УДК 514.75

А. В. Вялова[1]
[1] _Калининградский государственный технический университет, Россия_
vyalova.alexa@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5170-6191
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-8

Композиционное оснащение конгруэнции гиперцентрированных плоскостей

В многомерном проективном пространстве продолжается исследование конгруэнции гиперцентрированных плоскостей. Произведено композиционное оснащение конгруэнции. Доказано, что композиционное оснащение конгруэнции гиперцентрированных плоскостей индуцирует фундаментально-групповую связность в ассоциированном с ней главном расслоении.

Ключевые слова: проективное пространство, конгруэнция гиперцентрированных плоскостей, связность в главном расслоении, композиционное оснащение.

В n-мерном проективном пространстве P_n рассматривается многообразие V_{n-m} — конгруэнция [1] гиперцентрированных плоскостей P_m^{m-1}, уравнения которой имеют вид [2]

$$\omega_i = \Lambda_{i\alpha}\omega^\alpha, \quad \omega_i^\alpha = \Lambda_{i\beta}^\alpha \omega^\beta . \qquad (1)$$

Здесь индексы принимают следующие значения:

$$I = \{i, \ \alpha\}: \quad i, \ldots = \overline{1, m} \ ; \quad \alpha, \ldots = \overline{m+1, n}.$$

Поступила в редакцию 31.05.2019 г.
© Вялова А. В., 2019

Внешние дифференциалы базисных форм удовлетворяют уравнениям

$$D\omega^{\alpha} = \omega^{\beta} \wedge \theta^{\alpha}_{\beta}, \;\; \theta^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} - \Lambda^{\alpha}_{i\beta}\omega^{i}. \qquad (2)$$

Компоненты фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda^1 = \{\Lambda_{i\alpha}, \Lambda^{\alpha}_{i\beta}\}$, являющегося псевдотензором [3], удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\Delta\Lambda_{i(\alpha)} + \Lambda^{\beta}_{i\alpha}\omega_{\beta} = \Lambda_{i\alpha\beta}\omega^{\beta}, \;\; \Delta\Lambda^{\alpha}_{i(\beta)} = \Lambda^{\alpha}_{i\beta\gamma}\omega^{\gamma}, \qquad (3)$$

где дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda^{\alpha}_{i(\beta)} = d\Lambda^{\alpha}_{i\beta} + \Lambda^{\gamma}_{i\beta}\omega^{\alpha}_{\gamma} - \Lambda^{\alpha}_{j\beta}\omega^{j}_{i} - \Lambda^{\alpha}_{i\gamma}\theta^{\gamma}_{\beta},$$

причем $\Lambda_{i[\alpha\beta]} = 0$, $\Lambda^{\alpha}_{i[\beta\gamma]} = 0$.

Структурные уравнения главного расслоения $G_r(V_{n-m})$ с базой — многообразием V_{n-m} и типовым слоем — подгруппой G_r стационарности центрированной плоскости P^{m-1}_{m}, причем $r = n(n-m+1)+m^2$, состоят из уравнений (2) и следующих:

$$\begin{aligned} D\omega^{i} &= \omega^{j} \wedge \omega^{i}_{j} + \omega^{\alpha} \wedge \omega^{i}_{\alpha}, \\ D\omega^{i}_{j} &= \omega^{k}_{j} \wedge \omega^{i}_{k} + \omega^{\alpha} \wedge \omega^{i}_{j\alpha}, \\ D\omega_{\alpha} &= \omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} + \omega_{\beta\alpha} \wedge \omega^{\beta}, \\ D\omega^{i}_{\alpha} &= \omega^{I}_{\alpha} \wedge \omega^{i}_{I} + \omega_{\alpha} \wedge \omega^{i}, \\ D\omega^{\alpha}_{\beta} &= \omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{\alpha}_{\beta\gamma} \wedge \omega^{\gamma}, \end{aligned} \qquad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \omega^{i}_{j\alpha} &= \Lambda^{\beta}_{j\alpha}\omega^{i}_{\beta} + \delta^{i}_{j}(\Lambda_{k\alpha}\omega^{k} - \omega_{\alpha}) + \Lambda_{j\alpha}\omega^{i}, \quad \omega_{\beta\alpha} = \Lambda_{i\beta}\omega^{i}_{\alpha}, \\ \omega^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \Lambda^{\alpha}_{i\gamma}\omega^{i}_{\beta} + \delta^{\alpha}_{\beta}(\omega_{\gamma} - \Lambda_{i\gamma}\omega^{i}) + \delta^{\alpha}_{\gamma}\omega_{\beta}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Расслоение $G_r(V_{n-m})$ содержит 4 главных фактор-расслоения: плоскостных линейных реперов $L_{m^2}(V_{n-m})$ с типовым слоем $L_{m^2} = GL(m)$ — линейной факторгруппой, действующей неэффективно во внутренней плоскости P_{m-1}; аффинных реперов $L_{m(m+1)}(V_{n-m})$ с типовым слоем — аффинной факторгруппой, действующей в плоскости P_m^{m-1}; нормальных линейных реперов $L_{(n-m)^2}(V_{n-m})$ с типовым слоем — линейной факторгруппой, действующей неэффективно в проективном факторпространстве $P_{n-m-1} = P_n / P_m$; центропроективных реперов $L_{(n-m)(n-m+1)}(V_{n-m})$ с типовым слоем $L_{(n-m)(n-m+1)}$ — центропроективной (коаффинной) факторгруппой, действующей в проективном гиперцентрированном факторпространстве $P_{n-m}^{n-m-1} = P_n / P_{m-1}$.

В главном расслоении задается связность с помощью поля объекта связности $\Gamma = \{\Gamma_\alpha^i, \Gamma_{j\alpha}^i, \Gamma_{\alpha\beta}, \Gamma_{\alpha\beta}^i, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha\}$, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям [2]:

$$\Delta\Gamma_{(\alpha)}^i - \Gamma_{j\alpha}^i \omega^j + \omega_\alpha^i \equiv 0, \quad \Delta\Gamma_{j(\alpha)}^i + \omega_{j\alpha}^i \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{\alpha(\beta)} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma - \omega_{\beta\alpha} \equiv 0, \Delta\Gamma_{\beta(\gamma)}^\alpha - \omega_{\beta\gamma}^\alpha \equiv 0, \quad (6)$$

$$\Delta\Gamma_{\alpha(\beta)}^i - \Gamma_{j\beta}^i \omega_\alpha^j + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma^i - \Gamma_\beta^i \omega_\alpha + \Gamma_{\alpha\beta} \omega^i \equiv 0,$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^α.

Доказана теорема, что объект фундаментально-групповой связности Г в главном расслоении $G_r(V_{n-m})$ содержит 2 простейших подобъекта: объект плоскостной линейной связности $\Gamma_1 = \{\Gamma_{j\alpha}^i\}$ и объект нормальной аффинной связности

$\Gamma_2 = \{\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\}$, а также 2 простых подобъекта: объект центропроективной связности $\Gamma_3 = \{\Gamma_2, \Gamma_{\alpha\beta}\}$ и объект аффинно-групповой связности $\Gamma_4 = \{\Gamma_1, \Gamma^i_{\alpha}\}$. Эти подобъекты задают связности соответственно в фактор-расслоениях $L_{m^2}(V_{n-m})$, $L_{(n-m)^2}(V_{n-m})$, $L_{m(m+1)}(V_{n-m})$ и $L_{(n-m)(n-m+1)}(V_{n-m})$.

Определение. *Композиционным оснащением* [3] *конгруэнции гиперцентрированных плоскостей* V_{n-m} назовем присоединение к каждой точке плоскости P^{m-1}_m двух плоскостей:

1) $A \in P_m$, $A \notin P_{m-1} : A \oplus P_{m-1} = P_m$;

2) $N_{n-m-1} : P_m \oplus N_{n-m-1} = P_n$.

Зададим оснащающие плоскости совокупностями точек

$$C = A + \lambda^i A_i, \quad C_\alpha = A_\alpha + \lambda^i_\alpha A_i + \lambda_\alpha A .$$

Продифференцируем их и, переходя к сравнениям по модулю базисных форм, получим:

$$dC \equiv \theta C + (\Delta\lambda^i + \omega^i) A,$$

$$dC_\alpha \equiv \theta C_\alpha + \omega^\beta_\alpha C_\beta + (\Delta\lambda^i_\alpha + \lambda_\alpha \omega^i + \omega^i_\alpha) A_i + (\Delta\lambda_\alpha + \omega_\alpha) A ,$$

откуда следуют условия инвариантности оснащающих плоскостей:

$$\begin{gathered} \Delta\lambda^i + \omega^i = \lambda^i_\alpha \omega^\alpha, \quad \Delta\lambda^i_\alpha + \lambda_\alpha \omega^i + \omega^i_\alpha = \lambda^i_{\alpha\beta}\omega^\beta, \\ \Delta\lambda_\alpha + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha\beta}\omega^\beta. \end{gathered} \tag{7}$$

Композиционное оснащение, задаваемое полем квазитензора $\lambda = \{\lambda^i, \lambda^i_\alpha, \lambda_\alpha\}$ на многообразии V_{n-m}, позволяет охватить компоненты объекта связности Γ по формулам

$$\Gamma^i_\alpha = \lambda^i_\alpha + \Lambda^\beta_{j\alpha}\lambda_\beta\lambda^i\lambda^j - \Lambda_{j\alpha}\lambda^i\lambda^j,$$

$$\Gamma^i_{j\alpha} = \Lambda_{j\alpha}\lambda^i + \Lambda^\beta_{j\alpha}(\lambda^i_\beta - \lambda_\beta\lambda^i) + \delta^i_j(\Lambda_{k\alpha}\lambda^k - \lambda_\alpha - \lambda_\beta\Lambda^\beta_{k\alpha}\lambda^k),$$

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \Lambda_{i\beta}(\lambda_\alpha\lambda^i - \lambda^i_\alpha) - \lambda_\alpha\lambda_\beta - \Lambda^\gamma_{i\beta}\lambda_\gamma\lambda_\alpha\lambda^i, \qquad (8)$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = -\Lambda^\alpha_{i\gamma}\lambda^i_\beta + \delta^\alpha_\beta(\Lambda_{i\gamma}\lambda^i - \lambda_\gamma - \Lambda^\sigma_{i\gamma}\lambda_\sigma\lambda^i) - \delta^\alpha_\gamma\lambda_\beta,$$

$$\Gamma^i_{\alpha\beta} = \Lambda_{j\beta}(\lambda^j\lambda^i\lambda_\alpha - \lambda^j_\alpha\lambda^i) + \Lambda^\gamma_{j\alpha}(\lambda^j_\beta\lambda_\gamma\lambda^i - \lambda^j_\beta\lambda^i_\gamma) -$$
$$- \lambda^i_\beta\lambda_\alpha - \Lambda^\gamma_{j\beta}\lambda_\gamma\lambda^i\lambda^j\lambda_\alpha.$$

Действительно, продифференцировав функции (8) с учетом уравнений (3, 7) и переходя к сравнениям по модулю базисных форм, получим сравнения (6). Таким образом, справедлива

Теорема. *Композиционное оснащение конгруэнции* V_{n-m} *гиперцентрированных m-плоскостей* P^{m-1}_m *индуцирует фундаментально-групповую связность с объектом Г (8) в ассоциированном главном расслоении* $G_r(V_{n-m})$*, типовым слоем которого является подгруппа стационарности* G_r *плоскости* P^{m-1}_m.

Список литературы

1. *Близникас В.И.* Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых // Труды Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 43—112.

2. *Вялова А.В.* Объект кривизны фундаментально-групповой связности, ассоциированной с конгруэнцией гиперцентрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2018. Вып. 49. С. 59—66.

3. *Шевченко Ю.И.* Оснащение центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

A. V. Vyalova[1]
[1] Kaliningrad State Technical University
1 Sovietsky Prospect, Kaliningrad, 36022, Russia
vyalova.alexa@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5170-6191
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-8

The composition equipment for congruence of hypercentred planes

Submitted on May 31, 2019

In n-dimensional projective space P_n a manifold V_{n-m}, i. e., a congruence of hypercentered planes P_m, is considered. By a hypercentered plane P_m we mean m-dimensional plane with a (m – 1)-dimensional hyperplane L_{m-1}, distinguished in it. The first-order fundamental object Λ of the congruence is a pseudotensor.

The principal fiber bundle $G_r(V_{n-m})$ is associated with the congruence, $r = n(n-m+1)+m^2$.. The base of the bundle is the manifold V_{n-m} and a typical fiber is the stationarity subgroup G_r of a centered plane P_m.

In principal fiber bundle a fundamental-group connection is given using the field of the object Γ.

The composition equipment for the congruence is set by means of a point lying in the plane and not belonging to its hypercenter and an (n – m – 1)-dimensional plane, which does not have common points with the hypercentered plane. The composition equipment is given by field of quasitensor λ.

It is proved that the composition equipment for the congruence V_{n-m} of hypercentred m-planes P_m induces a fundamental-group connection with object Γ in the principal bundle $G_r(V_{n-m})$ associated with the congruence. In proof, the envelopments $\Gamma = \Gamma(\Lambda, \lambda)$ are built for the components of the connection object Γ.

Keywords: projective space, hypercentred plane, congruence, connection in a principal fiber bundle, composition equipment.

References

1. *Bliznikas, V.I.:* Some questions of the geometry of hypercomplexes of lines. Trudy Geom. Semin. VINITI. 6, 43—112 (1974) (in Russian).

2. *Vyalova, A.V.:* The curvature object for fundamental-group connection associated with congruence of hypercentred planes. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 49, 59—66 (2018) (in Russian).

3. *Shevchenko, Yu. I.:* The equipment of holonomic and nonholonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998) (in Russian).