УДК 514.76

***К. В. Полякова***
*Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
polyakova_@mail.ru
SPIN-код: 2956-1618, AuthorID: 14320
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-7

# Полусимметрия слоевых координат 3-го порядка и касательные векторы 3-го порядка для деформирующегося многообразия

В статье рассматривается многообразие с несимметричными векторами касательного пространства $n$-го порядка и несимметричными формами дифференциальной группы $n$-го порядка, построенное с помощью обобщенных дифференциалов. Слоевые координаты 2-го порядка этого многообразия являются полусимметричными. Показано, что полусимметрия слоевых координат 2-го порядка наследуется координатами 3-го порядка.

Проведен сравнительный анализ касательных пространств 2-го и 3-го порядков для рассматриваемого $m$-мерного многообразия, а также для $m$-мерного многообразия, отнесенного к голономным и неголономным реперам (то есть для голономного и неголономного $m$-мерных многообразий по терминологии Ю. И. Шевченко).

Показано, что построенное с помощью обобщенных дифференциалов многообразие является промежуточным вариантом между голономным и неголономным многообразиями.

***Ключевые слова:*** возмущение дифференциала, касательное пространство 3-го порядка, несимметричные реперы 3-го порядка, несимметричные кореперы 3-го порядка, полусимметричные координаты

*Поступила в редакцию 02.07.2026 г.*
© Полякова К. В., 2026

## Введение

Известно, что главное расслоение касательных реперов $L(X_m)$ над $m$-мерным гладким многообразием $X_m$ задается структурными уравнениями (см.: [11; 13])

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \tag{1}$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i. \tag{2}$$

Здесь и далее индексы принимают следующие значения:

$$i, j, k = 1, \dots, m.$$

Линейная группа $GL(m)$, действующая в касательном пространстве $TX_m$, является типовым слоем расслоения $L(X_m)$. Формы $(\omega^i, \omega_j^i, \omega_{jk}^i)$ инвариантного корепера относительно натурального корепера $(dx^i, dx_j^i, dx_{jk}^i)$ могут быть представлены формулами (см.: [2; 3; 7])

$$\omega^i = x_j^i dx^j,$$

$$\omega_j^i = -\overset{*}{x}{}_j^k dx_k^i - x_{jk}^i \omega^k, \tag{3}$$

$$\omega_{jk}^i = \Delta x_{jk}^i + (x_{j[k}^s x_{sl]}^i - x_{jkl}^i)\omega^l.$$

Тензорный дифференциальный оператор $\Delta$ действует по закону

$$\Delta S_{jk}^i = dS_{jk}^i + S_{jk}^l \omega_l^i - S_{lk}^i \omega_j^l - S_{jl}^i \omega_k^l.$$

Локальные координаты $x^i$ точки на многообразии являются базисными координатами, $x_j^i$ — слоевыми координатами 1-го порядка. Матрица $\left(x_j^i\right)$ невырожденная. Соответствующую обратную матрицу будем обозначать $\left(\overset{*}{x}{}_j^i\right)$, то есть $\overset{*}{x}{}_j^i x_k^j = \delta_k^i$. Симметричные по нижним индексам слоевые координаты 2-го и 3-го порядков $x_{jk}^i$, $x_{jkl}^i$ рассматриваются как независимые переменные [3, с. 149].

Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^i = 0$ фиксирует точку многообразия $X_m$ и слой расслоения $L(X_m)$. При этом касательное пространство $TL(X_m)$ содержит вертикальное пространство $T^v L(X_m)$, касательное к слою в точке многообразия. Вертикальные векторы имеют вид $e^i_j = -x^i_k \partial^k_j$, $\partial^k_j = \frac{\partial}{\partial x^j_k}$ (см.: [6]).

Представляет интерес рассмотрение многообразий с несимметричными векторами касательного пространства *n*-го порядка и несимметричными формами дифференциальной группы *n*-го порядка, поскольку все современные модели фундаментальных взаимодействий являются моделями с нарушенными симметриями [12, с. 74]. Пример такого многообразия — многообразие $\breve{X}_m$, введенное в статьях [7—10].

С целью построения такого многообразия введем отображение

$$\breve{D}\omega = D\omega + (df \wedge \omega)|_{\wedge^2 T^*} \tag{4}$$

как деформацию внешнего дифференциала $D$ в кокасательном пространстве $T^* X_m$ и отображение

$$\breve{d}v = dv + d(v(f^\xi))\partial_\xi \big|_{T^*} \tag{5}$$

как деформацию дифференциала касательных векторов в касательном пространстве $TX_m$.

В формулах (4, 5) функции

$$f = f(x^i, x^\xi) \text{ и } f^\xi = f^\xi(x^i)$$

позволяют деформировать внешний и обычный дифференциалы, причем

$$d\big(v(f^\xi)\big) = v^i d(\partial_i f^\xi),$$

где $v = v^i \partial_i$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial_\xi = \frac{\partial}{\partial x^\xi}$, а $x^\xi$ — слоевые координаты. Продолжаем изучать случай, когда значения индекса $\xi$ нумеруют элементы матрицы $(x^i_j)$, то есть $(x^\xi) = (x^i_j)$ и

$$\xi = m+1, \dots, m+m^2,$$

причем $f^{\xi} = f|_{x^{\xi}=1,\text{остальные}=0}$. В общем случае можно рассматривать $\left(x^{\xi}\right) = (x^i_j, x^i_{jk}, \dots)$.

Для натурального кобазиса $dx^i$ и базиса $\partial_i$ отображения (4, 5) принимают вид

$$\breve{D}(dx^i) = \overline{N}^i_{jk} dx^j \wedge dx^k,$$

$$\breve{d}(\partial_i) = \left(\partial_{ij} + \overline{N}^{\xi}_{ij}\partial_{\xi}\right) \otimes dx^j,$$

где кососимметрический объект $\overline{N}^i_{jk} = \delta^i_{[k}\partial_{j]} f$ и симметрический объект $\overline{N}^{\xi}_{ij} = \partial_{ij} f^{\xi}$ задают возмущения дифференциалов $\breve{D}$ и $\breve{d}$ на элементах $dx^i$ и $\partial_i$ соответственно. При этом, например, $\breve{D} g(x^i, x^{\xi}) = dg$, $\breve{D}(df) = 0$, $\breve{D}\left(dx^{\xi}\right) = 0$, кроме того, вдоль любой линии $\rho$ на многообразии $\breve{X}_m$ справедливо $\breve{D}^2\big|_{\rho} = 0$.

Определим внешнее (см.: [7]) возмущение дифференциала для элементов $\partial_{\xi} = \frac{\partial}{\partial x^{\xi}}$. Дифференцируем $\partial_{\xi}$ с помощью дифференциала $\breve{d}$:

$$\breve{d}\left(\partial_{\xi}\right) = d\left(\partial_{\xi}\right)\big|_{T^*} + \left(\partial_{\xi i} f^{\eta}\partial_{\eta}\right) \otimes dx^i = \partial_{\xi i} \otimes dx^i.$$

Отсюда следует

$$\breve{d}\left(\partial_{\xi}\right) = \partial_{\xi i} \otimes dx^i,$$

причем элементы

$$\partial_{\xi i} = \frac{\partial^2}{\partial x^{\xi} \partial x^i} = \frac{\partial^2}{\partial x^j_k \partial x^i} \text{ при } x^{\xi} = x^j_k$$

$$\text{и } \partial_{\xi i} \in T^2 L(X_m).$$

Ввиду того что дифференциалы деформируются, подразумевается, что и само многообразие $\breve{X}_m$ представляет собой деформацию обычного гладкого многообразия $X_m$, вследствие чего оно названо *деформирующимся* (см.: [5; 15]).

В [7—10] с помощью введенного отображения $\breve{D}$ над $m$-мерным деформирующимся многообразием $\breve{X}_m$ было построено главное расслоение реперов 2-го порядка $D_m^2(\breve{X}_m)$ со структурными уравнениями

$$\begin{aligned} \breve{D}\omega^i &= \omega^j \wedge \breve{\omega}_j^i, \\ \breve{D}\breve{\omega}_j^i &= \breve{\omega}_j^k \wedge \breve{\omega}_k^i + \omega^k \wedge \breve{\omega}_{jk}^i, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} \omega^i &= x_j^i dx^j, \\ \breve{\omega}_j^i &= -\overset{*}{x}_j^k dx_k^i - \breve{x}_{jk}^i \omega^k, \\ \breve{\omega}_{jk}^i &= \breve{\Delta}\breve{x}_{jk}^i + (\breve{x}_{j[k}^s \breve{x}_{sl]}^i - \breve{x}_{jkl}^i)\omega^l. \end{aligned} \tag{7}$$

Дифференциальный тензорный оператор $\breve{\Delta}$ действует по закону

$$\breve{\Delta}S_j^i = dS_j^i + S_j^l \breve{\omega}_k^i - S_k^i \breve{\omega}_j^k.$$

Формулы (6, 7) аналогичны формулам (1—3). Галочка показывает, что объекты получены в результате применения оператора $\breve{D}$. При этом новые слоевые координаты $\breve{x}_{jk}^i$ и $\breve{x}_{jkl}^i$ 2-го и 3-го порядков выражаются через симметричные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} \breve{x}_{jk}^i &= x_{jk}^i - N_{jk}^i, \\ \breve{x}_{jkl}^i &= x_{jkl}^i - x_{j(k}^s N_{l)s}^i - N_{j(k}^s x_{l)s}^i, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$N_{jk}^i = \overset{*}{x}_{[j}^l \delta_{k]}^i \partial_l f = \overline{N}_{pq}^i \overset{*}{x}_j^p \overset{*}{x}_k^q \tag{9}$$

— кручение канонической связности, то есть связности с симметричным тензором деформации $\gamma_{jk}^i$ с нулевой кривизной (см.: [1]).

## 1. Полусимметрия координат 3-го порядка $\breve{x}^i_{jkl}$

Альтернации слоевых координат 2-го и 3-го порядков, представленных выражениями (8, 9), удовлетворяют равенствам

$$\breve{x}^i_{[jk]} = -N^i_{jk},$$

$$\breve{x}^i_{j[kl]} = 0,$$

$$\breve{x}^i_{[jk]l} = \frac{1}{2}(N^s_{l[j}x^i_{k]s} - x^s_{l[j}N^i_{k]s} - N^s_{jk}x^i_{sl}), \qquad (10)$$

$$\breve{x}^i_{[j|k|l]} = \frac{1}{4}(N^s_{lk}x^i_{sj} - 2x^s_{k[j}N^i_{l]s} - N^s_{jk}x^i_{sl} - 2N^s_{jl}x^i_{sk}).$$

Перепишем равенство (9) с учетом (8)

$$\breve{x}^i_{jkl} = x^i_{jkl} - \frac{1}{2}\big(\breve{x}^s_{jk} + N^s_{jk}\big)N^i_{ls} - \frac{1}{2}\big(\breve{x}^s_{jl} + N^s_{jl}\big)N^i_{ks} -$$
$$- \frac{1}{2}N^s_{jk}\big(\breve{x}^i_{ls} + N^i_{ls}\big) - \frac{1}{2}N^s_{jl}\big(\breve{x}^i_{ks} + N^i_{ks}\big),$$

тогда

$$\breve{x}^i_{jkl} = x^i_{jkl} - \breve{x}^s_{j(k}N^i_{l)s} - N^s_{j(k}\breve{x}^i_{|s|l)} - 2N^s_{j(k}N^i_{l)s}.$$

Альтернации слоевых координат 3-го порядка, представленных выражением (9′), удовлетворяют равенствам

$$\breve{x}^i_{[jk]l} = \frac{1}{2}(N^i_{s[k}\breve{x}^s_{j]l} - N^s_{jk}\breve{x}^i_{sl} - \breve{x}^i_{s[k}N^s_{j]l} - N^s_{jk}N^i_{sl}). \qquad (10')$$

В работе [9] показано, что координаты 2-го порядка $\breve{x}^i_{jk}$ (компоненты канонической связности) являются полусимметрическими (см.: [4; 14; 16]), так как их альтернации представимы в виде (см.: [4, гл. IV, § 40])

$$N^i_{jk} = \tfrac{1}{m-1}\big(\delta^i_j N_k - \delta^i_k N_j\big), \qquad (11)$$

причем

$$N^i_{jk} = -\breve{x}^i_{[jk]}, \quad N_k = \breve{x}^s_{[sk]}. \qquad (12)$$

Найдем формулы для $N^i_{jkl}$, аналогичные формулам (11, 12).

**Теорема.** *Полусимметрия координат 2-го порядка* $\breve{x}^i_{jk}$ *наследуется координатами 3-го порядка* $\breve{x}^i_{jkl}$ *в виде*

$$N^i_{jkl} = \frac{1}{m-1}\left(\delta^i_l N_{jk} - \delta^i_k N_{jl}\right), \tag{13}$$

*где*

$$N^i_{jkl} = \breve{x}^i_{[jk]l}, \quad N_{jk} = \breve{x}^s_{[sj]k} + \breve{x}^s_{[jk]s}. \tag{14}$$

*Доказательство.* Подставив обозначение (9) в равенство (10), перепишем (10) в виде суммы симметричных по нижним индексам координат $x^i_{jk}$ обычного многообразия $X_m$:

$$\breve{x}^i_{[jk]l} = \frac{1}{8}\left(\delta^i_k \overset{*}{x}{}^p_s x^s_{jl} - \delta^i_l \overset{*}{x}{}^p_s x^s_{jk} + \overset{*}{x}{}^p_l x^i_{jk} - \overset{*}{x}{}^p_j x^i_{kl}\right)\partial_p f. \tag{15}$$

Найдем свертку (15) по индексам $i$ и $j$:

$$\breve{x}^i_{[ik]l} = \frac{1}{8}\left(\overset{*}{x}{}^p_l x^i_{ik} - \overset{*}{x}{}^p_i x^i_{kl}\right)\partial_p f.$$

Свертку компонент $\breve{x}^i_{[jk]l}$ по индексам $i$ и $l$ приведем к виду

$$\breve{x}^i_{[jk]i} = \frac{1}{8}\left((m-1)\overset{*}{x}{}^p_s x^s_{jk} + \overset{*}{x}{}^p_i x^i_{jk} - \overset{*}{x}{}^p_j x^i_{ki}\right)\partial_p f.$$

Тогда компоненты $\breve{x}^i_{[jk]l}$ выражаются по формуле

$$\breve{x}^i_{[jk]l} = \frac{1}{m-1}\left(\delta^i_l\left(\breve{x}^s_{[jk]s} + \breve{x}^s_{[sj]k}\right) - \delta^i_k\left(\breve{x}^s_{[jl]s} + \breve{x}^s_{[sj]l}\right)\right)\partial_p f. \tag{16}$$

Учитывая обозначения (14) в равенстве (16), получим (13).

## 2. Касательные пространства 2-го и 3-го порядков

Проведем сравнительный анализ касательных пространств 2-го и 3-го порядков для многообразия $\breve{X}_m$, а также для голономного $\overset{h}{X}_m$ и неголономного $\overset{nh}{X}_m$ многообразий по терминологии Ю.И. Шевченко [13]. В случае голономного и неголономного многообразий говорят, что многообразие отнесено к голономным и неголономным реперам (см.: [11]). Пусть $T\breve{X}_m = span(\varepsilon_i)$ и $T^*\breve{X}_m = span(\omega^i)$ — касательное и кокасательное пространства к многообразию $\breve{X}_m$ в его текущей точ-

ке, причем $\omega^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$. Для построенных дифференциалов справедливо

$$\breve{D}\omega^i = D\omega^i + N^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

$$\breve{d}\varepsilon_i = d\varepsilon_i + N^\xi_{ij}\omega^j \otimes \partial_\xi.$$

где $N^\xi_{ij} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \overline{N}^\xi_{lk}$.

Касательное пространство 2-го порядка $T^2\breve{X}_m$ деформирующегося многообразия $\breve{X}_m$ натянуто на векторы

$$\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j,$$

$$\breve{\varepsilon}_{ij} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} + \breve{x}^k_{ij}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk}\partial_\xi,$$

$\partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i \partial x^j}$, причем

$$\breve{\Delta}\varepsilon_i = \breve{\varepsilon}_{ij} \otimes \omega^j, \quad \breve{\Delta}\breve{\varepsilon}_{ij} - \breve{\omega}^k_{ij} \otimes \varepsilon_k = \omega^k \otimes \breve{\varepsilon}_{ijk}; \qquad (17)$$

$$\breve{\varepsilon}_{[ij]} = -N^k_{ij}\varepsilon_k.$$

Для векторов оператор $\breve{\Delta}$ имеет вид

$$\breve{\Delta}\breve{\varepsilon}_{ij} = \breve{d}\breve{\varepsilon}_{ij} - \breve{\varepsilon}_{kj}\breve{\omega}^k_i - \breve{\varepsilon}_{ik}\breve{\omega}^k_j.$$

Тогда $\dim T^2\breve{X}_m = m + \frac{1}{2}m(m+1) = \frac{1}{2}m(m+3)$.

**Замечание.** Для многообразия $\breve{X}_m$ прикасающиеся (см.: [13]) пространства 2-го порядка совпадают между собой, а прикасающиеся пространства 3-го порядка совпадают между собой.

Касательные векторы $\breve{\varepsilon}_{ijk}$ 3-го порядка выражаются через векторы $\varepsilon_l$, $\breve{\varepsilon}_{lp}$, $\partial_{lsp}$, $\partial_\xi$, $\partial_{p\xi}$ следующим образом:

$$\breve{\varepsilon}_{ijk} = \left(\breve{x}^l_{ijk} - \breve{x}^l_{ip}\breve{x}^p_{jk} - \breve{x}^l_{p(j}\breve{x}^p_{|i|k)}\right)\varepsilon_l +$$

$$+\left(\delta^p_j \breve{x}^l_{ik} + \delta^l_i \breve{x}^p_{jk} + \delta^p_k \breve{x}^l_{ij}\right)\breve{\varepsilon}_{lp} +$$

$$+\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^s_j \overset{*}{x}{}^p_k \left(\partial_{lsp} f^\xi + \partial_p N^\xi_{ls}\right)\partial_\xi +$$

$$+\left(\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^s_j \overset{*}{x}{}^p_k\right)\partial_{lsp} + \left(\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^s_j \overset{*}{x}{}^p_k N^\xi_{ls}\right)\partial_{p\xi}.$$

При этом касательные векторы 3-го порядка выходят за пределы пространства $span(\partial_i, \partial_{jk}, \partial_{lpq})$ за счет вертикальных векторов $\partial_\xi = \partial_j^k$, $\partial_{i\xi} = \partial_{ij}^{\ k}$.

Найдем альтернации векторов $\breve{\varepsilon}_{ijk}$ по двум индексам:

$$\breve{\varepsilon}_{i[jk]} = \left(\breve{x}^l_{i[jk]} - \breve{x}^l_{ip}\breve{x}^p_{[jk]}\right)\varepsilon_l + \breve{x}^p_{[jk]}\breve{\varepsilon}_{ip} + \\ + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^s_{[j}\overset{*}{x}{}^p_{k]}\left(\partial_p N^\xi_{ls}\partial_\xi + N^\xi_{ls}\partial_{p\xi}\right),$$

$$\breve{\varepsilon}_{[ij]k} = \left(\breve{x}^l_{[ij]k} - \breve{x}^l_{[i|p|}\breve{x}^p_{j]k} - \tfrac{1}{2}\breve{x}^l_{p[j}\breve{x}^p_{i]k} - \tfrac{1}{2}\breve{x}^l_{pk}\breve{x}^p_{[ij]}\right)\varepsilon_l + \\ + \left(\delta^p_{[j}\breve{x}^l_{i]k} + \delta^l_{[i}\breve{x}^p_{j]k} + \delta^p_k\breve{x}^l_{[ij]}\right)\breve{\varepsilon}_{lp},$$

$$\breve{\varepsilon}_{[i|j|k]} = \breve{x}^s_{j[k}\breve{\varepsilon}_{i]p} + \breve{\varepsilon}_{s[k}\breve{x}^s_{i]j} - N^s_{ik}\breve{\varepsilon}_{sj} + \tfrac{1}{2}\big(N^l_{s[k}\breve{x}^s_{i]j} + \breve{x}^l_{js}N^s_{ik} - \\ - \breve{x}^l_{s[k}\breve{x}^s_{i]j} - 2\breve{x}^l_{[i|s|}\breve{x}^s_{|j|k]} - 2\breve{x}^l_{s[k}N^s_{i]j}\big)\varepsilon_l + \\ + \overset{*}{x}{}^l_{[i}\overset{*}{x}{}^s_j\overset{*}{x}{}^p_{k]}\left(\partial_p N^\xi_{ls}\partial_\xi + N^\xi_{ls}\partial_{p\xi}\right)$$

в силу (9) и симметрии $\partial_{lsp} = \frac{\partial^3}{\partial x^l \partial x^s \partial x^p}$.

Учитывая альтернации (10) и (10′) координат 2-го и 3-го порядков, получим

$$\breve{\varepsilon}_{[ij]k} = \big(\delta^s_{[j}\breve{x}^l_{i]k} + \delta^l_{[i}\breve{x}^s_{j]k} - \delta^s_k N^l_{ij}\big)\breve{\varepsilon}_{ls} + \\ + \big(N^l_{s[j}\breve{x}^s_{i]k} + \tfrac{1}{2}N^s_{ij}N^l_{ks} - \tfrac{1}{4}\breve{x}^l_{s[j}\breve{x}^s_{|k|i]} - \tfrac{3}{4}\breve{x}^l_{[i|s|}\breve{x}^s_{j]k}\big)\varepsilon_l, \quad (18)$$

$$\breve{\varepsilon}_{i[jk]} = \breve{x}^l_{ip}N^p_{jk}\varepsilon_l - N^p_{jk}\breve{\varepsilon}_{ip} + \overset{*}{x}{}^l_i\overset{*}{x}{}^s_{[j}\overset{*}{x}{}^p_{k]}\left(\partial_p N^\xi_{ls}\partial_\xi + N^\xi_{ls}\partial_{p\xi}\right),$$

$$\breve{\varepsilon}_{[i|j|k]} = \breve{x}^s_{j[k}\breve{\varepsilon}_{i]s} + \breve{\varepsilon}_{s[k}\breve{x}^s_{i]j} - N^s_{ik}\breve{\varepsilon}_{sj} + \tfrac{1}{2}\big(N^l_{s[k}\breve{x}^s_{i]j} + \breve{x}^l_{js}N^s_{ik} - \\ - \breve{x}^l_{s[k}\breve{x}^s_{i]j} - 2\breve{x}^l_{[i|s|}\breve{x}^s_{|j|k]} - 2\breve{x}^l_{s[k}N^s_{i]j}\big)\varepsilon_l + \\ + \overset{*}{x}{}^l_{[i}\overset{*}{x}{}^s_j\overset{*}{x}{}^p_{k]}\left(\partial_p N^\xi_{ls}\partial_\xi + N^\xi_{ls}\partial_{p\xi}\right).$$

Из (18) видно, что альтернации $\breve{\varepsilon}_{[ij]k}$ векторов 3-го порядка принадлежат касательному пространству $T^2\breve{X}_m$ 2-го порядка, а альтернации $\breve{\varepsilon}_{i[jk]}$ и $\breve{\varepsilon}_{[i|j|k]}$ ему не принадлежат.

Найдем размерность касательного пространства 3-го порядка $T^3\breve{X}_m = span(\varepsilon_i, \breve{\varepsilon}_{ij}, \breve{\varepsilon}_{ijk})$. Векторы 3-го порядка $\breve{\varepsilon}_{ijk}$ несимметричны, но линейно зависимы. Поскольку альтернации $\breve{\varepsilon}_{[ij]k}$ векторов $\breve{\varepsilon}_{ijk}$ принадлежат пространству $T^2\breve{X}_m = span(\varepsilon_i, \breve{\varepsilon}_{ij})$, а альтернации $\breve{\varepsilon}_{i[jk]}$ и $\breve{\varepsilon}_{[i|j|k]}$ — пространству $span(\varepsilon_l, \breve{\varepsilon}_{sj}, \partial_\xi, \partial_{p\xi})$, то количество векторов $\breve{\varepsilon}_{ijk}$ равно $\bar{C}^2_m \cdot m = C^2_{m+1} \cdot m = \frac{1}{2}m^2(m+1)$. Следовательно,

$$\dim T^3\breve{X}_m = \dim T^2\breve{X}_m + \frac{1}{2}m^2(m+1) =$$

$$= \frac{1}{2}m(m+3) + \frac{1}{2}m^2(m+1) = \frac{1}{2}m(m^2+2m+3).$$

Итак, размерность касательного пространства 3-го порядка $T^3\breve{X}_m$ (ср.: [11; 13]) равна

$$\dim T^3\breve{X}_m = \tfrac{1}{2}m(m^2+2m+3).$$

Известны размерности касательных пространств порядка $p$ для голономного многообразия $\overset{h}{X}_m$ $(m > 1)$ (см.: [3]):

$$\dim T^p\overset{h}{X}_m = C^p_{m+p} - 1, \tag{19}$$

и для неголономного многообразия $\overset{nh}{X}_m$ $(m > 1)$ (см.: [13]):

$$\dim T^p\overset{nh}{X}_m = \frac{m(m^p-1)}{m-1}. \tag{20}$$

При $p = 2$ и $p = 3$ формулы (19) и (20) дают следующие размерности:

$$\dim T^2\overset{h}{X}_m = C^2_{m+2} - 1 = \tfrac{1}{2}m(m+3),$$

$$\dim T^2\overset{nh}{X}_m = \frac{m(m^2-1)}{m-1} = m(m+1);$$

$$\dim T^3\overset{h}{X}_m = C^3_{m+3} - 1 = \tfrac{1}{6}m(m^2+6m+11),$$

$$\dim T^3\overset{nh}{X}_m = \frac{m(m^3-1)}{m-1} = m(m^2+m+1).$$

Для размерностей рассматриваемого в данной статье многообразия $\breve{X}_m$ $(m > 1)$, а также голономного и неголономного многообразий по терминологии Ю.И. Шевченко (см.: [13]) имеем следующие взаимосвязи:

$$\dim T^2\breve{X}_m = \dim T^2\overset{h}{X}_m,$$

$$\dim T^3\overset{h}{X}_m < \dim T^3\breve{X}_m < \dim T^3\overset{nh}{X}_m.$$

Последнее неравенство

$$\frac{1}{6}m(m^2+6m+11) < \frac{1}{2}m(m^2+2m+3) < m(m^2+m+1)$$

показывает, что построенное с помощью обобщенных дифференциалов многообразие $\breve{X}_m$ является промежуточным вариантом между голономным $\overset{h}{X}_m$ и неголономным $\overset{nh}{X}_m$ многообразиями.

**Замечание.** При m $= 1$, то есть для кривой, имеем

$$\dim T^2\overset{h}{X}_1 = dim T^2\breve{X}_1 = dim T^2\overset{nh}{X}_1 = 2,$$

$$\dim T^3\overset{h}{X}_1 = dim T^3\breve{X}_1 = dim T^3\overset{nh}{X}_1 = 3.$$

### 3. Касательные векторы 3-го порядка

На многообразии $X_m$ имели равенство $d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \varepsilon_j(\varepsilon_i)$ (см.: [6]).

Из (17) следует, что векторнозначная форма

$$\breve{d}\varepsilon_i = \varepsilon_j \otimes \breve{\omega}_i^j + \breve{\varepsilon}_{ij} \otimes \omega^j$$

действует как отображение в пространстве $T^2\breve{X}_m$. Вычислим его действие на векторах $\varepsilon_j$:

$$\breve{d}\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \breve{\varepsilon}_{ij} - \breve{x}_{ij}^k\varepsilon_k.$$

Сами векторы $\varepsilon_j$ также порождают отображение — производную по направлению, поэтому получим векторы 2-го порядка

$$\varepsilon_j(\varepsilon_i) = \overset{*}{x}{}_i^l \overset{*}{x}{}_j^k \partial_{kl} = \breve{\varepsilon}_{ij} - \breve{x}_{ij}^k \varepsilon_k - \overset{*}{x}{}_i^l \overset{*}{x}{}_j^k N_{lk}^{\xi} \partial_{\xi}.$$

На многообразии $T^2\breve{X}_m$ получим

$$\breve{d}\varepsilon_i\big(\varepsilon_j\big) = \varepsilon_j(\varepsilon_i) + \overset{*}{x}{}_i^l \overset{*}{x}{}_j^k N_{lk}^{\xi} \partial_{\xi} = \varepsilon_j(\varepsilon_i) + \overline{N}_{ij}^{\xi} \partial_{\xi},$$

то есть имеет место неравенство $\breve{d}\varepsilon_i\big(\varepsilon_j\big) \neq \varepsilon_j\big(\varepsilon_j\big)$.

Под действием отображений $\varepsilon_k$ векторы 2-го порядка $\breve{\varepsilon}_{ij}$ переходят в векторы 3-го порядка $\varepsilon_k\big(\breve{\varepsilon}_{ij}\big)$, которые обозначим $\breve{\varepsilon}_{ij,k}$, то есть

$$\breve{\varepsilon}_{ij,k} = \varepsilon_k\big(\breve{\varepsilon}_{ij}\big) = \overset{*}{x}{}_k^s \partial_s \left( \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q \partial_{pq} + \breve{x}_{ij}^p \varepsilon_p + \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q N_{pq}^{\xi} \partial_{\xi} \right) =$$

$$= \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q \overset{*}{x}{}_k^s \partial_{pqs} + \overset{*}{x}{}_k^s \breve{x}_{ij}^p \overset{*}{x}{}_p^q \partial_{qs} + \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q \overset{*}{x}{}_k^s \left( N_{pq}^{\xi} \partial_{\xi s} + \partial_s N_{pq}^{\xi} \partial_{\xi} \right).$$

Под действием отображений $\breve{\varepsilon}_{ij}$ векторы 1-го порядка $\varepsilon_k$ переходят в векторы 3-го порядка $\varepsilon_k\big(\breve{\varepsilon}_{ij}\big)$, которые обозначим $\breve{\varepsilon}_{k,ij}$, то есть

$$\breve{\varepsilon}_{k,ij} = \breve{\varepsilon}_{ij}(\varepsilon_k) = \left( \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q \partial_{pq} + \breve{x}_{ij}^p \varepsilon_p + \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q N_{pq}^{\xi} \partial_{\xi} \right) \left( \overset{*}{x}{}_k^s \partial_s \right) =$$

$$= \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q \overset{*}{x}{}_k^s \partial_{spq} + \overset{*}{x}{}_k^s \breve{x}_{ij}^p \overset{*}{x}{}_p^q \partial_{sq} + \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q \overset{*}{x}{}_k^s N_{pqv}{}^u \left( \partial_{su}^v - \overset{*}{x}{}_u^v \partial_s \right).$$

Разность полученных векторов 3-го порядка не является нулевой:

$$\breve{\varepsilon}_{ij,k} - \breve{\varepsilon}_{k,ij} = \varepsilon_k\big(\breve{\varepsilon}_{ij}\big) - \breve{\varepsilon}_{ij}(\varepsilon_k) =$$

$$= \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q \overset{*}{x}{}_k^s \left( \partial_s N_{pqv}{}^u \partial_u^v - N_{pqv}{}^u \overset{*}{x}{}_u^v \partial_s \right),$$

тогда как на многообразии $X_m$ имеем перестановочность $\varepsilon_{ij,k} = \varepsilon_{k,ij}$.

Выразим $\breve{\varepsilon}_{ij,k}$ и $\breve{\varepsilon}_{k,ij}$ через $\breve{\varepsilon}_{ijk}$ и $\breve{\varepsilon}_{ij}$:

$$\breve{\varepsilon}_{ij,k} = \varepsilon_k\big(\breve{\varepsilon}_{ij}\big) = \breve{\varepsilon}_{ijk} - \breve{x}_{ik}^p \breve{\varepsilon}_{pj} - \breve{x}_{jk}^p \breve{\varepsilon}_{ip} -$$

$$-\left(\breve{x}^l_{ijk}-\breve{x}^l_{ip}\breve{x}^p_{jk}-\breve{x}^l_{p[j}\breve{x}^p_{|i|k]}\right)\varepsilon_l-$$

$$-\left(\overset{*}{x}{}^l_i\overset{*}{x}{}^s_j\overset{*}{x}{}^p_k\partial_{lsp}f^\xi+\breve{x}^p_{ij}\overset{*}{x}{}^l_p\overset{*}{x}{}^s_kN^\xi_{ls}\right)\partial_\xi,$$

$$\breve{\varepsilon}_{k,ij}=\breve{\varepsilon}_{ij}(\varepsilon_k)=\breve{\varepsilon}_{ijk}-\breve{x}^p_{ik}\breve{\varepsilon}_{pj}-\breve{x}^p_{jk}\breve{\varepsilon}_{ip}-$$

$$-\left(\breve{x}^l_{ijk}-\breve{x}^l_{ip}\breve{x}^p_{jk}-\breve{x}^l_{p(j}\breve{x}^p_{|i|k)}+\overset{*}{x}{}^p_i\overset{*}{x}{}^q_j\overset{*}{x}{}^s_kN_{pqs}{}^l\right)\varepsilon_l-$$

$$-\overset{*}{x}{}^l_i\overset{*}{x}{}^s_j\overset{*}{x}{}^p_k\left(\partial_{lsp}f^\xi+\partial_pN^\xi_{ls}\right)\partial_\xi.$$

**Замечание.** Если $N^\xi_{pq}=0$, то $\varepsilon_k\left(\breve{\varepsilon}_{ij}\right)=\breve{\varepsilon}_{ij}(\varepsilon_k)$.

### *Список литературы*


1. *Белова О.О.* Плоские связности в области проективного пространства // ДГМФ. 2025. №56. С. 59—68.

2. *Евтушик Л.Е.* Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1969. Т. 2. С. 119—150.

3. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

4. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

5. *Петрова Л.И.* Кососимметричные дифференциальные формы: Законы сохранения. Основы теории поля. М., 2006.

6. *Полякова К.В.* О задании аффинной связности 2-го порядка векторнозначными формами 1-го, 2-го и 3-го порядков // ДГМФ. 2016. Вып. 47. С. 109—126.

7. *Полякова К.В.* О расширении касательного пространства 2-го порядка гладкого многообразия // ДГМФ. 2022. Вып. 53. С. 94—111.

8. *Полякова К.В.* О связности, кручение и кривизна которой не являются тензорами // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 29—44.

9. *Полякова К.В.* Аналоги симметрической и плоской связностей с нетензорами кручения и кривизны // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 78—95.

10. *Полякова К.В.* Обобщенные тождества Риччи и Бианки для с вязности с нетензорами кручения и кривизны // ДГМФ. 2025. №56. С. 107—118.

11. *Рыбников А. К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Математика. 1983. № 1. С. 73—80.

12. *Сарданашвили Г. А.* Геометрия и классические поля. Современные методы теории поля. Т. 1. М., 1996.

13. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий : учеб. пособие. Калининград, 1998.

14. *Golab S.* On semi-symmetric and quarter-symmetric metric linear connection // Tensor N. S. 1975. Vol. 29. P. 249—254.

15. *Petrova L.* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations, Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory, Interpretation of the Einstein Equation // Axioms. 2021. Vol. 10. Art. № 46.

16. *Yano K.* On semi-symmetric metric connection // Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées. 1970. Vol. 15. P. 1579—1586.

**Для цитирования:** *Полякова К. В.* Полусимметрия слоевых координат 3-го порядка и касательные векторы 3-го порядка для деформирующегося многообразия // ДГМФ. 2026. № 57 (2). С. 63—78. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-7.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010:53B05, 53C05, 58A10

*K. V. Polyakova*
*Immanuel Kant Baltic Federal University*
*14 A. Nevskogo Str., Kaliningrad, 236016, Russia*
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-7

## Third-order tangent vectors and semi-symmetric third-order fiber coordinates for a deforming manifold

Submitted on July 2, 2026

The paper considers a manifold with non-symmetric tangent vectors of the $n$-th order and non-symmetric forms of the $n$-th order differential group, constructed using generalized differentials.

The second-order fiber coordinates of this manifold are semi-symmetric. It is shown that the semi-symmetry of the second-order fiber coordinates is inherited by the third-order coordinates.

A comparative analysis of the second- and third-order tangent spaces is carried out for the $m$-dimensional manifold under consideration, as well as for an $m$-dimensional manifold referred to holonomic and non-holonomic frames (i. e., for holonomic and non-holonomic $m$-dimensional manifolds according to Yu. I. Shevchenko's terminology).

It is shown that the manifold constructed using generalized differentials is an intermediate case between holonomic and non-holonomic manifolds.

*Keywords:* deformation of differentials, third-order tangent space, non-symmetric third-order frames, non-symmetric third-order coframes, semi-symmetric coordinates

*References*

1. *Belova, O.O.:* Flat connections in a domain of projective space. DGMF, 56, 59—68 (2025).

2. *Evtushik, L.E.:* Differential connections and infinitesimal transformations of a prolonged pseudogroup. Tr. Geom. Sem., 2, Moscow, 119—150 (1969).

3. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Problems in Geometry. Tr. Geom. Sem. Itogi Nauki i Tekhn., 1, Moscow, 139—189 (1966).

4. *Norden, A.P.:* Spaces of affine connection. Moscow (1976).

5. *Petrova, L.I.:* Skew-symmetric differential forms: Conservation-laws. Fundamentals of fielf theory, Moscow (2006).

6. *Polyakova, K.V.:* Vector-valued forms of the 1st, 2nd and 3rd orders for affine connection of the 2nd order. DGMF, 47, 109—126 (2016).

7. *Polyakova, K.V.:* On some extension of the second order tangent space for a smooth manifold. DGMF, 53, 94—111 (2022).

8. *Polyakova, K.V.:* On a connection with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor. DGMF, 54(2), 29—44 (2023).

9. *Polyakova, K.V.:* Analogues of torsion-free and curvature-free connections with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor. DGMF, 55(2), 78—95 (2024).

10. *Polyakova, K.V.:* Generalized Ricci and Bianchi identities for a connection with torsion non-tensor and curvature non-tensor. DGMF, 56, 107—118 (2025).

11. *Rybnikov, A.K.:* Second-order generalized affine connections. J. Soviet Math., **27**:1, 84—93 (1983).

12. *Sardanashvily, G.A.:* Geometry and Classical Fields. Modern Methods of Field Theory, 1, Moscow (1996).

13. *Shevchenko, Yu.I.:* Clothings of holonomic and non-holonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998).

14. *Golab, S.:* On semi-symmetric and quarter-symmetric metric linear connection. Tensor N.S., 29, 249—254 (1975).

15. *Petrova, L.:* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations, Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory, Interpretation of the Einstein Equation. Axioms, 10, 46 (2021).

16. *Yano, K.:* On semi-symmetric metric connection. Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées, 15, 1579—1586 (1970).

**For citation:** Polyakova, K.V.: Third-order tangent vectors and semi-symmetric third-order fiber coordinates for a deforming manifold. DGMF, **57**:2, 63—78 (2026). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-7.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)