

О МЕХАНИЧЕСКИХ РЕЗОНАНСАХ И АНТИРЕЗОНАНСАХ

Поступила в редакцию 28.01.2021 г.

Рецензия от 26.02.2021 г.

Для исследования резонансных и околорезонансных явлений использован символический (комплексный) метод, позволяющий существенно повысить продуктивность, упростить и формализовать математические преобразования. Рассмотрены параллельное и последовательное соединения элементов механической системы с источником силы либо источником скорости в качестве источника внешнего механического гармонического воздействия. Описаны четыре режима – резонансы и антирезонансы сил и скоростей. Использование символического (комплексного) метода существенно упростило исследование резонансных и околорезонансных явлений, в частности позволило глубоко унифицировать и формализовать рассмотрение различных механических систем. Громоздкие и трудоемкие операции, связанные с составлением и решением дифференциальных уравнений, заменены простыми алгебраическими преобразованиями. В основе метода лежит механический аналог закона Ома в комплексном представлении и понятие о механических реактансе, резистансе, импедансе, сусцептансе, кондактансе и адмиттансе.

79

To study resonance and near-resonance phenomena, a symbolic (complex) method was used, which makes it possible to significantly increase productivity, simplify and formalize mathematical transformations. Parallel and sequential connections of elements of a mechanical system with a source of force or a source of speed as a source of external mechanical harmonic action are considered. Four modes are described – resonances and antiresonances of forces and velocities. The use of the symbolic (complex) method has significantly simplified the study of resonance and near-resonance phenomena, in particular, it has made it possible to deeply unify and formalize the consideration of various mechanical systems. The cumbersome and time-consuming operations associated with the preparation and solution of differential equations have been replaced by simple algebraic transformations. The method is based on the mechanical analogue of Ohm's law in a complex representation and the concept of mechanical reactance, resistance, impedance, susceptance, conductance and admittance.

Ключевые слова: реактанс, резистанс, импеданс, сусцептанс, кондактанс, адмиттанс

Keywords: reactance, resistivity, impedance, susceptance, conductance, admittance

Введение

В установившемся режиме при гармонических воздействиях удобно использовать комплексное представление величин [1–3]. При этом символический (комплексный) метод существенно упрощает исследо-



вание резонансных и околорезонансных явлений [4–11]. В отличие от классического метода здесь не возникает необходимости в составлении и решении дифференциальных уравнений [12].

По аналогии с электротехникой гармоническую величину можно представить в виде

$$a = A \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im} [A e^{i(\omega t + \varphi)}],$$

где $A e^{i(\omega t + \varphi)}$ – вращающийся в комплексной плоскости вектор, ω – циклическая частота, φ – начальная фаза.

Векторы в комплексной плоскости принято изображать для нулевого момента времени. При этом величина $A e^{i(\omega t + \varphi)} = A e^{i\varphi} = \dot{A}$ называется *комплексной амплитудой*.

В основе исследования механических систем лежит дуально-инверсный аналог закона Ома для участка электрической цепи

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \dot{F} \underline{y}, \quad (1)$$

где \dot{V} и \dot{F} – комплексные амплитуды скорости и силы, \underline{z} и \underline{y} – механические импеданс (impedance) и адмиттанс (admittance) в комплексном представлении [1–3].

Над комплексными величинами, не являющимися изображениями синусоиды, точка не ставится, такие величины подчеркиваются.

Далее рассматриваются параллельное (рис. 1) и последовательное (рис. 2) соединения элементов механической системы [1; 2].

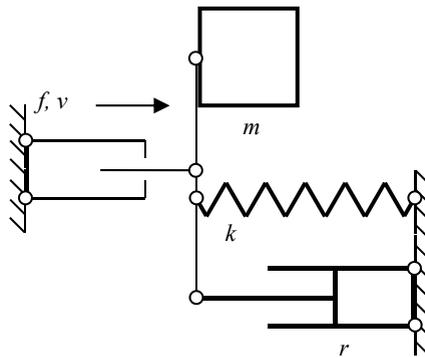


Рис. 1. Параллельное соединение

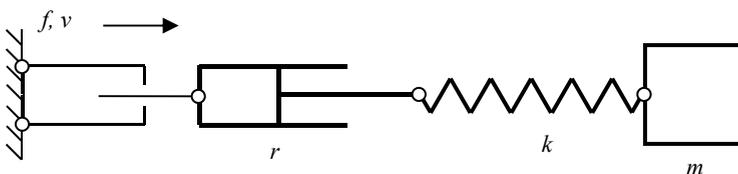


Рис. 2. Последовательное соединение



Аналитические описания резонанса в курсах теоретической механики соответствуют параллельному соединению.

Источниками внешнего механического гармонического воздействия на систему выступают либо источник силы, либо источник скорости.

Существуют устройства, в удовлетворительном приближении способные выполнять функции источников силы и источников скорости. Источником гармонической скорости может выступать привод с кривошипно-кулисным механизмом и маховиком с большим моментом инерции. Источником гармонической силы может выступать шток пневмоцилиндра, полость которого сообщается с полостью другого пневмоцилиндра, диаметр которого неизмеримо выше, чем у первого, а поршень совершает гармонические колебания.

Источник силы характеризуется комплексной амплитудой силы

$$\dot{F} = Fe^{i0}. \quad (2)$$

Источник скорости характеризуется комплексной амплитудой скорости

$$\dot{V} = Ve^{i0}. \quad (3)$$

Механические гармонические воздействия, описываемые в курсах теоретической механики, соответствуют источнику силы.

Параллельное соединение характеризуется следующими величинами [1; 2].

Инертный реактанс (reactance) —

$$\underline{x}_m = \omega t e^{i\pi/2} = x_m e^{i\pi/2}, \quad (4)$$

где m — масса.

Упругий реактанс —

$$\underline{x}_k = \frac{k}{\omega} e^{-i\pi/2} = x_k e^{-i\pi/2}, \quad (5)$$

где k — коэффициент упругости.

Механический резистанс (resistance) —

$$\underline{r} = r e^{i0} = r,$$

где r — коэффициент вязкого сопротивления.

Механический импеданс —

$$\underline{z} = Ze^{i\varphi}, \text{ где } Z = \sqrt{r^2 + (x_m - x_k)^2}, \varphi = \arctg \frac{x_m - x_k}{r}. \quad (6)$$

Последовательное соединение характеризуется следующими величинами [1; 2].

Инертный сассептанс (susceptance) —

$$\underline{b}_m = \frac{1}{\omega t} e^{-i\pi/2} = b_m e^{-i\pi/2}. \quad (7)$$



Упругий сассептанс —

$$\underline{b}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\pi/2} = b_k e^{i\pi/2}. \quad (8)$$

Механический кондактанс (conductance) —

$$\underline{g} = g e^{i0} = g.$$

Для элемента (инертного, упругого, резистивного), рассматриваемого вне связи с другими механическими элементами, $\underline{b}_m = 1/\underline{x}_m$, $\underline{b}_k = 1/\underline{x}_k$, $\underline{g} = 1/\underline{r}$. В системе, включающей несколько элементов, соотношения иные [1; 3].

Механический адмитанс —

$$\underline{y} = Y e^{i\varphi}, \text{ где } Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2}, \varphi = \arctg \frac{b_k - b_m}{g}. \quad (9)$$

1. Параллельное соединение и источник силы. Резонанс сил.

Комплексная амплитуда скорости (см. (1)) —

$$\dot{\underline{V}} = \frac{\dot{\underline{F}}}{\underline{z}} = \frac{F}{z} e^{-i\varphi} = V e^{-i\varphi}. \quad (10)$$

Комплексная амплитуда инертной силы —

$$\dot{\underline{F}}_m = \underline{x}_m \dot{\underline{V}} = x_m V e^{i(\pi/2 - \varphi)} = F_m e^{i(\pi/2 - \varphi)}. \quad (11)$$

Комплексная амплитуда упругой силы —

$$\dot{\underline{F}}_k = \underline{x}_k \dot{\underline{V}} = x_k V e^{-i(\pi/2 + \varphi)} = F_k e^{-i(\pi/2 + \varphi)}. \quad (12)$$

Комплексная амплитуда резистивной силы —

$$\dot{\underline{F}}_r = \underline{r} \dot{\underline{V}} = r V e^{-i\varphi} = F_r e^{-i\varphi}. \quad (13)$$

Разумеется,

$$\dot{\underline{F}}_m + \dot{\underline{F}}_k + \dot{\underline{F}}_r = \dot{\underline{F}}. \quad (14)$$

Из закона Гука, (12) и (5) следует выражение для комплексной амплитуды отклонения

$$\dot{\underline{X}} = \frac{\dot{\underline{F}}_k}{k} = \frac{x_k V e^{-i(\pi/2 + \varphi)}}{k} = \frac{k V e^{-i(\pi/2 + \varphi)}}{\omega k} = \frac{V}{\omega} e^{-i(\pi/2 + \varphi)} = X e^{-i(\pi/2 + \varphi)}. \quad (15)$$



Из второго закона Ньютона, (11) и (4) следует выражение для комплексной амплитуды ускорения

$$\dot{A} = \frac{\dot{F}_m}{m} = \frac{x_m V e^{i(\pi/2-\varphi)}}{m} = \frac{\omega m V e^{i(\pi/2-\varphi)}}{m} = \omega V e^{i(\pi/2-\varphi)} = A e^{i(\pi/2-\varphi)}. \quad (16)$$

Разумеется, $A = \omega V = \omega^2 X$.

Из (10)–(16) и (4)–(6) следуют амплитудно-частотные характеристики

$$F_k(\omega) = \frac{kF}{\omega\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \quad X(\omega) = \frac{F}{\omega\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}},$$

$$F_r(\omega) = \frac{rF}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \quad V(\omega) = \frac{F}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \quad (17)$$

$$F_m(\omega) = \frac{\omega m F}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \quad A(\omega) = \frac{\omega F}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}. \quad (18)$$

Разумеется,

$$F = \sqrt{F_r^2 + (F_k - F_m)^2}. \quad (19)$$

Графики функций $X(\omega)$, $V(\omega)$, $A(\omega)$ ведут себя качественно так же, как соответственно $F_k(\omega)$, $F_r(\omega)$, $F_m(\omega)$.

Частота ω_k , на которой функции $X(\omega)$ и $F_k(\omega)$ имеют максимум, определяется из условия

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \omega^{-1} \left[(k\omega^{-1} - m\omega)^2 + r^2 \right]^{-1/2} \right\} = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - r^2/(2km)} = \omega_0 \sqrt{1 - r^2/(2x_w^2)} = \omega_0 \sqrt{1 - d^2/2},$$

где $x_w = \sqrt{km}$ – волновое сопротивление (системы), $d = r/x_w$ – затухание (системы) (по аналогии с электротехникой).

$$F_{k\max} = F_k(\omega_k) = \frac{Q}{\sqrt{1 - d^2/4}} F, \quad X_{\max} = X(\omega_k) = \frac{Q}{\sqrt{1 - d^2/4}} \frac{F}{k} = \frac{Q}{\sqrt{1 - d^2/4}} X_0,$$

где $Q = 1/d$ – добротность (системы) (по аналогии с электротехникой), $X_0 = X(0) = F/k$ – статическое отклонение.

Частота ω_r , на которой функции $V(\omega)$ и $F_r(\omega)$ имеют максимум, очевидным образом равна $\omega_r = \sqrt{k/m} = \omega_0$.



$$F_{r \max} = F_r(\omega_0) = F, \quad V_{\max} = V(\omega_0) = \frac{F}{r}. \quad (20)$$

Частота ω_m , на которой функции $A(\omega)$ и $F_m(\omega)$ имеют максимум, определяется из условия

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \omega \left[(k\omega^{-1} - m\omega)^2 + r^2 \right]^{-1/2} \right\} = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{\sqrt{1 - r^2/(2km)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - d^2/2}}, \quad (21)$$

$$F_{m \max} = F_m(\omega_m) = \frac{Q}{\sqrt{1 - d^2/4}} F, \quad A_{\max} = A(\omega_m) = \frac{Q}{\sqrt{1 - d^2/4}} \frac{F}{m} = \frac{Q}{\sqrt{1 - d^2/4}} A_0, \quad (22)$$

где $A_0 = A(0) = F/m$ – постоянное ускорение (при нулевой частоте).

При $d^2/2 > 1$ функции $X(\omega)$, $A(\omega)$, $F_k(\omega)$, $F_m(\omega)$ не имеют максимумов в вещественном диапазоне частот.

Примечательно, что

$$\omega_k \omega_m = \omega_0^2, \quad (23)$$

$$F_{k \max} = F_{m \max}, \quad (24)$$

$$A_{\max} = \omega_0^2 X_{\max}, \quad (25)$$

$$\frac{A_{\max}}{\omega_m} = \omega_k X_{\max} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{1 - d^2/4}}. \quad (26)$$

Другие характерные точки:

$$F_m(\omega_k) = \frac{Q - d/2}{\sqrt{1 - d^2/4}} F, \quad A(\omega_k) = \frac{Q - d/2}{\sqrt{1 - d^2/4}} A_0, \quad (27)$$

$$F_k(\omega_m) = \frac{Q - d/2}{\sqrt{1 - d^2/4}} F, \quad X(\omega_m) = \frac{Q - d/2}{\sqrt{1 - d^2/4}} X_0, \quad (28)$$

$$F_m(\omega_0) = QF, \quad A(\omega_0) = QA_0, \quad F_k(\omega_0) = QF, \quad X(\omega_0) = QX_0, \quad (29)$$

$$F_r(\omega_k) = F_r(\omega_m) = \frac{\sqrt{1 - d^2/2}}{\sqrt{1 - d^2/4}} F,$$

$$V(\omega_k) = V(\omega_m) = \frac{\sqrt{1 - d^2/2}}{\sqrt{1 - d^2/4}} \frac{F}{r} = \frac{\sqrt{1 - d^2/2}}{\sqrt{1 - d^2/4}} V(\omega_0). \quad (30)$$



Характерные отношения:

$$\frac{F_k(\omega_k)}{F_m(\omega_k)} = \frac{F_m(\omega_m)}{F_k(\omega_m)} = \frac{F_k(\omega_k)}{F_k(\omega_m)} = \frac{F_m(\omega_m)}{F_m(\omega_k)} = \frac{X(\omega_k)}{X(\omega_m)} = \frac{A(\omega_m)}{A(\omega_k)} = \frac{1}{1-d^2/2}, \quad (31)$$

$$\frac{F_k(\omega_k)}{F_r(\omega_k)} = \frac{F_m(\omega_m)}{F_r(\omega_m)} = \frac{Q}{\sqrt{1-d^2/2}}, \quad (32)$$

$$\frac{F_k(\omega_m)}{F_r(\omega_m)} = \frac{F_m(\omega_k)}{F_r(\omega_k)} = Q\sqrt{1-d^2/2}. \quad (33)$$

На рисунке 3 представлены *подлинные* резонансные кривые для системы с параметрами $F=100$ Н, $m=10$ кг, $k=40$ кг·с⁻², $r=10$ кг·с⁻¹.

85

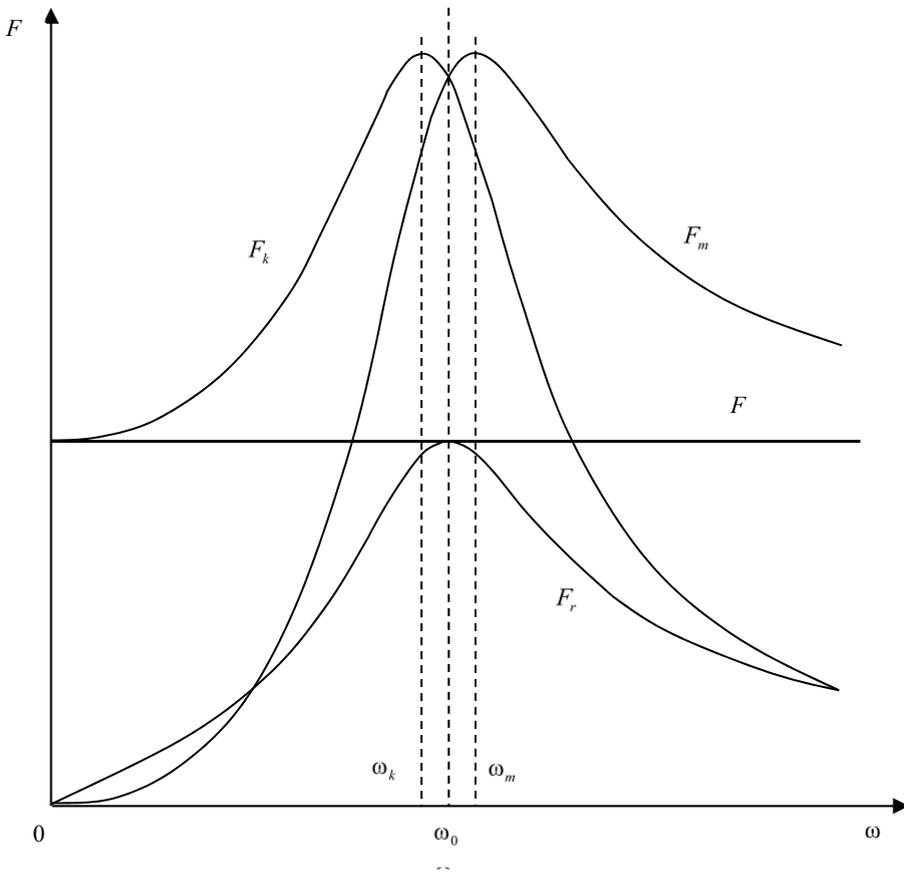


Рис. 3. Резонанс сил

На том основании, что амплитуда отклонения X имеет максимум на частоте ω_k ($\omega_k < \omega_0$), она (ω_k , а не ω_0) считается резонансной частотой [13].

Это было бы сильным решением, если бы X был единственным значимым кинематическим параметром. Однако не менее значимыми па-



раметрами являются амплитуды скорости V и ускорения A . При этом первая имеет максимум на частоте ω_0 , а вторая — на частоте ω_m ($\omega_m > \omega_0$). Таким образом, ω_k ничем не лучше, чем ω_0 и ω_m . Единственным аргументом при выборе резонансной частоты остается соображение симметрии (усиленное выражением (23)), в соответствии с которым резонансная частота — ω_0 .

Этот выбор становится еще более очевидным, если обратиться к силам.

Амплитуда упругой силы F_k имеет максимум на частоте ω_k , амплитуда инертной силы F_m — на частоте ω_m . Отдать предпочтение той или другой частоте невозможно. Однако именно на частоте ω_0 имеет место резонанс сил, при котором реактивные силы F_k и F_m равны и противоположны, а их сумма, соответственно, равна нулю [14; 15].

С другой стороны, величина импеданса механической системы $Z = \sqrt{r^2 + (x_m - x_k)^2}$, характеризующего ее свойство оказывать сопротивление приводу, понуждающему ее совершать колебания, имеет минимальное значение на частоте ω_0 . Другими словами, именно на частоте ω_0 система оказывает приводу минимальное сопротивление.

Таким образом, резонансной частотой является исключительно ω_0 .

2. Параллельное соединение и источник скорости. Антирезонанс сил.

Комплексная амплитуда инертной силы —

$$\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} = x_m V e^{i\pi/2} = F_m e^{i\pi/2}.$$

Комплексная амплитуда упругой силы —

$$\dot{F}_k = \underline{x}_k \dot{V} = x_k V e^{-i\pi/2} = F_k e^{-i\pi/2}.$$

Комплексная амплитуда резистивной силы —

$$\dot{F}_r = \underline{r} \dot{V} = r V e^{i0} = F_r e^{i0}.$$

Разумеется, $\dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r = \dot{F}$.

Комплексная амплитуда отклонения —

$$\dot{X} = \frac{\dot{F}_k}{k} = \frac{x_k V e^{-i\pi/2}}{k} = \frac{k V e^{-i\pi/2}}{\omega k} = \frac{V}{\omega} e^{-i\pi/2} = X e^{-i\pi/2}. \quad (34)$$

Комплексная амплитуда ускорения —

$$\dot{A} = \frac{\dot{F}_m}{m} = \frac{x_m V e^{i\pi/2}}{m} = \frac{\omega m V e^{i\pi/2}}{m} = \omega V e^{i\pi/2} = A e^{i\pi/2}. \quad (35)$$

Комплексная амплитуда силы (см. (1)) — $\dot{F} = \dot{V} \underline{z} = V z e^{i\varphi} = F e^{i\varphi}$.



Амплитудно-частотная характеристика

$$F(\omega) = V\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}.$$

При $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ кривая $F(\omega)$ устремляется в бесконечность. При сверхмалых частотах условие (3) порождает чрезмерные деформации упругого элемента (34), сопровождаемые, соответственно, чрезмерными силами упругости. При сверхвысоких частотах условие (3) порождает чрезмерные ускорения (35) и чрезмерные инерционные силы.

При ω_0 график проходит через минимум $F_{\min} = F(\omega_0) = Vr = F_r$. Имеет место *антирезонанс сил*, при котором реактивные силы F_k и F_m равны и противоположны, а их сумма, соответственно, равна нулю.

Для антирезонанса разночтений со смещением антирезонансной частоты (она же резонансная) не возникает.

На рисунке 4 представлена *подлинная* антирезонансная кривая для системы, отличающейся от первой тем, что $V = 10 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$.

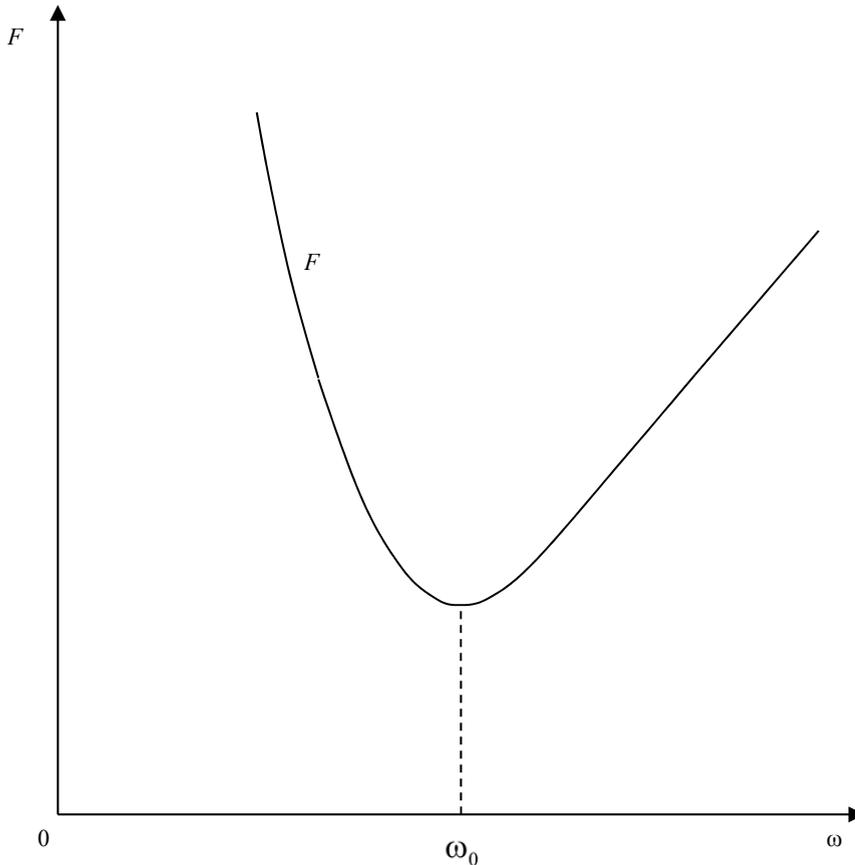


Рис. 4. Антирезонанс сил



3. Последовательное соединение и источник скорости. Резонанс скоростей.

Порядок рассуждений такой же, как в п. 1.

Комплексная амплитуда силы (см. (1)) —

$$\dot{F} = \frac{\dot{V}}{y} = \frac{V}{y} e^{-i\varphi} = Fe^{-i\varphi}. \quad (36)$$

Комплексная амплитуда скорости инертного элемента —

$$\dot{V}_m = \underline{b}_m \dot{F} = b_m Fe^{-i(\pi/2+\varphi)} = V_m e^{-i(\pi/2+\varphi)}. \quad (37)$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины упругого элемента —

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = b_k Fe^{i(\pi/2-\varphi)} = V_k e^{i(\pi/2-\varphi)}. \quad (38)$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины резистивного элемента —

$$\dot{V}_r = \underline{g} \dot{F} = g Fe^{-i\varphi} = V_r e^{-i\varphi}. \quad (39)$$

Разумеется,

$$\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = \dot{V}. \quad (40)$$

Из (37) следует выражение для комплексной амплитуды импульса —

$$\dot{P} = m \dot{V}_m = m b_m Fe^{-i(\pi/2+\varphi)} = m \frac{1}{\omega m} Fe^{-i(\pi/2+\varphi)} = \frac{F}{\omega} e^{-i(\pi/2+\varphi)} = Pe^{-i(\pi/2+\varphi)}. \quad (41)$$

Из (38) следует выражение для комплексной амплитуды производной силы (специального названия не имеет, приводится здесь как дуальный аналог преобразования (16)) —

$$\dot{B} = k \dot{V}_k = k b_k Fe^{i(\pi/2-\varphi)} = k \frac{\omega}{k} Fe^{i(\pi/2-\varphi)} = \omega Fe^{i(\pi/2-\varphi)} = Be^{i(\pi/2-\varphi)}. \quad (42)$$

Это соответствует преобразованию

$$kv = k \frac{dx}{dt} = \frac{d(kx)}{dt} = \frac{dF}{dt} = B. \quad (43)$$

Разумеется,

$$B = \omega F = \omega^2 P. \quad (44)$$

Из (36)–(42) и (7), (8), (9) следуют амплитудно-частотные характеристики

$$V_m(\omega) = \frac{V}{\omega m \sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}, \quad P(\omega) = \frac{V}{\omega \sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}, \quad (45)$$



$$V_r(\omega) = \frac{gV}{\sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}, \quad F(\omega) = \frac{V}{\sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}, \quad (46)$$

$$V_k(\omega) = \frac{\omega V}{k\sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}, \quad B(\omega) = \frac{\omega V}{\sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}. \quad (47)$$

Разумеется,

$$V = \sqrt{V_r^2 + (V_k - V_m)^2}. \quad (48)$$

Графики функций $P(\omega)$, $F(\omega)$, $B(\omega)$ ведут себя качественно так же, как соответственно $V_m(\omega)$, $V_r(\omega)$, $V_k(\omega)$.

Частота ω_m , на которой функции $P(\omega)$ и $V_m(\omega)$ имеют максимум, определяется из условия

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \omega^{-1} \left[(k^{-1}\omega - m^{-1}\omega^{-1})^2 + r^{-2} \right]^{-1/2} \right\} = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - mk/(2r^2)} = \omega_0 \sqrt{1 - x_w^2/(2r^2)} = \omega_0 \sqrt{1 - Q^2/2}. \quad (49)$$

$$V_{m\max} = V_m(\omega_m) = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V, \quad P_{m\max} = P_m(\omega_m) = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} Vm = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} P_0, \quad (50)$$

где $P_0 = P(0) = Vm$ — постоянный импульс (при нулевой частоте).

Частота ω_r , на которой функции $F(\omega)$ и $V_r(\omega)$ имеют максимум, очевидным образом равна

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0.$$

$$V_{r\max} = V_r(\omega_0) = V, \quad F_{\max} = F(\omega_0) = \frac{V}{g}. \quad (51)$$

Частота ω_k , на которой функции $B(\omega)$ и $V_k(\omega)$ имеют максимум, определяется из условия

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \omega \left[(k^{-1}\omega - m^{-1}\omega^{-1})^2 + r^{-2} \right]^{-1/2} \right\} = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{\sqrt{1 - km/(2r^2)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - Q^2/2}}. \quad (52)$$



$$V_{k\max} = V_k(\omega_k) = \frac{d}{\sqrt{1-Q^2/4}} V, \quad B_{\max} = B(\omega_k) = \frac{d}{\sqrt{1-Q^2/4}} V k = \frac{d}{\sqrt{1-Q^2/4}} B_0, \quad (53)$$

где $B_0 = B(0) = V k$ — постоянная производная силы (при нулевой частоте).

При $Q^2/2 > 1$ функции $P(\omega)$, $B(\omega)$, $V_m(\omega)$, $V_k(\omega)$ не имеют максимумов в вещественном диапазоне частот.

Примечательно, что

$$\omega_k \omega_m = \omega_0^2, \quad (54)$$

$$V_{k\max} = V_{m\max}, \quad (55)$$

$$B_{\max} = \omega_0^2 P_{\max}, \quad (56)$$

$$\frac{B_{\max}}{\omega_k} = \omega_m P_{\max} = \frac{F_{\max}}{\sqrt{1-Q^2/4}}. \quad (57)$$

Другие характерные точки:

$$V_m(\omega_k) = \frac{d-Q/2}{\sqrt{1-Q^2/4}} V, \quad P(\omega_k) = \frac{d-Q/2}{\sqrt{1-Q^2/4}} P_0, \quad (58)$$

$$V_k(\omega_m) = \frac{d-Q/2}{\sqrt{1-Q^2/4}} V, \quad B(\omega_m) = \frac{d-Q/2}{\sqrt{1-Q^2/4}} B_0, \quad (59)$$

$$V_m(\omega_0) = d \cdot V, \quad P(\omega_0) = d \cdot P_0, \quad V_k(\omega_0) = d \cdot V, \quad B(\omega_0) = d \cdot B_0, \quad (60)$$

$$V_r(\omega_k) = V_r(\omega_m) = \frac{\sqrt{1-Q^2/2}}{\sqrt{1-Q^2/4}} V \quad (61)$$

$$F(\omega_k) = F(\omega_m) = \frac{\sqrt{1-Q^2/2}}{\sqrt{1-Q^2/4}} \frac{V}{g} = \frac{\sqrt{1-Q^2/2}}{\sqrt{1-Q^2/4}} F(\omega_0)$$

Характерные отношения:

$$\frac{V_k(\omega_k)}{V_m(\omega_k)} = \frac{V_m(\omega_m)}{V_k(\omega_m)} = \frac{V_k(\omega_k)}{V_k(\omega_m)} = \frac{V_m(\omega_m)}{V_m(\omega_k)} = \frac{P(\omega_m)}{P(\omega_k)} = \frac{B(\omega_k)}{B(\omega_m)} = \frac{1}{1-d^2/2}, \quad (62)$$

$$\frac{V_k(\omega_k)}{V_r(\omega_k)} = \frac{V_m(\omega_m)}{V_r(\omega_m)} = \frac{d}{\sqrt{1-Q^2/2}}, \quad (63)$$

$$\frac{V_k(\omega_m)}{V_r(\omega_m)} = \frac{V_m(\omega_k)}{V_r(\omega_k)} = d \sqrt{1-Q^2/2}. \quad (64)$$

Амплитуда импульса P имеет максимум на частоте ω_m ($\omega_m < \omega_0$), амплитуда силы F — на частоте ω_0 , амплитуда производной силы B — на частоте ω_k ($\omega_k > \omega_0$).



Амплитуда скорости инертного элемента V_m имеет максимум на частоте ω_m , амплитуда скорости изменения длины упругого элемента V_k — на частоте ω_k .

На частоте ω_0 имеет место резонанс скоростей, при котором (реактивные) скорости и V_k равны и противоположны, а их сумма соответственно равна нулю [14; 15].

Величина адмитанса механической системы $Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2}$, характеризующего ее свойство не оказывать сопротивление приводу, понуждающему ее совершать колебания, имеет минимальное значение на частоте ω_0 . Другими словами, именно на частоте ω_0 система оказывает приводу максимальное сопротивление.

Таким образом, резонансной частотой является исключительно ω_0 .

Для системы с параметрами, отличающимися от параметров второй тем, что $r = 40 \text{ кг}\cdot\text{с}^{-1}$, подлинными резонансные кривые полностью совпадают с изображенными на рисунке 3 при заменах $F_k \rightarrow V_m$, $F_m \rightarrow V_k$, $F_r \rightarrow V_r$, $\omega_k \rightarrow \omega_m$, $\omega_m \rightarrow \omega_k$.

4. Последовательное соединение и источник силы. Антирезонанс скоростей.

Порядок рассуждений такой же, как в п. 2.

Комплексная амплитуда скорости инертного элемента —

$$\dot{V}_m = \underline{b}_m \dot{F} = b_m F e^{-i\pi/2} = V_m e^{-i\pi/2}.$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины упругого элемента —

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = b_k F e^{i\pi/2} = V_k e^{-i\pi/2}.$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины резистивного элемента —

$$\dot{V}_r = \underline{g} \dot{F} = g F e^{i0} = V_r e^{i0}.$$

Разумеется, $\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = \dot{V}$.

Комплексная амплитуда импульса —

$$\dot{P} = m \dot{V}_m = m b_m F e^{-i\pi/2} = m \frac{1}{\omega t} F e^{-i\pi/2} = \frac{F}{\omega} e^{-i\pi/2} = P e^{-i\pi/2}. \quad (65)$$

Комплексная амплитуда производной силы —

$$\dot{B} = k \dot{V}_k = k b_k F e^{i\pi/2} = k \frac{\omega}{k} F e^{i\pi/2} = \omega F e^{i\pi/2} = B e^{i\pi/2}. \quad (66)$$

Комплексная амплитуда скорости (см. (1)) — $\dot{V} = \dot{F} \underline{y} = F y e^{i\varphi} = V e^{i\varphi}$.



Амплитудно-частотная характеристика –

$$V(\omega) = F \sqrt{g^2 + (\omega/k - 1/(\omega m))^2}.$$

При $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ кривая $V(\omega)$ устремляется в бесконечность. При сверхмалых частотах условие (2) порождает чрезмерный импульс (65), сопровождаемый, соответственно, чрезмерной скоростью инертного элемента. При сверхвысоких частотах условие (2) порождает чрезмерную производную силы (66) и чрезмерную скорость изменения длины упругого элемента. При ω_0 график проходит через минимум $V_{\min} = V(\omega_0) = Fg = V_r$. Имеет место *антирезонанс скоростей*, при котором (реактивные) скорости V_m и V_k равны и противоположны, а их сумма, соответственно, равна нулю.

Для системы, отличающейся от третьей тем, что $F = 100$ Н, подлинная антирезонансная кривая *полностью совпадает* с изображенной на рисунке 4 при замене $F \rightarrow V$.

Заключение

Использование символического (комплексного) метода существенно упростило исследование резонансных и околорезонансных явлений, в частности позволило глубоко унифицировать и формализовать рассмотрение различных механических систем (п. 1 и 3, 2 и 4 являются дуально инверсными). Громоздкие и трудоемкие операции, связанные с составлением и решением дифференциальных уравнений, заменены простыми алгебраическими преобразованиями.

В основе метода лежит механический аналог закона Ома в комплексном представлении (1) и понятие о механических реактансе, резистансе, импедансе, сассептансе, кондактансе и адмитансе. С помощью этого метода получены новые результаты, в том числе (14), (17)–(33), (40)–(64).

В дополнение к классическому методу рассмотрены последовательное соединение механических элементов и источник скоростей.

Классическое рассмотрение доставляет одну амплитудно-частотную характеристику, символический (комплексный) метод – восемь при значительно большем числе характерных точек и характерных соотношений.

Установлено, что вопреки классическому подходу резонансной частотой является исключительно ω_0 (а не ω_k). Другими словами, резонансная частота не сдвигается от частоты свободных колебаний. Это обусловлено тем, что при классическом рассмотрении не установлена симметрия частот (23), (54), а при символическом она очевидна.

Определены резонанс и антирезонанс сил, резонанс и антирезонанс скоростей, которые не были определены классическим методом. Резонансы возникают при сочетаниях параллельного соединения элемен-



тов и источника силы либо последовательного соединения и источника скорости. Антрезонансы возникают при сочетаниях параллельного соединения и источника скорости либо последовательного соединения и источника силы.

Для всех описанных случаев *фазо-частотные* характеристики особой оригинальностью не отличаются и поэтому не рассматриваются.

Список литературы

1. Попов И.П. Применение символического (комплексного) метода для расчета сложных механических систем при гармонических воздействиях // Прикладная физика и математика. 2019. №4. С. 14–24. doi: 10.25791/pfim.04.2019.828.

2. Попов И.П. Импедансы и адмитансы механических систем // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2020. №5 (343). С. 3–11. doi: 10.33979/2073-7408-2020-343-5-3-11.

3. Попов И.П. Алгебраические методы расчета разветвленных механических систем при вынужденных колебаниях // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2020. №5 (343). С. 12–20. doi: 10.33979/2073-7408-2020-343-5-12-20.

4. Кужелев А.А., Пониматкин В.Е., Шпилевая С.Г., Попов А.А. К вопросу об увеличении диапазонных свойств несимметричного вибратора // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2020. №2. С. 95–103.

5. Шабловский О.Н. Колебания, резонансы и волны в нелокальной среде с источниками // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2018. №4. С. 5–14.

6. Великанов Н.Л., Наумов В.А., Корягин С.И. Внутреннее трение при продольных колебаниях троса // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2017. №3. С. 84–92.

7. Пониматкин В.Е., Шпилевой А.А., Кужелев А.А. К вопросу об увеличении диапазонных свойств несимметричного вибратора // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. №2. С. 69–77.

8. Popov I.P. Free harmonic oscillations in systems with homogeneous elements // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76, iss. 4. P. 393–395. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.09.005.

9. Popov I.P. Theory of a Multi-Inert Oscillator // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2020. Vol. 49, iss. 8. P. 16–20. doi: 10.3103/S1052618820080105.

10. Попов И.П. Теоретические предпосылки создания мультиинертного осциллятора // Оборонный комплекс – научно-техническому прогрессу России. 2020. №1 (145). С. 15–19.

11. Попов И.П., Родионов С.С., Мошкин В.И. Повышение энергоэффективности приводов решетных сортировальных вибромашин. Курган, 2019.

12. Попов И.П. Дифференциальные уравнения двух механических резонансов // Прикладная физика и математика. 2019. №2. С. 37–40. doi: 10.25791/pfim.02.2019.599.

13. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М., 1980.



14. Попов И.П. Антирезонанс – резонанс скоростей // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, №6. С. 362–366. doi: <https://doi.org/10.17587/mau.20.362-366>.

15. Попов И.П. Разновидности резонансов в механике // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2019. Т. 51, №1. С. 88–85. doi: [10.18413/2075-4639-2019-51-1-88-95](https://doi.org/10.18413/2075-4639-2019-51-1-88-95).

Об авторе

Игорь Павлович Попов – канд. техн. наук, ст. преп., Курганский государственный университет, Россия.

E-mail: ip.popov@yandex.ru

The author

Dr Igor P. Popov, Assistant Professor, Kurgan State University, Russia.

E-mail: ip.popov@yandex.ru