УДК 514.75

Ю. И. Шевченко

*(Российский государственный университет им. И. Канта
Калининград)*

ПРОЕКТИВНАЯ СВЯЗНОСТЬ ЛАПТЕВА — ОСТИАНУ, АССОЦИИРОВАННАЯ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОСКОСТЕЙ

В многомерном проективном пространстве рассмотрено распределение плоскостей. Предложен способ задания ассоциированной с распределением обобщенной проективной связности (проективной связности Лаптева — Остиану) с помощью поля объекта связности, содержащего квазитензор связности. Доказано, что объект кривизны-кручения этой связности образует тензор, включающий тензор линейной кривизны-кручения с подтензором кручения проективной связности, который содержит тензор аффинного кручения. Показано, что полувырожденная обобщенная проективная связность без аффинного кручения характеризует полуголономность распределения. Вырождение проективной связности Лаптева — Остиану лишает ее проективного кручения и превращает в центропроективную связность. В каноническом случае проективной связности Лаптева — Остиану задание поля квазитензора связности эквивалентно нормализации 1-го рода распределения.

Ключевые слова: распределение плоскостей, проективная связность, тензор кривизны-кручения.

1. Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I,\ldots=\overline{1,n})$ с деривационными формулами

$$dA=\vartheta A+\omega^I A_I\,,\ dA_I=\vartheta A_I+\omega_I^J A_J+\omega_I A, \tag{1}$$

причем структурные формы $\omega^I, \omega^I_J, \omega_I$ проективной группы $GP(n)$, эффективно действующей в пространстве P_n, удовлетворяют уравнениям Картана (см., напр., [1, с. 173])

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J,\ D\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \omega^K \wedge \Omega^I_{JK},\ D\omega_I = \omega^J_I \wedge \omega_J; \quad (2)$$

$$\Omega^I_{JK} = -\delta^I_J \omega_K - \delta^I_K \omega_J. \quad (3)$$

В пространстве P_n рассмотрим распределение, то есть n-параметрическое семейство S_n центрированных m-плоскостей P^0_m. Поместим вершины $A, A_i\ (i,... = \overline{1,m})$ подвижного репера $\{A, A_I\}$ на плоскость P^0_m, причем A — в ее центр. Тогда из деривационных формул (1) следуют уравнения распределения S_n

$$\omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{iJ}\omega^J\ (\alpha,... = \overline{m+1,n}). \quad (4)$$

Продолжим уравнения (4). Сначала продифференцируем их внешним образом

$$(\Delta\Lambda^\alpha_{iJ} - \delta^\alpha_J \omega_i) \wedge \omega^J = 0, \quad (5)$$

где δ^α_J — обобщенный символ Кронекера, а дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda^\alpha_{iJ} = d\Lambda^\alpha_{iJ} + \Lambda^\beta_{iJ}\omega^\alpha_\beta - \Lambda^\alpha_{jJ}\omega^j_i - \Lambda^\alpha_{iK}\omega^K_J.$$

Замечание 1. Действие тензорного оператора Δ нельзя формально ограничивать на часть компонент объекта, к которому он применяется. Например, часть компонент тензора, вообще говоря, не образует тензор.

Теперь разрешим квадратичные уравнения (5) по лемме Картана:

$$\Delta\Lambda^\alpha_{iJ} - \delta^\alpha_J \omega_i = \Lambda^\alpha_{iJK}\omega^K, \quad (6)$$

$$\Lambda^\alpha_{iJK} = \Lambda^\alpha_{iKJ}. \quad (7)$$

Утверждение 1. *Фундаментальный объект 1-го порядка* $\Lambda = \{\Lambda^\alpha_{iJ}\}$ *распределения* S_n *является квазитензором* [2].

2. С распределением S_n ассоциируется [3] главное расслоение центропроективных реперов $C_{m(m+1)}(P_n)$, принадлежащих плоскостям P^0_m, со структурными уравнениями (2_1) и следующими:

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^K \wedge \omega^i_{jK}, \; D\omega_i = \omega^j_i \wedge \omega_j + \omega^J \wedge \omega_{iJ}; \quad (8)$$

$$\omega^i_{jK} = \Lambda^\alpha_{jK}\omega^i_\alpha - \delta^i_j\omega_K - \delta^i_K\omega_j, \quad \omega_{iJ} = \Lambda^\alpha_{iJ}\omega_\alpha. \quad (9)$$

Запишем часть структурных уравнений (2_1) для форм ω^i и уравнения (8_1) в другом виде:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + \omega^J \wedge \theta^i_J, \quad (10)$$

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \delta^i_j\omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + \omega^K \wedge \theta^i_{jK}; \quad (11)$$

$$\theta^i_J = \delta^\alpha_J\omega^i_\alpha, \; \theta^i_{jK} = \Lambda^\alpha_{jK}\omega^i_\alpha - \delta^i_j\delta^\alpha_K\omega_\alpha. \quad (12)$$

Определение 1. *Гладкое многообразие со структурными уравнениями* (2_1, 10, 11, 8_2) *назовем обобщенным расслоением* [4] *проективных реперов над проективным пространством P_n и обозначим $G_{m(m+1)+[m]}(P_n)$. Это многообразие можно также назвать расслоением приклеенных проективных реперов.*

Поясним обозначение. Буква m заключена в квадратные скобки, так как m форм ω^i, которые выглядят как слоевые, входят в состав базисных форм ω^I. Назовем их базисно-слоевыми формами. Формы ω^i_j, ω_i являются слоевыми формами расслоения центропроективных реперов $C_{m(m+1)}(P_n)$. При фиксации точки A пространства P_n слоем расслоения $G_{m(m+1)+[m]}(P_n)$ становится не проективная группа $GP(m) = G_{m(m+1)+m}$, а центропроективная группа $C_{m(m+1)}$.

3. Применим прием Лумисте [5] задания связностей в главных расслоениях к обобщенному расслоению $G_{m(m+1)+[m]}(P_n)$. Рассмотрим преобразование базисно-слоевых форм ω^i и слоевых форм ω^i_j, ω_i с помощью линейных комбинаций базисных форм ω^I:

$$\tilde{\omega}^i = \omega^i - C^i_J\omega^J, \; \tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Pi^i_{jK}\omega^K, \; \tilde{\omega}_i = \omega_i - \Pi_{iJ}\omega^J, \quad (13)$$

где $C^i_J, \Pi^i_{jK}, \Pi_{iJ}$ — некоторые функции, дифференциальные уравнения для которых получим ниже. Найдем внешние дифференциалы форм (13)

$$D\tilde{\omega}^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + \omega^J \wedge (dC^i_J - C^i_K \omega^K_J + \theta^i_J),$$

$$D\tilde{\omega}^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \delta^i_j \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + \omega^K \wedge (d\Pi^i_{jK} - \Pi^i_{jL}\omega^L_K + \theta^i_{jK}),$$

$$D\tilde{\omega}_i = \omega^j_i \wedge \omega_j + \omega^J \wedge (d\Pi_{iJ} - \Pi_{iK}\omega^K_J + \omega_{iJ}).$$

Внесем в правые части формы (13)

$$\begin{gathered}
D\tilde{\omega}^i = \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + \omega^J \wedge (\Delta C^i_J + \theta^i_J) + (\delta^j_J - C^j_J)\Pi^i_{jK}\omega^J \wedge \omega^K, \\
D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \delta^i_j \tilde{\omega}_k \wedge \tilde{\omega}^k + \tilde{\omega}_j \wedge \tilde{\omega}^i + \\
+ \omega^K \wedge (\Delta\Pi^i_{jK} - \delta^i_j C^k_K \omega_k - C^i_K \omega_j + \theta^i_{jK}) - [\Pi^k_{jK}\Pi^i_{kL} + \\
+ \delta^i_j(\delta^k_K \Pi_{kL} + \Pi_{kK}C^k_L) + \delta^i_K \Pi_{jL} + \Pi_{jK}C^i_L]\ \omega^K \wedge \omega^L, \\
D\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}^j_i \wedge \tilde{\omega}_j + \omega^J \wedge (\Delta\Pi_{iJ} + \Pi^j_{iJ}\omega_j + \omega_{iJ}) - \Pi^j_{iJ}\Pi_{jK}\omega^J \wedge \omega^K.
\end{gathered} \tag{14}$$

Применим теорему Картана — Лаптева [6] в рассматриваемом случае. Это делали Г.Ф. Лаптев и Н.М. Остиану в работе [7] при использовании несколько другого аналитического аппарата. В дальнейшем будем говорить о проективной связности Лаптева — Остиану, которая обобщает классическую проективную связность Картана [8], поэтому ее можно также называть обобщенной проективной связностью. Внутренние проективные связности Лаптева — Остиану построены в статье [7] и в работах А.В. Столярова (см., напр., [9]).

Зададим поле объекта обобщенной проективной связности

$$\begin{gathered}
\Delta C^i_J + \theta^i_J = C^i_{JK}\omega^K, \ \ \Delta\Pi_{iJ} + \Pi^j_{iJ}\omega_j + \omega_{iJ} = \Pi_{iJK}\omega^K, \\
\Delta\Pi^i_{jK} - \delta^i_j C^k_K \omega_k - C^i_K \omega_j + \theta^i_{jK} = \Pi^i_{jKL}\omega^L.
\end{gathered} \tag{15}$$

Откуда с помощью обозначений (9_2, 12) следует

Утверждение 2. *Объект проективной связности Лаптева — Остиану* $\Pi = \{C^i_J, \Pi^i_{jK}, \Pi_{iJ}\}$ *образует квазитензор лишь вместе с фундаментальным квазитензором* Λ *распределения*

S_n. *Квазитензор* $\{ \Pi, \Lambda \}$ *содержит простейший [10] квазитензор связности* C^i_J, *являющийся подобъектом объекта плоскостной обобщенной аффинной связности [11], и простой [10] квазитензор* $\{ C^i_J, \Pi^i_{jK}, \Lambda \}$.

Подставим дифференциальные уравнения (15) в структурные уравнения (14):

$$D\tilde{\omega}^i = \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + R^i_{JK}\omega^J \wedge \omega^K, \quad D\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}^j_i \wedge \tilde{\omega}_j + R_{iJK}\omega^J \wedge \omega^K,$$

$$D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \delta^i_j \tilde{\omega}_k \wedge \tilde{\omega}^k + \tilde{\omega}_j \wedge \tilde{\omega}^i + R^i_{jKL}\ \omega^K \wedge \omega^L, \quad (16)$$

где компоненты объекта кривизны-кручения $R = \{ R^i_{JK}, R^i_{jKL}, R_{iJK} \}$ обобщенной проективной связности выражаются по формулам

$$R^i_{JK} = C^i_{[JK]} + L^j_{[J}\Pi^i_{jK]}, \quad R_{iJK} = \Pi_{i[JK]} - \Pi^j_{i[J}\Pi_{jK]},$$

$$R^i_{jKL} = \Pi^i_{j[KL]} - \Pi^k_{j[K}\Pi^i_{kL]} - \delta^i_j L^k_{[K}\Pi_{kL]} - L^i_{[K}\Pi_{jL]}; \quad (17)$$

$$L^i_J = \delta^i_J - C^i_J, \quad (18)$$

причем альтернирование выполняется по крайним индексам в квадратных скобках.

Теорема 1 [12]. *Проективная связность Лаптева — Остиану, ассоциированная с распределением* S_n *в проективном пространстве* P_n, *задается полем объекта П, компоненты которого удовлетворяют уравнениям (15) и определяют формы связности (13) со структурными уравнениями (16), содержащими компоненты объекта кривизны-кручения R (17).*

Итак, пространство обобщенной проективной связности $P_{m,n}$, ассоциированное с распределением S_n, определяется структурными уравнениями (2_1, 16). Отметим, что формула (17_1) с учетом обозначения (18) показывает, что объект кручения R^i_{JK} проективной связности Лаптева — Остиану строится с помощью поля квазитензора связности C^i_J и компонент Π^i_{jK} объекта связности П.

4. Найдем дифференциальные сравнения для компонент объекта кривизны-кручения *R*. Предварительно из очевидного равенства $\Delta\delta^I_J = 0$ с учетом уравнений (4) распределения S_n получим уравнения для обобщенных символов Кронекера $\delta^i_J,\ \delta^\alpha_J$:

$$\Delta\delta^i_J + \delta^\alpha_J\omega^i_\alpha = 0, \qquad \Delta\delta^\alpha_J = -\delta^k_J\Lambda^\alpha_{kK}\omega^K. \tag{19}$$

Левые части уравнений (19$_1$) для символа δ^i_J и уравнений (15$_1$) для компонент квазитензора связности Π^i_J с учетом обозначений (12$_1$) совпадают, поэтому разности L^i_J (18) образуют тензор:

$$\Delta L^i_J \equiv 0, \tag{20}$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^I. Компоненты этого тензора входят в формулы (17$_{1,3}$) для компонент R^i_{JK}, R^i_{jKL} объекта кривизны-кручения *R*. Обращение тензора L^i_J в нуль приведет к существенному упрощению этих формул, поэтому назовем L^i_J тензором невырожденности обобщенной проективной связности.

Продолжим дифференциальные уравнения (15), а именно: раскроем оператор Δ и обозначения (9$_2$, 12), продифференцируем внешним образом, разрешим по лемме Картана и запишем результат в виде сравнений:

$$\Delta C^i_{JK} + C^j_J\omega^i_{jK} - C^i_L\Omega^L_{JK} - \delta^\alpha_J\delta^i_K\omega_\alpha - \delta^k_J\Lambda^\alpha_{kK}\omega^i_\alpha \equiv 0, \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\Delta\Pi^i_{jKL} + \Pi^k_{jK}\omega^i_{kL} - \Pi^i_{kK}\omega^k_{jL} - \Pi^i_{jM}\Omega^M_{KL} - \delta^i_j(\Pi^k_{KL}\omega_k + C^k_K\omega_{kL}) - \\ - C^i_{KL}\omega_j - C^i_K\omega_{jL} + \Lambda^\alpha_{jKL}\omega^i_\alpha - \Lambda^\alpha_{jK}\delta^i_L\omega_\alpha + \delta^i_j\delta^k_K\Lambda^\alpha_{kL}\omega_\alpha \equiv 0, \\ \Delta\Pi_{iJK} - \Pi_{jJ}\omega^j_{iK} - \Pi_{iL}\Omega^L_{JK} + \Pi^j_{iJK}\omega_j + \Pi^j_{iJ}\omega_{jK} + \Lambda^\alpha_{iJK}\omega_\alpha \equiv 0.\end{gathered}$$

Альтернируем полученные сравнения по двум индексам с использованием симметричного выражения (3) форм Ω^I_{JK} и симметрии (7) функций Λ^α_{iJK}:

$$\begin{gathered}\Delta C^i_{[JK]} + C^j_{[J}\omega^i_{jK]} - \delta^\alpha_{[J}\delta^i_{K]}\omega_\alpha - \delta^k_{[J}\Lambda^\alpha_{kK]}\omega^i_\alpha \equiv 0, \\ \Delta\Pi^i_{j[KL]} + \Pi^k_{j[K}\omega^i_{kL]} - \Pi^i_{k[K}\omega^k_{jL]} - C^i_{[KL]}\omega_j - C^i_{[K}\omega_{jL]} - \\ -\delta^i_j(C^k_{[KL]}\omega_k + C^k_{[K}\omega_{kL]} - \delta^k_{[K}\Lambda^\alpha_{kL]}\omega_\alpha) - \Lambda^\alpha_{j[K}\delta^i_{L]}\omega_\alpha \equiv 0, \\ \Delta\Pi_{i[JK]} - \Pi_{j[J}\omega^j_{iK]} + \Pi^j_{i[JK]}\omega_j + \Pi^j_{i[J}\omega_{jK]} \equiv 0.\end{gathered} \tag{22}$$

Согласно формулам (17), используя ($15_{2,3}$, 20, 22), получим:

$$\Delta R^i_{JK} + C^j_{[J}\omega^i_{jK]} - \delta^\alpha_{[J}\delta^i_{K]}\omega_\alpha - L^j_{[J}(\delta^i_j C^k_{K]}\omega_k + C^i_{K]}\omega_j - \theta^i_{jK]}) \equiv 0,$$

$$\Delta R^i_{jKL} + \Pi^k_{j[K}(\omega^i_{kL]} - \theta^i_{kL]}) - \Pi^i_{k[K}(\omega^k_{jL]} - \theta^k_{jL]}) - \delta^i_j[C^k_{[KL]}\omega_k +$$

$$+ C^k_{[K}\omega_{kL]} - \delta^k_{[K}\Lambda^\alpha_{kL]}\omega_\alpha + L^k_{[K}(\Pi^l_{kL]}\omega_l + \omega_{kL]})] -$$

$$-(C^i_{[KL]} - C^k_{[K}\Pi^i_{kL]})\omega_j - C^i_{[K}\omega_{jL]} + \delta^i_{[K}\Lambda^\alpha_{jL]}\omega_\alpha +$$

$$+ \Pi^k_{j[K}C^i_{L]}\omega_k - L^i_{[K}(\Pi^k_{jL]}\omega_k + \omega_{jL]}) \equiv 0,$$

$$\Delta R_{iJK} - \Pi_{j[J}(\omega^j_{iK]} - \theta^j_{iK]}) + (\Pi^j_{i[JK]} - \Pi^k_{i[J}\Pi^j_{kK]} + C^j_{[J}\Pi_{iK]} +$$

$$+ \delta^j_i C^k_{[J}\Pi_{kK]})\omega_j \equiv 0.$$

Подставляя обозначения (9, 12_2) форм $\omega^i_{jK}, \omega_{iJ}, \theta^i_{jK}$, выражение (18) компонент тензора L^i_J и пользуясь формулами ($17_{1,3}$) для компонент R^i_{JK}, R^i_{jKL} объекта кривизны-кручения R, найдем

$$\Delta R^i_{JK} \equiv 0, \quad \Delta R_{iJK} + R^j_{iJK}\omega_j \equiv 0, \tag{23}$$

$$\Delta R^i_{jKL} - \delta^i_j R^k_{KL}\omega_k - R^i_{KL}\omega_j \equiv 0.$$

Эти дифференциальные сравнения для компонент объекта кривизны-кручения R проективной связности Лаптева — Остиану непосредственно обобщают сравнения для компонент тензора кривизны-кручения классической проективной связности Картана [13].

Теорема 2. *Объект кривизны-кручения* $R = \{R^i_{JK}, R^i_{jKL}, R_{iJK}\}$ *обобщенной проективной связности является тензором, содержащим подтензор* R^i_{JK} *— тензор кручения и подтензор* $\overline{R} = \{R^i_{JK}, R^i_{jKL}\}$ *— тензор линейной кривизны-кручения проективной связности Лаптева — Остиану.*

Замечание 2. В случае проективной связности Картана тензор $\overline{R}$ принимает вид $\{R^i_{jk}, R^i_{jkl}\}$ и называется [13] тензором аффинной кривизны-кручения классической проективной связности.

5. Рассмотрим особые случаи пространства обобщенной проективной связности. Если кручение отсутствует

$$R^i_{JK} = 0, \tag{24}$$

то структурные уравнения (16_1) упрощаются:

$$D\tilde{\omega}^i = \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j, \tag{25}$$

а дифференциальные сравнения (23_3) принимают вид: $\Delta R^i_{jKL} \equiv 0.$ Сравнения (23_2) внешне не изменяются.

Следствие 1 (теор. 2). *В пространстве проективной связности Лаптева — Остиану без кручения $P'_{m,n}$ тензор линейной кривизны-кручения $\overline{R}$ вырождается в тензор линейной кривизны R^i_{jKL}, отличный от тензора кривизны плоскостной линейной связности [3], а тензор проективной кривизны-кручения R превращается в тензор проективной кривизны $\{R^i_{jKL}, R_{iJK}\}$.*

Пусть $\overline{R} = 0$ — нет линейной кривизны-кручения, то есть к условиям (24) добавляются равенства

$$R^i_{jKL} = 0, \tag{26}$$

тогда структурные уравнения (16_3) также упрощаются

$$D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \delta^i_j \tilde{\omega}_k \wedge \tilde{\omega}^k + \tilde{\omega}_j \wedge \tilde{\omega}^i, \tag{27}$$

а дифференциальные сравнения (23_2) принимают вид: $\Delta R_{iJK} \equiv 0.$

Следствие 2 (теор. 2). *В пространстве обобщенной проективной связности без линейной кривизны-кручения $P''_{m,n}$ тензор проективной кривизны-кручения R вырождается в тензор R_{iJK}.*

Наконец, пространство проективной связности Лаптева — Остиану без проективной кривизны-кручения $P'''_{m,n}$ обладает нулевым тензором *R*, то есть к условиям (24, 26) нужно добавить

$$R_{iJK} = 0. \tag{28}$$

Подставим равенства (28) в структурные уравнения (16_2)

$$D\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}^j_i \wedge \tilde{\omega}_j. \tag{29}$$

Итак, пространство $P'''_{m,n}$ имеет структурные уравнения (2_1, 25, 27, 29). Эти уравнения состоят из структурных уравнений (2_1) проективного пространства P_n и структурных уравнений (25, 27, 29) проективной группы $GP(m)$.

Может показаться, что пространство $P'''_{m,n}$ есть прямое произведение пространства P_n и группы $GP(m)$, но это не так. Действительно, уравнения стационарности точки A пространства P_n: $\omega^I = 0$ в силу обозначений (13_1) обращают формы $\tilde{\omega}^i$ в нуль: $\tilde{\omega}^i = 0.$ Тогда уравнения (27, 29) принимают вид:

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k, \;\; D\omega_i = \omega^j_i \wedge \omega_j,$$

а это структурные уравнения центропроективной (коаффинной) группы $GA^*(m) = C_{m(m+1)}$, действующей в центрированной плоскости P^0_m.

6. Учитывая уравнения (4) распределения S_n, запишем подробнее ряд дифференциальных уравнений и сравнений. Уравнения (6) компонент фундаментального квазитензора $\{\Lambda^\alpha_{iJ}\} = \{\Lambda^\alpha_{ij}, \Lambda^\alpha_{i\beta}\}$:

$$\Delta\Lambda^\alpha_{ij} \equiv 0, \;\; \Delta\Lambda^\alpha_{i\beta} - \Lambda^\alpha_{ij}\omega^j_\beta - \delta^\alpha_\beta\omega_i \equiv 0. \tag{30}$$

Уравнения (15_1) компонент квазитензора связности $\{C^i_J\} = \{C^i_j, C^i_\alpha\}$:

$$\Delta C^i_j = \overline{C}^i_{jK}\omega^K, \;\; \Delta C^i_\alpha - C^i_j\omega^j_\alpha + \omega^i_\alpha = C^i_{\alpha K}\omega^K; \tag{31}$$

$$\overline{C}^i_{jK} = C^i_{jK} + C^i_\alpha\Lambda^\alpha_{jK}. \tag{32}$$

Сравнения (20) компонент тензора невырожденности $\{L^i_J\} = \{L^i_j, L^i_\alpha\}$:

$$\Delta L^i_j \equiv 0, \;\; \Delta L^i_\alpha - L^i_j\omega^j_\alpha \equiv 0. \tag{33}$$

Сравнения (23) компонент тензора кривизны-кручения $R = \{R^i_{jk}, R^i_{j\alpha}, R^i_{\alpha\beta}, R^i_{jkl}, R^i_{jk\alpha}, R^i_{j\alpha\beta}, R_{ijk}, R_{ij\alpha}, R_{i\alpha\beta}\},$ из которых выпишем лишь те, которые упрощаются уравнениями (4):

$$\Delta R^i_{jk} \equiv 0,\ \ \Delta R^i_{j\alpha} - R^i_{jk}\omega^k_\alpha \equiv 0,\ \ \Delta R^i_{jkl} - \delta^i_j R^m_{kl}\omega_m - R^i_{kl}\omega_j \equiv 0,$$
$$\Delta R^i_{jk\alpha} - R^i_{jkl}\omega^l_\alpha - \delta^i_j R^l_{k\alpha}\omega_l - R^i_{k\alpha}\omega_j \equiv 0, \tag{34}$$
$$\Delta R_{ijk} + R^l_{ijk}\omega_l \equiv 0,\ \ \Delta R_{ij\alpha} - R_{ijk}\omega^k_\alpha + R^k_{ij\alpha}\omega_k \equiv 0.$$

Из сравнений и уравнений (30, 31, 33, 34) вытекают:

Утверждение 3. *Фундаментальный квазитензор Λ^α_{iJ} содержит тензор Λ^α_{ij}, квазитензор связности C^i_J включает тензор C^i_j, тензор невырожденности L^i_J имеет подтензор L^i_j.*

Теорема 3. *Тензор кривизны-кручения обобщенной проективной связности R кроме тензоров кручения R^i_{JK} и линейной кривизны-кручения $\overline{R}$ содержит другие простые подтензоры: $\{R^i_{jk}$, R^i_{jkl}, $R_{ijk}\}$ — классической кривизны-кручения, $\{R^i_{jK}$, R^i_{jkL}, $R_{ijK}\}$ — расширенной классической кривизны-кручения. Тензор $\overline{R}$ включает простые подтензоры: $\{R^i_{jk}$, $R^i_{jkl}\}$ — аффинной кривизны-кручения, $\{R^i_{jK}$, $R^i_{jkL}\}$ — расширенной аффинной кривизны-кручения. Тензор R^i_{JK} имеет простейший подтензор аффинного кручения R^i_{jk} и простой подтензор расширенного аффинного кручения R^i_{jK}.*

Схема включений всех подтензоров тензора кривизны-кручения R имеет вид:

$$\begin{array}{ccccc}
R^i_{jk} & \subset & R^i_{jK} & \subset & R^i_{JK} \\
\rotatebox{45}{$\cap$} & & \cap & & \rotatebox{-45}{$\cap$} \\
\{R^i_{jkl}, R^i_{jk}\} & \subset & \{R^i_{jkL}, R^i_{jK}\} & \subset & \{R^i_{jKL}, R^i_{JK}\} \\
\rotatebox{45}{$\cap$} & & \cap & & \rotatebox{-45}{$\cap$} \\
\{R_{ijk}, R^i_{jkl}, R^i_{jk}\} & \subset & \{R_{ijK}, R^i_{jkL}, R^i_{jK}\} & \subset & \{R_{iJK}, R^i_{jKL}, R^i_{JK}\}.
\end{array}$$

Отметим, что из (6, 21, 31_2) вытекают дифференциальные сравнения [11, с. 63] для пфаффовых производных $\overline{C}^i_{jK}$ (32) тензора связности C^i_j:

$$\Delta\overline{C}^i_{jK} + C^k_j(\Lambda^\alpha_{kK}\omega^i_\alpha - \delta^i_K\omega_k) + C^i_K\omega_j - C^i_k\Lambda^\alpha_{jK}\omega^k_\alpha - \delta^\alpha_K C^i_\alpha\omega_j \equiv 0. \quad (35)$$

7. Рассмотрим полувырожденный случай обобщенной проективной связности, когда тензор связности C^i_j является символом Кронекера

$$C^i_j = \delta^i_j. \quad (36)$$

В этом случае подтензор L^i_j тензора невырожденности (18) обращается в нуль: $L^i_j = 0.$ Квазитензор связности C^i_J и объект связности Π упрощаются:

$$\{\dot{C}^i_J\} = \{\delta^i_j, \dot{C}^i_\alpha\}, \quad \dot{\Pi} = \{\dot{C}^i_J, \dot{\Pi}^i_{jK}, \dot{\Pi}_{iJ}\},$$

где точка над объектами означает их рассмотрение в случае (36). Дифференциальные уравнения (31_2) принимают вид:

$$\Delta\dot{C}^i_\alpha \equiv 0.$$

Утверждение 4 [11, с. 64]. *В полувырожденном случае квазитензор C^i_J обобщенной проективной связности вырождается в тензор $\dot{C}^i_J$, который распадается на тензор Кронекера δ^i_j и тензор $\dot{C}^i_\alpha$.*

При фиксации (36) дифференциальные сравнения (35) принимают вид: $\Delta\dot{\overline{C}}^i_{jK} = 0;$ более того, справедливы равенства $\dot{\overline{C}}^i_{jK} = 0,$ которые в силу обозначений (32) дают [11, с. 64]:

$$\dot{C}^i_{jK} = -\dot{C}^i_\alpha\Lambda^\alpha_{jK}. \quad (37)$$

В полувырожденном случае (36, 37) значительно упрощается лишь тензор аффинного кручения: $R^i_{jk} = -\dot{C}^i_\alpha N^\alpha_{jk},$ где $N^\alpha_{jk} = \Lambda^\alpha_{[jk]}$ — тензор неголономности распределения S_n. Равенства $R^i_{jk} = 0$ эквивалентны равенствам $\dot{C}^i_\alpha N^\alpha_{ij} = 0,$ поэтому справедлива

Теорема 4. *Отсутствие аффинного кручения у полувырожденной проективной связности Лаптева — Остиану, ассоциированной с распределением S_n, характеризует $\dot{C}^i_\alpha$ — полуголономность [11, с. 53] распределения S_n.*

8. Рассмотрим особый случай полувырожденной связности, когда тензор связности $\dot{C}^i_\alpha$ обращается в нуль:

$$\dot{C}^i_\alpha = 0. \tag{38}$$

В этом случае происходит полная фиксация квазитензора связности C^i_J. Формулы (36, 38) можно объединить:

$$C^i_J = \delta^i_J. \tag{39}$$

Подставляя эти значения в выражение (18), получим

$$L^i_J = 0. \tag{40}$$

Определение 2. *Обобщенная проективная связность называется вырожденной, если квазитензор связности C^i_J является обобщенным символом Кронекера δ^i_J, иначе говоря, тензор невырожденности L^i_J обращается в нуль.*

Сопоставление дифференциальных уравнений (19_1) и (15_1) с учетом обозначений (12_1) приводит к равенствам

$$C^i_{JK} = 0. \tag{41}$$

Подставляя значения (40, 41) в формулу (17_1), получим $R^i_{JK} = 0.$ К этому же приводят и структурные уравнения (16_1), в которых $\tilde{\omega}^i = \omega^i - \delta^i_J \omega^J = 0.$

Пусть $\breve{\Pi} = \{ \delta^i_J, \breve{\Pi}^i_{jK}, \breve{\Pi}_{iJ} \}$ — объект вырожденной проективной связности. Тогда дифференциальные уравнения (15_3) с учетом значений (40) и обозначений (9_1, 12_2) упрощаются:

$$\Delta\breve{\Pi}^i_{jK} + \omega^i_{jK} = \breve{\Pi}^i_{jKL}\omega^L, \tag{42}$$

а уравнения (15_2) внешне не меняются:

$$\Delta\breve{\Pi}_{iJ} + \breve{\Pi}^j_{iJ}\omega_j + \omega_{iJ} = \breve{\Pi}_{iJK}\omega^K. \tag{43}$$

Структурные уравнения ($16_{2,3}$) принимают вид:

$$D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \breve{R}^i_{jKL}\ \omega^K \wedge \omega^L,\ \ D\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}^j_i \wedge \tilde{\omega}_j + \breve{R}_{iJK}\omega^J \wedge \omega^K, \tag{44}$$

причем формулы (17_3) становятся проще:

$$\breve{R}^i_{jKL} = \breve{\Pi}^i_{j[KL]} - \breve{\Pi}^k_{j[K}\breve{\Pi}^i_{kL]}, \tag{45}$$

а вид формул (17_2) не меняется:

$$\breve{R}_{iJK} = \breve{\Pi}_{i[JK]} - \breve{\Pi}^j_{i[J}\breve{\Pi}_{jK]}. \tag{46}$$

Поскольку формулы (42—46) описывают центропроективную связность [3], то справедлива

Теорема 5. *Обобщенная проективная связность с квазитензором связности C^i_J, который выродился в тензор — обобщенный символ Кронекера δ^i_J, есть центропроективная связность.*

9. Рассмотрим канонический случай, когда тензор связности C^i_j обращается в нуль

$$C^i_j = 0. \tag{47}$$

Подставляя эти равенства в соответствующую часть обозначений (18), имеем эквивалентное условие — подтензор невырожденности L^i_j есть символ Кронекера $L^i_j = \delta^i_j$.

В этом случае квазитензор связности C^i_J и объект связности Π упрощаются:

$$\{\overset{0}{C}{}^i_J\} = \{0, \overset{0}{C}{}^i_\alpha\},\ \ \overset{0}{\Pi} = \{\overset{0}{C}{}^i_J, \overset{0}{\Pi}{}^i_{jK}, \overset{0}{\Pi}_{iJ}\},$$

где кружок над объектами означает их рассмотрение при условии (47). Преобразование (13_1) базисно-слоевых форм ω^i производится лишь с помощью форм ω^α, дополняющих формы ω^i до базисных форм ω^I : $\tilde{\omega}^i = \omega^i - \overset{0}{C}{}^i_\alpha\,\omega^\alpha$. Дифференциальные уравнения (31_2) принимают вид:

$$\Delta\overset{0}{C}{}^i_\alpha + \omega^i_\alpha = \overset{0}{C}{}^i_{\alpha K}\,\omega^K. \tag{48}$$

Утверждение 5 [11, с. 68]. *В каноническом случае квазитензор связности* C^i_J *сужается до квазитензора* $\overset{0}{C}{}^i_\alpha$.

При фиксации (47) дифференциальные сравнения (35) принимают вид: $\Delta\overset{0}{\bar{C}}{}^i_{jK} \equiv 0$. Пфаффовы производные $\overset{0}{\bar{C}}{}^i_{jK}$ нуль-тензора $\overset{0}{C}{}^i_j = 0$ равны нулю ($\overset{0}{\bar{C}}{}^i_{jK} = 0$), что в силу обозначений (32) дает [11, с. 68]:

$$\overset{0}{C}{}^i_{jK} = -\overset{0}{C}{}^i_\alpha \Lambda^\alpha_{jK}. \tag{49}$$

Возьмем точки $B_\alpha = A_\alpha + \overset{0}{C}{}^i_\alpha A_i$. С помощью деривационных формул (1_2) найдем

$$dB_\alpha = \vartheta B_\alpha + (\omega^\beta_\alpha + \overset{0}{C}{}^i_\alpha \omega^\beta_i) B_\beta + (\omega_\alpha + \overset{0}{C}{}^i_\alpha \omega_i)A +$$
$$+ (\Delta\overset{0}{C}{}^i_\alpha + \omega^i_\alpha - \overset{0}{C}{}^j_\alpha \overset{0}{C}{}^i_\beta \omega^\beta_j) A_i.$$

Отсюда видно, что дифференциальные уравнения (48) и уравнения (4) распределения S_n обеспечивают инвариантность плоскости $N_{n-m} = [A, B_\alpha]$ — нормали 1-го рода [7] для образующей плоскости P^0_m распределения S_n.

Теорема 6 [11, с. 69]. *Задание поля квазитензора связности* $\overset{0}{C}{}^i_\alpha$ *эквивалентно нормализации 1-го рода распределения* S_n.

В каноническом случае (47, 49) происходят упрощения выражений компонент тензора кривизны-кручения R, в частности

$$\overset{0}{R}{}^i_{jk} = \overset{0}{\Pi}{}^i_{[jk]} - \overset{0}{C}{}^i_\alpha N^\alpha_{jk},$$

поэтому справедливо

Утверждение 6. *Если каноническая связность без аффинного кручения, то альтернации подобъекта* $\overset{0}{\Pi}{}^i_{jk}$ *объекта*

$\overset{0}{\Pi}{}^{i}_{jK}$, *входящего в объект обобщенной проективной связности* $\overset{0}{\Pi}$, *являются линейными комбинациями компонент тензора неголономности* N^{α}_{jk} *с коэффициентами — компонентами квазитензора связности* $\overset{0}{C}{}^{i}_{\alpha}$.

Список литературы

1. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

2. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. М., 1953. Т. 2. С. 275—382.

3. *Омельян О. М., Шевченко Ю. И.* Редукции объекта центропроективной связности и тензора аффинного кручения на распределении плоскостей // Матем. заметки. 2008. Т. 84, вып. 1. С. 99—107.

4. *Шевченко Ю. И.* Общая фундаментально-групповая связность с точки зрения расслоений // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 21. Калининград, 1990. С. 100—105.

5. *Шевченко Ю. И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // Там же. Вып. 37. Калининград, 2006. С. 179—187.

6. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М. и др.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—247.

7. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семинара. М., 1971. Т. 3. С. 49—93.

8. *Картан Э.* Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань, 1962.

9. *Столяров А. В.* Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований и его приложения. Чебоксары, 2002.

10. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

11. *Шевченко Ю. И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве. Калининград, 2009.

12. *Шевченко Ю. И.* Проективная связность Лаптева — Остиану на распределении // Тез. докл. межд. конф. «Геометрия в Астрахани — 2008». Астрахань, 2008. С. 65—67.

13. *Shevchenko Yu. I.* Tensor of affine torsion-curvature of projective Cartan's connection // Избр. вопр. соврем. матем. Калининград, 2005. С. 49—52.

Yu. Shevchenko

LAPTEV — OSTIANU'S PROJECTIVE CONNECTION, ASSOCIATED WITH PLANE DISTRIBUTION

In many-dimensional projective space the planes distribution is considered. The way of the giving of associated with distribution of the generalised projective connection (Laptev — Ostianu's projective connection) by means of field of connection object containing quasitensor of connection, is offered. It is proved, that the curvature-torsion object of this connection forms tensor, including tensor of linear curvature-torsion with torsion subtensors of projective connection, which contains affine torsion tensor. It is shown, that semidegenerate generalized projective connection without affine torsion characterises semiholonomicity of the distribution. The degeneration of Laptev — Ostianu's projective connection deprives it of projective torsion and transforms it into centroprojective connection. In the canonical case of Laptev — Ostianu's projective connection the giving the field of connection quasitensor is equivalent to normalization of the 1st type of the distribution.