УДК 574.76

В. С. Малаховский

*(Балтийский федеральный университет им. И. Канта,
г. Калининград)*

КОНГРУЭНЦИИ ЭКВИДИСТАНТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ АССОЦИИРОВАННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ

В трехмерном пространстве Лобачевского L_3 в интерпретации Кэли — Клейна исследуются двупараметрические семейства (конгруэнции) эквидистантных поверхностей со специальными свойствами ассоциированных фокальных многообразий, поверхностей, прямолинейных конгруэнций и конгруэнций коник. Доказаны теоремы существования рассмотренных классов конгруэнций эквидистантных поверхностей и дана их геометрическая характеристика.

Ключевые слова: конгруэнция, эквидистантная поверхность, абсолют, полюс, поляра, фокальное многообразие, квадрика, коника.

§ 1. Фокальное многообразие конгруэнции *K*

Определение 1.1. *Конгруэнцией K называется двухмерное многообразие эквидистантных поверхностей Q в трехмерном пространстве Лобачевского L_3, базовые плоскости которых также описывают двупараметрическое семейство.*

Пусть Q_0 — абсолют пространства, т. е. невырожденная нелинейчатая квадрика ассоциированного проективного пространства P_3. Пространство Лобачевского L_3 в интерпретации Кэли — Клейна [1] — это множество внутренних точек абсолюта Q_0.

Расширенное пространство Лобачевского $\overline{L}_3$ включает и точки абсолюта Q_0, являющиеся несобственными точками пространства $\overline{L}_3 = L_3 \cup Q_0$.

Эквидистантная поверхность Q в интерпретации Кэли-Клейна — это невырожденная нелинейчатая квадрика, расположенная внутри абсолюта Q_0 и касающаяся его вдоль коники C (базовой коники).

Отнесем конгруэнцию K к геометрически фиксированному реперу $\left\{\overline{A}_\alpha\right\}$ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma = \overline{0,3})$, где A_0 — полюс базовой плоскости $\lambda \supset C$ относительно абсолюта Q_0, A_1 и A_2 — точки пересечения касательной плоскости к поверхности (A_0) с базовой коникой C, A_3 — полюс плоскости $(A_0 A_1 A_2)$ относительно абсолюта.

При надлежащей нормировке вершин репера уравнение абсолюта Q_0 и эквидистантной поверхности $Q \in K$ запишутся соответственно в виде:

$$F \overset{def}{=} (x^3)^2 + (x^0)^2 - 2x^1 x^2 = 0; \tag{1.1}$$

$$\Phi \overset{def}{=} (x^3)^2 + m^2 (x^0)^2 - 2x^1 x^2 = 0, \tag{1.2}$$

где $|m| > 1$, так как квадрика Q расположена внутри абсолюта.

Деривационные формулы репера $\left\{\overline{A}_\alpha\right\}$ и уравнения структуры запишутся соответственно в виде

$$d\,\overline{A}_\alpha = \omega_\alpha^\beta\ \overline{A}_\beta; \tag{1.3}$$

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta, \tag{1.4}$$

причем компоненты деривационных формул удовлетворяют условию эквипроективности и условиям инвариантности абсолюта Q_0, т. е. (см. [2, с. 50])

$$\omega_1^2 = 0\,,\ \omega_2^1 = 0\,,\ \omega_0^0 = 0\,,\ \omega_3^3 = 0\,,\ \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0\,,\ \omega_2^0 = \omega^1\,,$$
$$\omega_1^0 = \omega^2\,,\ \omega_3^1 = \omega_2^3\,,\ \omega_3^2 = \omega_1^3\,,\ \omega_0^3 = \omega_3^0 = 0\,. \qquad (1.5)$$

Так как поверхность (A_0), ассоциированная с конгруэнцией K, не вырождается в линию, то формы Пфаффа

$$\omega_0^1 \stackrel{def}{=} \omega^1\,;\ \omega_0^2 \stackrel{def}{=} \omega^2 \qquad (1.6)$$

линейно независимы, то есть

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0\,. \qquad (1.7)$$

Используя уравнения стационарности точки пространства P_3

$$dx^\alpha = -x^\beta \omega_\beta^\alpha + \theta x^\alpha \quad (d\theta \equiv 0)\,, \qquad (1.8)$$

находим:

$$\frac{1}{2} d\Phi = \theta\Phi + mdm(x^0)^2 + (1-m^2)x^0(x^2\omega^1 + x^1\omega^2)\,. \qquad (1.9)$$

Замкнутая система дифференциальных уравнений конгруэнции K состоит из уравнений (1.5), уравнений

$$dm = m_1\omega^1 + m_2\omega^2\,;\ \omega_0^3 = 0\,,\ \omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2\,;\ \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2 \quad (1.10)$$

и внешних квадратичных уравнений

$$\Delta m_1 \wedge \omega^1 + \Delta m_2 \wedge \omega^2 = 0\,,\ \Delta a \wedge \omega^1 + db \wedge \omega^2 = 0\,,$$
$$db \wedge \omega^1 + \Delta c \wedge o^2 = 0\,, \qquad (1.11)$$

где

$$\Delta m_1 = dm_1 - m_1\omega_1^1\,;\ \Delta m_2 = dm_2 - m_2\omega_2^2\,;$$
$$\Delta a = da - 2a\omega_1^1\,;\ \Delta c = dc - 2c\omega_2^2\,.$$

Следовательно, конгруэнции K существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Учитывая в формуле (1.9) пфаффовы уравнения (1.10), получим:

$$\frac{1}{2} d\Phi = x^0((mm_1x^0 + (1-m^2)x^2)\omega^1 +$$
$$+ (mm_2x^0 + (1-m^2)x^1)\omega^2)\,. \qquad (1.12)$$

Из (1.2, 1.12) следует

Теорема 1.1. *Фокальное многообразие эквидистантной поверхности $Q \in K$ состоит из базовой коники C и двух точек M_1, M_2:*

$$\begin{aligned} \overline{M}_1 &= \overline{M} + \frac{m}{m^2-1}\sqrt{2m_1m_2-(m^2-1)^2}\,\overline{A}_3, \\ \overline{M}_2 &= \overline{M} - \frac{m}{m^2-1}\sqrt{2m_1m_2-(m^2-1)^2}\,\overline{A}_3, \end{aligned} \qquad (1.13)$$

где

$$\overline{M} = \overline{A}_0 + \frac{m}{m^2-1}(m_2\overline{A}_1 + m_1\overline{A}_2), \qquad (1.14)$$

причем $(MA_3; M_1M_2) = -1$ (1.15).

§ 2. Ассоциированные поверхности и прямолинейные конгруэнции

Рассмотрим поверхности (A_α) и прямолинейные конгруэнции $(A_\alpha A_\beta)$ $(\alpha \neq \beta)$, ассоциированные с конгруэнцией К.

Справедливы следующие результаты:

Теорема 2.1. *Асимптотические линии на поверхностях (A_0) и (A_3) соответствуют.*

Действительно, из (1.5, 1.10) следует, что асимптотические линии на этих поверхностях определяются одним уравнением

$$a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2 = 0. \qquad (2.1)$$

Теорема 2.2. *Торсы прямолинейных конгруэнций $(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2)$ и (A_0A_3), (A_0A_1) и (A_1A_3), (A_0A_2) и (A_2A_3) соответствуют.*

Доказательство. Торсы каждой пары этих конгруэнций определяются одним уравнением:

$$a(\omega^1)^2 - c(\omega^2)^2 = 0 \text{ — пары } (A_1A_2) \text{ и } (A_0A_3);$$
$$\omega^2(a\omega^1 + b\omega^2) = 0 \text{ — пары } (A_0A_1) \text{ и } (A_1A_3); \qquad (2.2)$$
$$\omega^1(b\omega^1 + c\omega^2) = 0 \text{ — пары } (A_0A_2) \text{ и } (A_2A_3).$$

Теорема 2.3. *Фокусы луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) гармонически делят точки A_1 и A_2 базовой коники G.*

Доказательство. Фокусы F_1 и F_2 луча (A_1A_2) определяются формулами:

$$\overline{F_1} = \sqrt{c}\,\overline{A_1} + \sqrt{a}\,\overline{A_2}; \; \overline{F_2} = \sqrt{c}\,\overline{A_1} - \sqrt{a}\,\overline{A_2}. \qquad (2.3)$$

Следовательно,

$$(A_1A_2\; F_1F_2) = -1. \qquad (2.4)$$

Теорема 2.4. *Если сеть координатных линий сопряжена на поверхности (A_0), то она сопряжена и на поверхностях (A_1), (A_2), (A_3).*

Доказательство. Из (2.1) следует, что сопряженность координатной сети $\omega^1\omega^2 = 0$ на поверхности (A_0), а значит, и на (A_3) характеризуется условием

$$b = 0. \qquad (2.5)$$

При выполнении этого условия уравнения асимптотических линий на поверхностях (A_1) и (A_2) соответственно примут вид:

$$a^2(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = 0, \qquad (2.6)$$
$$(\omega^1)^2 + c^2(\omega^2)^2 = 0, \qquad (2.7)$$

а это характеризует сопряженность сети координатных линий на данных поверхностях.

§ 3. Конгруэнция (C_0)

Определение 3.1. *Конгруэнцией (C_0) называется конгруэнция коник C_0, образованных пересечением с эквидистантной поверхностью Q касательной плоскости к поверхности (A_0), то есть*

$$C_0 = Q \cap (A_0 A_1 A_2)\,. \tag{3.1}$$

Уравнения коники C_0 имеют вид:

$$\begin{cases} f = m^2 (x^0)^2 - 2x^1 x^2 = 0, \\ x^3 = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Имеем:

$$\frac{1}{2} df \Big| x^0 ((1-m^2) x^2 + m m_1 x^0))\omega^1 + ((1-m^2)x^1 + m m_2 x^0)\omega^2 +$$

$$+ qf - dx^3 \Big| = (ax^1 + bx^2)\omega^1 + (bx^1 + cx^2)\omega^2\,. \tag{3.4}$$

Из (3.2 — 3.4) следует, что фокальное многообразие коники C_0 состоит из фокальных точек A_1 и A_2 и фокальных точек, определяемых системой уравнений (3.2) и уравнением

$$(ax^1 + bx^2)((1-m^2)x^1 + m m_2 x^0) -$$

$$-(bx^1 + cx^2)((1-m^2)x^2 + + m m_1 x^0) = 0\,. \tag{3.5}$$

Исключая x^0 из уравнений (3.2) и (3.5) с использованием результата получим однородное уравнение четвертого порядка

$$(1-m^2)^2 (a(x^1)^2 - c(x^2)^2)^2 + 2x^1 x^2 ((m_2 a - m_1 b)x^1 +$$

$$+ (m_2 b - m_1 c)x^2)^2 = 0\,, \tag{3.6}$$

определяющее четыре фокальных точки коники C_0.

§ 4. Специальные классы конгруэнций *K*

Определение 4.1. *Конгруэнцией K_1 называется конгруэнция K, с асимптотической сетью координатных линий на поверхности (A_0), не вырождающейся в плоскость.*

Теорема 4.1. *Конгруэнции K_1 существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.*

Доказательство. Конгруэнции *K* характеризуются условиями

$$a = 0,\ c = 0. \tag{4.1}$$

В силу (4.1) замкнутая система пфаффовых уравнений конгруэнции K_1 состоит из уравнений (1.5) и уравнений

$$dm = m_1\omega^1 + m_2\omega^2, \;\; \omega_0^3 = 0, \;\; \omega_1^3 = b\omega^2, \;\; \omega_2^3 = b\omega^1, \; db = 0, \quad (4.2)$$
$$\Delta m_1 \wedge \omega_1 + \Delta m_2 \wedge \omega^2 = 0.$$

Эта система в инволюции и определяет конгруэнции K_1 с произволом одной функции двух аргументов.

Теорема 4.2. *Конгруэнции K_1 обладают следующими свойствами:*

1) поверхности (A_1) и (A_2) являются торсами;

2) прямолинейные конгруэнции (A_1A_2) и (A_0A_3) выражаются в линейчатые поверхности.

3) фокальными точками коники C_0 являются двукратные точки A_0 и A_2 и точки P_1 и P_2:

$$\overline{P}_1 = \frac{1}{m}\sqrt{2m_1m_2}\,\overline{A}_0 + m_2\overline{A}_1 + m_1\overline{A}_2,$$
$$\overline{P}_2 = -\frac{1}{m}\sqrt{2m_1m_2}\,\overline{A}_0 + m_2\overline{A}_1 + m_1\overline{A}_2 \quad (4.3)$$

Определение 4.2. *Конгруэнцией K_2 называется конгруэнция К, характеризуемая условиями:*

$$b = 0, \; m_1 = 0, m_2 = 0 \quad (4.4)$$

Теорема 4.3. *Конгруэнции K_2 существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.*

Доказательство. Учитывая в уравнения (1.10) соотношения (4.4), получим:

$$dm = 0, \omega_0^3 = 0, \omega_1^3 = b\omega^1, \omega_2^3 = c\omega^2. \quad (4.5)$$

Замыкание системы (4.5) имеет вид:

$$\Delta a \wedge \omega^1 = 0, \Delta c \wedge \omega^2 = 0. \quad (4.6)$$

Из (4.6) непосредственно следует утверждение теоремы:

$$S_1 = 2; \; S_2 = 0; \; q = 2; \; Q = 2; \; N = 2. \quad (4.7)$$

Теорема 4.4. *Конгруэнции K_2 обладают следующими свойствами:*

1) фокальное многообразие эквидистантной поверхности $Q \in K_2$ состоит из коники C и точек пересечения прямой A_0A_3 с эквидистантной поверхностью;

2) координатная сеть линий сопряжена на поверхностях (A_0), (A_1), (A_2), (A_3);

3) фокальное многообразие коники C_0 состоит из точек A_1, A_2 и точек H_j (j = 1, 2, 3, 4):

$$\overline{H}_1 = \frac{1}{m}\sqrt[4]{4ac}\,\overline{A}_0 + \sqrt{c}\,\overline{A}_1 + \sqrt{a}\,\overline{A}_2\,; \tag{4.8}$$

$$\overline{H}_2 = \frac{1}{m}\sqrt[4]{4ac}\,\overline{A}_0 - \sqrt{c}\,\overline{A}_1 + \sqrt{a}\,\overline{A}_2\,;$$

$$\overline{H}_3 = \frac{1}{m}\sqrt[4]{4ac}\,\overline{A}_0 + \sqrt{c}\,\overline{A}_1 - \sqrt{a}\,\overline{A}_2\,;$$

$$\overline{H}_4 = \frac{1}{m}\sqrt[4]{4ac}\,\overline{A}_0 - \sqrt{c}\,\overline{A}_1 - \sqrt{a}\,\overline{A}_2\,.$$

Определение 4.3. *Конгруэнцией K_0 называется K_1, для которой*

$$m_1 = 0, m_2 = 0\,. \tag{4.9}$$

Теорема 4.5. *Конгруэнции K_0 существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.*

Доказательство. Учитывая в уравнениях (4.2) соотношения (4.9), получим:

$$dm = 0, \omega_0^3 = 0, \omega_1^3 = b\omega^2, \omega_2^3 = b\omega^1, db = 0\,. \tag{4.10}$$

Система (1.5, 4.10) полнее интегрируется. Ч. т. д.

Теорема 4.6. *Конгруэнции K_0 обладают следующими свойствами:*

1) фокальное многообразие эквидистентной поверхности $Q \in K_0$ состоит их коники C и точек пересечения прямой A_0A_3 с поверхностью Q;

2) конгруэнция (C_0) ассоциированных коник вырождается в однопараметрическое семейство коник.

Доказательство.

1. Из формул (1.13, 1.14) в силу (4.9) следует:

$$\overline{M} = \overline{A}_0\,;\ \overline{M}_1 = im\overline{A}_3\,;\ \overline{M}_2 = -im\overline{A}_3\ \ (i = \sqrt{-1}\,). \qquad (4.11)$$

2. Учитывая (4.1) и (4.9) в формулах (3.3) и (3.4), получим:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}df\Big|_{x^3=0} = (1-m^2)x^0(x^1\omega^2 + x^2\omega^1);\\ &-\frac{1}{2}dx^3\Big|_{x^3=0} = b(x^1\omega^2 + x^2\omega^1). \end{aligned} \qquad (4.12)$$

Следовательно, вдоль линии

$$x^1\omega^2 + x^2\omega^1 = 0 \qquad (4.13)$$

коника C_0 стационарна.

Список литературы

1. *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия // ГИТТЛ. М., 1953.
2. *Малаховский В. С.* Конгруэнции эквидистантных поверхностей и эквидистант в пространстве Лобачевского // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 23. Калининград, 1992. С. 49—53.

V. Malakhovsky

CONGRUENCES OF EQUIDISTANT SURFACES
WITH SPECIAL PROPERTIES
OF ASSOCIATED GEOMETRICAL FIGURES

In three-dimensional Lobachevsky-space L_3 considered in Cayley — Klein interpretatation congruence of equidistant surfaces with special properties associated geometrical figures are investigated. For special classes of such congruences theorems of existence and geometrical properties are established.