4. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5 – 247.

5. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000. 113 с.

6. *Скрягина А.В.* Композиционное оснащение плоскостей поверхности // Междунар. конф. по геом. и анализу. Пенза, 2003. С. 87 – 93.

A. Vyalova

THE PARALLEL DISPLACEMENTS IN THE BUNCH OF CONNECTIONS OF THE SECOND TYPE ON THE POINT-PLANE SURFACE

In n-dimensional projective space P_n point-plane surface S_{h+r} as degenerated family of triples (A, L_h, T_m), where point A $(A \in L_h \subset T_m)$ and tangent plane T_m describes m-dimensional families, generator L_h – r-dimensional family $(r = m - h)$, is considered. Composition equipment of surface S_{h+r}, consisted in setting fields of three planes, is made. The concepts of special and combination equipments, which are used by describing of parallel displacements the equipping planes in the bunch of connection of the second type, are entered.

УДК 512.813.52

А.И. Долгарев
(Пензенский государственный университет)

СЕТЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ 3-МЕРНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ОДУЛЕЙ ЛИ

Рассматриваются *одули*, обобщающие линейные пространства. Это одули Ли, определенные на группах Ли посредством задания внешней операции умножения элементов группы Ли на действительные числа. *Сетью* одуля называется множество 1-параметрических пододулей и

левосторонних смежных классов по ним, т. е. множество 1-параметрических левосторонних многообразий одуля Ли. Указанные многообразия описываются 1-параметрическими уравнениями, которые и называются *сетевыми уравнениями одуля Ли*. Сетевые уравнения 2-мерных действительных линейных пространств получены в [1]; уравнения разнообразны, они зависят от операций, задающих линейные пространства. Ниже выписаны сетевые уравнения 3-мерных действительных одулей Ли. Получена конкретизация экспоненциальных отображений алгебр Ли в одули Ли двух видов.

§1. 3-мерные одули Ли

1.1. Одули. Заданы: $\Omega = (\Omega,+)$ – алгебраическая структура с внутренней бинарной операцией + и ассоциативное кольцо **K** = (**K**, +, ·). Определена внешняя операция $\omega_K(+)$ умножения элементов структуры Ω на скаляры из кольца **K**: $\omega_K(+)$: $(t,\omega)\to t\omega$, $(t,\omega)\in \mathbf{K}\times\Omega$, $t\omega\in\Omega$, и для всех $\omega\in\Omega$, $t,s\in\mathbf{K}$ выполняются аксиомы

$$(t+s)\omega = t\omega + s\omega,\ \ s(t\omega) = (st)\omega .$$

Структура $\Omega = (\Omega,+,\omega_K(+))$ называется *одулем над кольцом* **K**, или **K**-*одулем* [2], элементы одуля называются *одулярами*. Нулевой одуляр, если он существует, обозначается ϑ. Мы рассматриваем одули Ли – одули на группах Ли над полем **R** действительных чисел, используем термин *одуль*.

1.2. Разрешимые 3-мерные одули Ли. Все разрешимые 3-мерные одули Ли перечислены в [3]. Зададим их операциями на R^3.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО L^3. $(x,y,z)+(u,v,w) = (x+u, y+v,\ z+w)$; $t(x,y,z) = (xt, yt, zt)$, $t\in\mathbf{R}$.

РАСТРАН P^3_q. $(x,y,z)+(u,v,w) = (x+y, ye^u+v, ze^{-u}+w)$;

$$t(x,y,z) = \left(xt,\ y\frac{e^{xt}-1}{e^x-1},\ z\frac{e^{-xt}-1}{e^{-x}-1}\right),\ x\neq 0\ ;\ \ t(0,y,z) = (0, yt, zt)\ ,$$

$t\in\mathbf{R}$.

Выделяется **ОДНОРОДНЫЙ РАСТРАН $\mathbf{P}^3$**. $(x,y,z)+(u,v,w)=$ $=(x+y, ye^u+v, ze^u+w)$; $t(x,y,z)=(xt, y\dfrac{e^{xt}-1}{e^x-1}, z\dfrac{e^{xt}-1}{e^x-1})$, $t\in\mathbf{R}$.

СИБСОН $\boldsymbol{\Sigma}^3$. $(x,y,z)+(u,v,w)=$ $(x+u, y+v, z+w+yu)$; $t(x,y,z)=(xt, yt, zt+\dfrac{t(t-1)}{2}xy)$, $t\in\mathbf{R}$.

ДИССОН $\boldsymbol{\Delta}^3$. $(x,y,z)+(u,v,w)=(x+y, ye^u+v+zue^u, ze^u+w)$; $t(x,y,z)=(xt,\ y\dfrac{e^{xt}-1}{e^x-1}+xz(\dfrac{te^{xt}}{e^x-1}-\dfrac{e^{xt}-1}{(e^x-1)^2}e^x),\ z\dfrac{e^{xt}-1}{e^x-1}),\ x\neq 0$; $t(0,y,z)=(0,yt,zt)$, $t\in\mathbf{R}$.

ОСЦИЛЛЯТОРНЫЙ ОДУЛЬ $\boldsymbol{\Omega}^3$. $(x,y,z)+(u,v,w)=$ $=(x+u,\quad v+y\cos u-z\sin u, w+y\sin u+z\cos u)$; $t(x,y,z)=$ $=(xt, y+S(t,x)(y\cos\dfrac{xt}{2}-\ -z\sin\dfrac{xt}{2}),\ z+S(t,x)(y\sin\dfrac{xt}{2}+z\sin\dfrac{xt}{2}))$, $x\neq 2\pi k$, $S(t,x)=\sin\dfrac{t-1}{2}x\Big/\sin\dfrac{x}{2}$; $t(2\pi k,y,z)=(2\pi kt, yt, zt)$, $t\in\mathbf{R}$, *k=0*, ±1, ±2,….

§ 2. Сетевые уравнения одулей Ли

2.1. Левосторонние 1-мерные многообразия. 1-параметрический пододуль $\langle\omega\rangle$ одуля Ли Ω, определяемый ненулевым одуляром ω, состоит из одуляров $\langle\omega\rangle=\{t\omega\,|\,t\in R\}$; левостороннее 1-параметрическое многообразие, содержащее одуляр η, есть множество одуляров $\eta+\langle\omega\rangle=\{\eta+t\omega\,|\,t\in R\}$, т. е. всякий одуляр 1-параметрического левостороннего многообразия имеет вид:

$$\xi=t\omega \text{ или } \xi=\eta+t\omega \qquad (1)$$

(первый из них получается при $\eta=\vartheta$). Обозначим $\omega=(p,q,r)$, $\eta=(a,b,c)$, $\xi=(x,y,z)$. Записывая равенства (1) в компонентах одуляров, получаем сетевые уравнения одулей Ли, вид которых зависит от операций на одулях.

2.2. Сетевые уравнения линейных пространств. Операции на линейном пространстве L^3 выписаны в п. 1.2. Сетевые уравнения этого пространства $x = pt$, $y = qt,\ z = rt$, или $x = pt + a$, $y = qt + b,\ z = rt + c$.

Линейное пространство на тройках чисел может быть задано и операциями другого вида, поэтому может иметь другие сетевые уравнения [1].

2.3. Сетевые уравнения растрана. По операциям на общем растране, п. 1.2, одулярные равенства (1) в компонентах растов записываются так: при $p\neq 0$: $x = pt + a$, $y = be^{pt} + q\dfrac{e^{pt}-1}{e^{p}-1}$, $z = ce^{-pt} + r\dfrac{e^{-pt}-1}{e^{-p}-1}$; и при $p = 0$: $x = a$, $y = qt + b,\ z = rt + c$. Это *параметрические сетевые уравнения растрана*. Введя обозначения $m = \dfrac{q}{e^{p}-1}$, $h = \dfrac{-q}{e^{p}-1}$, $k = \dfrac{r}{e^{-p}-1}$, $g = \dfrac{-r}{e^{-p}-1}$, первые из сетевых уравнений приводим к виду:

$$x = pt + a,\ y = (m+b)e^{pt} + h,\ z = (k+c)e^{pt} + g.$$

Если $\eta = \vartheta$, то в записанных уравнениях $a = b = c = 0$.

На 2-мерном растране $r = c = z = 0$. Сетевые уравнения 2-мерного растрана таковы: $x = pt + a$, $y = (m+b)e^{pt} + h$, или при $p = 0$: $x = a$, $y = qt + b$. Исключая параметр t, получаем *явные сетевые уравнения растрана* $y = (m+b)e^{x-a} + h$, или $x = a$.

2.4. Сетевые уравнения сибсона, диссона, осцилляторного одуля. На основе операций (п. 1.2) получаем: *сетевые уравнения сибсона:* $x = pt + a$, $y = qt + b$, $z = pq\dfrac{t(t-1)}{2} + (r + bp)t + c$; они могут быть записаны в виде $x = pt + a$, $y = qt + b$, $z = kt^2 + ht + c$, если $pq \neq 0$, то $k \neq 0$; *сетевые уравнения диссона* $x = pt + a$, $y = (m + b + nt + cpt)e^{pt} + h$, $z = (k + c)e^{pt} + g$; *сетевые уравнения осцилляторного одуля* $x = pt + a$, $y = S(t, p)(q\cos\frac{pt}{2} - r\sin\frac{pt}{2}) + b\cos pt - c\sin pt$, $z = S(t, p)(q\sin\frac{pt}{2} + r\cos\frac{pt}{2}) + b\sin pt + c\cos pt$, $S(t, p) = \sin\frac{t-1}{2}p \Big/ \sin\frac{p}{2}$; или $x = 2\pi kt + a$, $y = qt + b,\ z = rt + c$.

2.5. Отображение exp. Отображение $\exp : \mathbf{g} \to \mathbf{G}$ алгебры Ли **g** на соответствующую группу Ли **G** является отображением $\mathbf{g} \to \Omega$ на одуль Ли, определенный на группе Ли $\mathbf{G} = (\Omega, +)$. Вектор $\vec{a}$ из **g** генерирует 1-параметрическую подгруппу $\vec{a}(t)$ в группе Ли **G**, а значит, и в одуле Ли Ω, совпадающей с одулярной функцией $\omega(t) = t\omega$, где $\exp : \vec{a} \to \omega$. Известна одна конкретизация отображения $\exp$, а именно $\exp : M \to e^M$. В некоторых случаях, сравнивая функции $\vec{a}(t)$ и $t\omega$, можно получить конкретизацию отображения $\exp$.

В [4, с. 22] приведена функция $\vec{a}(t)$, генерируемая вектором $\vec{a}$ из алгебры Ли с коммутаторами $[X_1 X_2] = 0$, $[X_2 X_3] = X_2$, $[X_3 X_1] = -X_1$ в соответствующей группе Ли, на которой определен равномерный растран. 1-параметрическая подгруппа с генератором $\vec{a} = (a, a^1, a^2)$ такова: $x = at$, $y = \frac{a^1}{a}(e^{at} - 1)$, $z = \frac{a^2}{a}(e^{at} - 1)$. Элемент $\vec{a}(t)$ совпадает с одуляром $t\omega$. Сравним $\vec{a}(t)$ с сетевыми уравнениями: $x = pt$, $y = q\frac{e^{pt} - 1}{e^{p} - 1}$, $z = r\frac{e^{-pt} - 1}{e^{-p} - 1}$; из $at = pt$ получаем $a = p$, из $\frac{a^1}{a}(e^{at} - 1) = q\frac{e^{pt} - 1}{e^{p} - 1}$ получаем $q = \frac{a^1}{a}(e^{a} - 1)$, а также $r = \frac{a^2}{a}(e^{a} - 1)$.

Поэтому в отображении exp указанной алгебры на растран имеем конкретизацию

$$\exp:\ (a,a^1,a^2)\to\ (a,\ \frac{a^1}{a}(e^a-1)\ ,\ \frac{a^2}{a}(e^a-1))\ .$$

На сибсон Σ^3 отображается алгебра Ли с коммутаторами $[X_1X_2]=0$, $[X_2X_3]=X_1$, $[X_3X_1]=0$. По [4, с. 25], в Σ^3 генерируется пододуль: $x=at$, $y=a^1t$, $z=a^2t+\frac{a^1a^2}{2}t$. Сравнивая с сетевыми уравнения сибсона, имеем конкретизацию

$$\exp:\ (a,a^1,a^2)\to(a,a^1,a^2+\frac{aa^1}{2})\ .$$

Конкретизацию экспоненциальных отображений алгебр Ли в диссон и осцилляторный одуль описанными средствами получить не удалось.

Заключение

Получено описание 3-мерных разрешимых одулей Ли элементарными функциями. Линейное пространство и сибсон описываются степенными функциями, растран и диссон – экспоненциальными функциями, причем уравнения диссона более сложны. Осцилляторный одуль описывается тригонометрическими функциями.

Список литературы

1. *Долгарев А.И.* Сетевые уравнения двумерных линейных пространств над **R** // Движения в обобщенных пространствах. Пенза, 2000. С. 117 – 124.

2. *Сабинин Л.В.* Одули как новый подход к геометрии со связностью// ДАН СССР. 1977. №5. С. 800 – 803.

3. *Долгарев А.И.* Кривые 3-мерных вейлевских одулярных пространств и кривые евклидовой плоскости // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2001. Вып. 33. С. 25 – 28.

4. *Левичев А.В.* Однородная хроногеометрия. 1. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1991. 52 с.

A. Dolgarev

THE NETWORK EQUATIONS OF 3-DIMENSIONAL SOLVABLE ODULES OF LIE

The equations circumscribing 3-dimensional solvable odules of Lie and mapping exp of Lie algebras in rastran and sibson are obtained.

УДК 514.764.25

Т.В. Зудина, С.Е. Степанов
(Владимирский государственный педагогический университет)

ЭКВИАФФИННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Рассматриваются эквиаффинные отображения псевдоримановых многообразий. На основе теории представлений групп дается классификация такого рода отображений. Описывается геометрия двух из выделенных семи классов. В частности, найдены необходимые и достаточные условия существования эквиаффинных диффеоморфизмов и вид метрик римановых многообразий, допускающих такие отображения.

§1. Семь классов эквиаффинных диффеоморфизмов

1.1. Рассмотрим два n-мерных C^∞-псевдоримановых многообразия (M,g) и $(\overline{M},\overline{g})$. В локальных системах координат $x^1,...,x^n$ и $\overline{x}^1,...,\overline{x}^n$ элементы объемов многообразий (M,g)