле Нордена — Картана регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ с полем симметричного тензора Λ^n_{ij} в расслоении нормалей первого рода кроме $\nabla^\perp$ (со слоевыми формами (2)) индуцируются еще четыре нормальные связности $\overset{1a}{\nabla}{}^\perp$, $a = \overline{1,4}$, определяемые системами слоевых форм $\left\{\overset{1a}{\theta}{}^0_n, \overset{1a}{\theta}{}^n_n\right\}$.*

Можно показать [4], что в случае вырождения пространства аффинной связности в аффинное $A_{n,n} \equiv A_n$ для связности $\overset{12}{\nabla}{}^\perp$ справедливо $\overset{12}{R}{}^n_{nst} = 0$. Последнее означает, что нормальная связность $\overset{12}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемая на оснащенной в смысле Нордена — Картана регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_n$ с полем симметричного тензора Λ_{ij}^n, является полуплоской [5].

Согласно [2] условием взаимности нормализации гиперповерхности V_{n-1} с полем симметричного тензора Λ_{ij}^n относительно поля соприкасающихся гиперквадрик [1]

$$\Lambda_{ij}^n x^i x^j + 2\frac{b_i}{n+1} x^i x^n + S_n (x^n)^2 = 2x^0 x^n$$

является выполнение равенств

$$v_k^0 = \frac{b_k}{n+1} + \Lambda_{ks}^n v_n^s. \tag{9}$$

В силу соотношений (4) — (6) находим

$$\overset{11}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \nabla^{\perp} \Leftrightarrow \left\{ \overset{11}{\theta}{}_n^0 \equiv \overset{1}{\theta}{}_n^0, \overset{11}{\theta}{}_n^n \equiv \overset{1}{\theta}{}_n^n \right\} \Leftrightarrow \frac{b_i}{n+1} - v_i^0 + v_n^j \Lambda_{ji}^n = 0,$$

$$\begin{gathered} \overset{12}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{13}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow \left\{ \overset{12}{\theta}{}_n^0 \equiv \overset{13}{\theta}{}_n^0, \overset{12}{\theta}{}_n^n \equiv \overset{13}{\theta}{}_n^n \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B_i - v_i^0 - \Lambda_{ij}^n v_n^j = B_i + \frac{3b_i}{n+1} - 4v_i^0 + 2\Lambda_{ij}^n v_n^j \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{b_i}{n+1} - v_i^0 + \Lambda_{ij}^n v_n^j = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Из соотношений (9), (10) следует

Теорема 2. *Нормальные связности* $\nabla^{\perp}$ *и* $\overset{11}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{12}{\nabla}{}^{\perp}$ *и* $\overset{13}{\nabla}{}^{\perp}$*, индуцируемые в расслоении нормалей первого рода на оснащенной в смысле Нордена — Картана гиперповерхности* $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ *с полем симметричного тензора* Λ_{ij}^n*, совпадают тогда и только тогда, когда нормализация гиперповерхности* $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ *является взаимной.*

Из соотношений (3)— (5) непосредственно следует

$$\overset{11}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \nabla^{\perp} \equiv \overset{12}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow \left\{ \overset{11}{\theta}{}_n^0 \equiv \overset{1}{\theta}{}_n^0 \equiv \overset{12}{\theta}{}_n^0, \overset{11}{\theta}{}_n^n \equiv \overset{1}{\theta}{}_n^n \equiv \overset{12}{\theta}{}_n^n \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b_i}{n+1} - v_i^0 + v_n^j \Lambda_{ji}^n = 0, \\ B_i - v_i^0 - \Lambda_{ij}^n v_n^j = 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\overset{11}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{1}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{13}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow \left\{ \overset{11}{\theta}{}_n^0 \equiv \overset{1}{\theta}{}_n^0 \equiv \overset{13}{\theta}{}_n^0, \overset{11}{\theta}{}_n^n \equiv \overset{1}{\theta}{}_n^n \equiv \overset{13}{\theta}{}_n^n \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b_i}{n+1} - v_i^0 + v_n^j \Lambda_{ji}^n = 0, \\ B_i + \dfrac{3b_i}{n+1} - 4v_i^0 + 2\Lambda_{ij}^n v_n^j = 0, \end{cases} \tag{12}$$

$$\overset{11}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{13}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{12}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow \left\{ \overset{11}{\theta}{}_n^0 \equiv \overset{13}{\theta}{}_n^0 \equiv \overset{12}{\theta}{}_n^0, \overset{11}{\theta}{}_n^n \equiv \overset{13}{\theta}{}_n^n \equiv \overset{12}{\theta}{}_n^n \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b_i}{n+1} - v_i^0 + v_n^j \Lambda_{ji}^n = B_i + \dfrac{3b_i}{n+1} - 4v_i^0 + 2\Lambda_{ij}^n v_n^j, \\ B_i - v_i^0 - \Lambda_{ij}^n v_n^j = B_i + \dfrac{3b_i}{n+1} - 4v_i^0 + 2\Lambda_{ij}^n v_n^j. \end{cases} \tag{13}$$

Функции

$$F_i^0 \overset{def}{=} \frac{1}{2}(B_i + \frac{b_i}{n+1}), \; F_n^i \overset{def}{=} \frac{1}{2}\Lambda_n^{ik}(B_k - \frac{b_k}{n+1}) \tag{14}$$

определяют нормализацию Фубини регулярной гиперповерхности V_{n-1} [2]. Из соотношений (10) следует

$$v_n^i = \frac{1}{2}\Lambda_n^{ik}(B_k - \frac{b_k}{n+1}), \; v_i^0 = \frac{1}{2}(B_i + \frac{b_i}{n+1}), \tag{15}$$

откуда с учетом (14) находим $\nu_n^i \equiv F_n^i, \nu_i^0 \equiv F_i^0$. Если $\nu_n^i \equiv F_n^i, \nu_i^0 \equiv F_i^0$, то тензор $\overset{1}{\tilde{A}}{}_{ni}^n$ (см. функции (7_1)) в силу выражений (9), (15) имеет вид

$$\overset{1}{\tilde{A}}{}_{ni}^n = \frac{b_i}{n+1} - \nu_i^0 + \nu_n^j \Lambda_{ji}^n = B_i - \nu_i^0 - \Lambda_{ij}^n \nu_n^j = 0.$$

Сравнивая последние соотношения с (7_2) и учитывая равенство (10), получим $\overset{1}{\tilde{A}}{}_{ni}^n = \overset{2}{\tilde{A}}{}_{ni}^n = \overset{3}{\tilde{A}}{}_{ni}^n$, то есть $\overset{11}{\nabla^\perp} \equiv \overset{12}{\nabla^\perp} \equiv \overset{13}{\nabla^\perp}$. Аналогично доказывается, что каждое из условий (12), (13) равносильно тому, что поля нормалей I и II родов совпадают с полями нормалей Фубини.

Справедлива следующая

Теорема 3. *На оснащенной в смысле Нордена — Картана гиперповерхности* $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ *с полем симметричного тензора* Λ_{ij}^n *совпадение любой тройки нормальных связностей из совокупности* $\{\nabla^\perp, \overset{11}{\nabla^\perp}, \overset{12}{\nabla^\perp}, \overset{13}{\nabla^\perp}\}$ *равносильно одному из следующих предложений:*

1) *нормализация гиперповерхности* $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ *есть нормализация Фубини;*

2) *рассматриваемая четверка нормальных связностей вырождается в одну.*

Справедливость второго условия теоремы 4 следует из самих равенств (10) — (13).

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. общества. 1953. Т. 2. С. 275—382.

2. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

3. *Столяров А. В.* Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности // Вестник ЧГПУ. Чебоксары, 2005. №4. С. 21—27.

4. *Христофорова А. В.* Двойственная геометрия регулярной гиперповерхности в пространстве аффинной связности. Чебоксары, 2011.

5. *Чакмазян А. В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий. Ереван, 1990.

A. Khristoforova

Normal connections on the hypersurface equipment in sense Norden — Cartan in the space of affine connection

This work is devoted to the geometry of normal connections induced by the equipment in sense Norden — Cartan of hypersurface in the space of affine connection.

УДК 514.75

М. А. Чешкова

(Алтайский государственный университет, г. Барнаул)

К геометрии каналовой поверхности

В евклидовом пространстве рассматривается каналовая поверхность. В процессе исследования используется система компьютерной математики *Maple*.

Ключевые слова: каналовая поверхность, сфера, циклида Дюпена.

Каналовая гиперповерхность исследуется как гиперповерхность, которая является огибающей однопараметрического семейства гиперсфер [1, с. 379; 2].

Обозначим через $\rho(s)$ — радиус-вектор кривой γ — геометрического места центров семейства, $R(s)$ — радиус соответствующей гиперсферы (s — длина дуги кривой γ). Уравнение семейства гиперсфер запишется в виде