ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

В.Н. Х у д е н к о

О МНОГООБРАЗИЯХ МНОГОМЕРНЫХ КВАДРИК В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В последнее время возрос интерес к дифференциальной геометрии семейств линий и поверхностей, т.е. к изучению многообразий, образующим элементом которых является поверхность или линия рассматриваемого пространства.

В частности, в n-мерном проективном пространстве изучались многообразия квадрик. В.С.Малаховским [3]-[6] осуществлено инвариантное построение дифференциальной геометрии многообразий $(n-2)$-мерных квадрик (квадратичных элементов) В.В.Махоркиным [8],[9] изучены многообразия гиперквадрик. Многообразия квадрик произвольной размерности p $(1 \le p \le n-3)$ почти не рассматривались. Целью настоящей статьи является изучение фокальных образов многообразий p-мерных квадрик в многомерных проективных пространствах.

§I. Многообразия $(h, m, n)_p^2$

Отнесем пространство P_n к подвижному реперу $R=\{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\}$. Инфинитезимальные перемещения репера определяются уравнениями

$$dA_{\mathcal{J}} = \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}, \quad (\mathcal{J}, \mathcal{L}, \mathcal{K} = 1,2,\dots,n+1), \tag{1}$$

причем формы Пфаффа $\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}}$ удовлетворяют условиям

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{L}} = \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}} \wedge \omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}}, \qquad \omega_1^1 + \omega_2^2 + \dots + \omega_{n+1}^{n+1} = 0. \tag{2}$$

Поместим вершины A_α $(\alpha, \beta, \gamma, \eta = 1, \dots, p+2)$ в $(p+1)$-мерной плоскости p-мерной квадрики Q_p. Тогда уравнения этой квадрики запишутся в виде

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^a = 0, \tag{3}$$

причем

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \quad \det(a_{\alpha\beta}) = 1 \quad (a, b = p+3, \dots, n+1).$$

Формы Пфаффа ω_α^a, $\theta_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma - a_{\beta\gamma}\omega_\alpha^\gamma + \frac{2}{p+2} a_{\alpha\beta}\omega_\gamma^\gamma$ являются структурными формами [2] p-мерной квадрики Q_p.

Рассмотрим многообразие $(h, m, n)_p^2$ — m-мерное многообразие p-мерных квадрик Q_p, плоскости которых образуют h-параметрическое семейство [6].

Обозначим буквой N ранг квадрики Q_p, буквой $\bar{N}$ — ранг $(p+1)$-мерной плоскости квадрики Q_p. Имеем:

$$N = C_{p+3}^2 + (p+2)(n-p-1), \qquad \bar{N} = (p+2)(n-p-1). \tag{4}$$

На основании результатов работы [7] имеет место

Т е о р е м а I. Многообразия $(h, m, n)_p^2$ определяются с произволом S_m функций m аргументов, где

$$S_m = \begin{cases} N - \bar{N} - m + h, & m > h; \\ N - m, & m = h. \end{cases} \tag{5}$$

Многообразие $(h, m, n)^2_p$ определяется системой дифференциальных уравнений

$$\Theta_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta\mathcal{T}}\, \tau^{\mathcal{T}}, \quad (\mathcal{T}=1,2,\ldots,m) \qquad (6)$$
$$\omega^a_\alpha = b_{\alpha i}\, \tau^i, \qquad (i=1,2,\ldots,h)$$

где $\tau^{\mathcal{T}}$ —параметрические формы,удовлетворяющие структурным уравнениям бесконечной аналитической группы [IO].

§ IO. Фокальные образы многообразия $(h, h, n)^2_p$

Рассмотрим многообразие $(h, h, n)^2_p$.Принимая формы Пфаффа $\omega^{n+1}_i = \omega_i$ за независимые первичные формы,запишем замкнутую систему дифференциальных уравнений этого многообразия в виде

$$\omega^{n+1}_\xi = \Gamma^i_\xi\, \omega_i, \quad \omega^{\hat{a}}_\alpha = \Gamma^{\hat{a}i}_\alpha\, \omega_i,$$
$$\Theta_{\alpha\beta} = \Gamma^i_{\alpha\beta}\, \omega_i, \quad \Delta\Gamma^i_\xi \wedge \omega_i = 0, \qquad (7)$$
$$\Delta\Gamma^{\hat{a}i}_\alpha \wedge \omega_i = 0, \quad \Delta\Gamma^i_{\alpha\beta} \wedge \omega_i = 0,$$

где

$$\Delta\Gamma^i_\xi = d\Gamma^i_\xi + \Gamma^j_\xi\, \omega^i_j - \omega^i_\xi + \Gamma^{\hat{a}i}_\xi\, \omega^{n+1}_{\hat{a}} +$$
$$+ \Gamma^j_\xi \Gamma^i_\eta\, \omega^\eta_j - \Gamma^k_\xi \Gamma^{\hat{a}i}_k\, \omega^{n+1}_{\hat{a}},$$

$$\Delta\Gamma^{\hat{a}j}_i = \nabla\Gamma^{\hat{a}j}_i + \Gamma^{\hat{a}k}_i \Gamma^j_\eta\, \omega^\eta_k - \Gamma^{\hat{a}k}_i \Gamma^{\hat{b}j}_k\, \omega^{n+1}_{\hat{b}} -$$
$$- \Gamma^{\hat{a}j}_i\, \omega^{n+1}_{n+1} + \delta^j_i\, \omega^{\hat{a}}_{n+1},$$

$$\Delta\Gamma^{\hat{a}i}_\xi = \nabla\Gamma^{\hat{a}i}_\xi + \Gamma^{\hat{a}j}_\xi \Gamma^i_\eta\, \omega^\eta_j - \Gamma^{\hat{a}j}_\xi \Gamma^{\hat{b}i}_j\, \omega^{n+1}_{\hat{b}} -$$

$$- \Gamma^{\hat{a}i}_\xi\, \omega^{n+1}_{n+1} + \Gamma^i_\xi\, \omega^{\hat{a}}_{n+1},$$

$$\Delta\Gamma^k_{ij} = \nabla\Gamma^k_{ij} - 2a_{\gamma(i}\Gamma^{\hat{a}k}_{j)}\, \omega^\gamma_{\hat{a}} - 2a_{\gamma(i}\delta^k_{j)}\, \omega^\gamma_{n+1} +$$
$$+ \frac{2}{p+2}\Gamma^k_{ij}\, \omega^\gamma_\gamma - \frac{2}{p+2} a_{ij}\left(\Gamma^{\hat{a}k}_\gamma\, \omega^\gamma_{\hat{a}} - \delta^k_\ell\, \omega^\ell_{n+1} - \Gamma^k_\xi\, \omega^\xi_{n+1}\right) +$$
$$+ \Gamma^\ell_{ij}\left(\Gamma^k_\xi\, \omega^\xi_\ell - \Gamma^{\hat{a}k}_\ell\, \omega^{n+1}_{\hat{a}}\right) - \Gamma^k_{ij}\, \omega^{n+1}_{n+1},$$

$$\Delta\Gamma^k_{i\xi} = \nabla\Gamma^k_{i\xi} - 2a_{\gamma(i}\Gamma^{\hat{a}k}_{\xi)}\, \omega^\gamma_{\hat{a}} - a_{i\gamma}\Gamma^k_\xi\, \omega^\gamma_{n+1} -$$
$$- a_{\gamma\xi}\delta^k_i\, \omega^\gamma_{n+1} + \frac{2}{p+2} a_{i\xi}\left(\Gamma^{\hat{a}k}_\gamma\, \omega^\gamma_{\hat{a}} + \omega^k_{n+1} + \Gamma^k_\eta\, \omega^\eta_{n+1}\right) +$$
$$+ \frac{2}{p+2}\Gamma^k_{i\xi}\, \omega^\gamma_\gamma + \Gamma^j_{i\xi}\left(\Gamma^k_\eta\, \omega^\eta_j - \Gamma^{\hat{a}k}_j\, \omega^{n+1}_{\hat{a}}\right) - \Gamma^k_{i\xi}\, \omega^{n+1}_{n+1},$$

$$\Delta\Gamma^k_{\xi\eta} = \nabla\Gamma^k_{\xi\eta} - 2a_{\gamma(\xi}\Gamma^{\hat{a}k}_{\eta)}\, \omega^\gamma_{\hat{a}} - 2a_{\gamma(\xi}\Gamma^k_{\eta)}\, \omega^\gamma_{n+1} +$$
$$+ \frac{2}{p+2} a_{\xi\eta}\left(\omega^k_{n+1} + \Gamma^k_{\bar{\eta}}\, \omega^{\bar{\eta}}_{n+1} + \Gamma^{\hat{a}k}_\gamma\, \omega^\gamma_{\hat{a}}\right) + \frac{2}{p+2}\Gamma^k_{\xi\eta}\, \omega^\gamma_\gamma +$$
$$+ \Gamma^i_{\xi\eta}\left(\Gamma^k_{\bar{\eta}}\, \omega^{\bar{\eta}}_i - \Gamma^{\hat{a}k}_i\, \omega^{n+1}_{\hat{a}}\right) - \Gamma^k_{\xi\eta}\, \omega^{n+1}_{n+1}; \qquad (8)$$

здесь и в дальнейшем в этом параграфе индексы принимают следующие значения:

$$i, j, k, \ell = 1, 2, \ldots, h; \quad \hat{a}, \hat{b} = p+3, p+4, \ldots, n;$$
$$a, b = p+3, p+4, \ldots, n+1; \quad \eta, \xi, \bar{\eta} = h+1, \ldots, p+2.$$

Система величин $\Gamma_1=\{a_{\alpha\beta},\Gamma^i_\xi,\Gamma^{\hat{a}i}_\alpha,\Gamma^i_{\alpha\beta}\}$ образует фундаментальный объект первого порядка. Для конгруэнции субквадратичных элементов ($h=n-1$, $p=n-3$) этот объект является основным объектом многообразия [1], [11].

Рассмотрим множество точек p-мерной квадрики Q_p многообразия $(h,h,n)^2_p$, которые также принадлежат смежной квадрике. Такое множество, называемое фокальным многообразием квадрики Q_p, задается системой уравнений

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\ x^a=0,\ d(a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta)=0,\ dx^\alpha=0. \qquad (9)$$

Система (9) приводится к виду

$$\Gamma^i_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta\omega_i=0,\ \Gamma^{\hat{a}i}_\alpha x^\alpha\omega_i=0,\ (\Gamma^i_\xi x^\xi+x^i)\omega_i=0,$$
$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\ x^a=0. \qquad (10)$$

О п р е д е л е н и е. Алгебраическое многообразие пространства P_n, определяемое системой уравнений

$$\Gamma^i_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\ \Gamma^{\hat{a}i}_\alpha x^\alpha=0,\ \Gamma^i_\xi x^\xi+x^i=0,$$
$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\ x^a=0, \qquad (11)$$

назовем сильно фокальным многообразием квадрики Q_p многообразия $(h,h,n)^2_p$. При

$$n\leqslant\frac{p(h+1)}{h} \qquad (12)$$

квадрика $Q_p\in(h,h,n)^2_p$ обладает в общем случае сильно фокальным многообразием, причем при

$$n=\frac{p(h+1)}{h} \qquad (13)$$

система уравнений (11) определяет алгебраическое многообразие нулевой размерности (2^{h+1}) степени. Таким образом, имеет место

Т е о р е м а 2. Если $n=\dfrac{p(h+1)}{h}$, то каждая p-мерная квадрика Q_p многообразия $(h,h,n)^2_p$ имеет в общем случае 2^{h+1} сильно фокальных точек.

§ 3. Конгруэнции коник в четырехмерном проективном пространстве

Рассмотрим в четырехмерном проективном пространстве трехмерное многообразие коник, двумерные плоскости которых образуют трехпараметрическое семейство, т.е. многообразие $(3,3,4)^2_1$. Как следует из теоремы 1, многообразие $(3,3,4)^2_1$ определяется с произволом восьми функций трех аргументов. Система (3) в рассматриваемом случае примет вид:

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\ x^4=0,\ x^5=0. \qquad (14)$$

Здесь и в дальнейшем в этом параграфе $\alpha,\beta,\gamma,\eta=1,2,3$.

Замкнутая система дифференциальных уравнений многообразия $(3,3,4)^2_1$ примет вид:

$$\Theta_{\alpha\beta}=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\omega_\gamma,\qquad \Delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\wedge\omega_\gamma=0,$$
$$\omega^4_\alpha=\Gamma^{4\gamma}_\alpha\omega_\gamma,\qquad \Delta\Gamma^{4\gamma}_\alpha\wedge\omega_\gamma=0, \qquad (15)$$

где

$$\Delta\Gamma^\eta_{\alpha\beta}=\nabla\Gamma^\eta_{\alpha\beta}-\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma^{4\eta}_\gamma\omega^5_4+\Gamma^\eta_{\alpha\beta}\left(\tfrac{2}{3}\omega^\gamma_\gamma-\omega^5_5\right)+$$
$$+\tfrac{2}{3}a_{\alpha\beta}\Gamma^{4\eta}_\gamma\omega^\gamma_4-2a_{\gamma(\alpha}\Gamma^{4\eta}_{\beta)}\omega^\gamma_4+\tfrac{2}{3}a_{\alpha\beta}\omega^\eta_5-$$
$$-2a_{\gamma(\alpha}\delta^\eta_{\beta)}\omega^\gamma_{n+1},$$

$$\Delta\Gamma^{4\gamma}_\alpha=\nabla\Gamma^{4\gamma}_\alpha-\Gamma^{4\beta}_\alpha\Gamma^{4\gamma}_\beta\omega^5_4+\Gamma^{4\gamma}_\alpha(\omega^4_4-\omega^5_5)+\delta^\gamma_\alpha\omega^5_4.$$

Фокальное многообразие коник Q_1 задается системой уравнений

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0\,, \quad x^4 = 0, \quad x^5 = 0,$$

$$[x^1(\Gamma^{42}_\gamma \Gamma^3_{\alpha\beta} - \Gamma^2_{\alpha\beta} \Gamma^{43}_\gamma) - x^2(\Gamma^{41}_\gamma \Gamma^3_{\alpha\beta} - \Gamma^1_{\alpha\beta} \Gamma^{43}_\gamma) + x^3(\Gamma^{41}_\gamma \Gamma^2_{\alpha\beta} - \Gamma^{42}_\gamma \Gamma^1_{\alpha\beta})]\, x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0\,, \tag{16}$$

которая определяет в P_4 алгебраическое многообразие нулевой размерности восьмой степени. Следовательно, в четырехмерном проективном пространстве у каждой коники Q_1 многообразия $(3,3,4)^2_1$ в общем случае имеется восемь фокальных точек. Таким образом, становится понятен геометрический смысл произвола задания многообразия $(3,3,4)^2_1$: для задания многообразия $(3,3,4)^2_1$ нужно задать 8 фокальных гиперповерхностей (8 функций трех аргументов), которых будет касаться многообразие $(3,3,4)^2_1$. Сильно фокальных многообразий у коники Q_1 многообразия $(3,3,4)^2_1$ в общем случае не существует, так как не выполняется неравенство (I2).

Для многообразия построен геометрический фиксированный репер $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, где A_1 и A_2 – фокальные точки коники Q_1, точка A_3 принадлежит двумерной плоскости коники Q_1 и полярно сопряжена с точками A_1 и A_2 относительно этой коники; точки A_4 и A_5 являются фокусами луча прямолинейной конгруэнции (ℓ), где ℓ – прямая, по которой пересекаются касательные гиперплоскости к фокальным гиперповерхностям (A_1) и (A_2) и гиперповерхности (E). Здесь $E = A_1 + A_2$ – фокус луча прямолинейной конгруэнции $(A_1 A_2)$.

Список литературы

I. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Тр.Моск.матем.о-ва", I953, №2, с.275-382.

2. Лаптев Г.Ф. Распределение касательных элементов.-"Тр. геом.семинара ВИНИТИ АН СССР", I97I, с.29-48.

3. Малаховский В.С. Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве.-"Литовский матем. сб.", I963, 3, №2, с.2II-2I2.

4. Малаховский В.С. Многообразия алгебраических фигур в n-мерном однородном пространстве.- В кн.: 3-й Сибирской конференции по матем. и механике. Томск, I964, с.8-I0.

5. Малаховский В.С. Дифференциальна геометрия семейств квадрик.-В кн.: Первая республ.конф.матем.Белоруссии. Тезисы докл., I964, с.40-44.

6. Малаховский В.С. Поля геометрических объектов на многообразии квадратичных элементов.-"Тр.Томского ун-та", I964, I76, с.II-I9.

7. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.-"Тр.геом. семинара ВИНИТИ АН СССР", I969, с.I79-206.

8. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.-"Тр.геом.семинара ВИНИТИ АН СССР", I974, 6, с.II3-I33.

9. Махоркин В.В. Некоторые типы многообразий гиперквадрик.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, I973, с.50-59.

I0. Остиану Н.М. Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве.-"Тр. геометрического семинара ВИНИТИ АН СССР", I969, с.247-262

II.Худенко В.Н. Об основном объекте (n-I)-мерного многообразия субквадратичных элементов.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.6,Калининград, 1975,c.222-227.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Ю.И.Шевченко

ОБ ОСНАЩЕНИЯХ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Известно,что поверхность в многомерном проективном пространстве можно рассматривать с двух точек зрения: I/как многообразие точек (0-мерных плоскостей);2/как голономное многообразие центрированных плоскостей.Если соприкасающаяся плоскость не заполняет всего пространства, то возможна третья точка зрения на поверхность как специальное многообразие пар плоскостей,одна из которых играет роль касательной плоскости,а другая-роль соприкасающейся плоскости.В каждом из трех случаев с поверхностью ассоциируется некоторое главное расслоение.Показано,что оснащение Бортолотти,нормализация Нордена и обобщенная нормализация (введенная в работе) позволяют задавать связности в соответствующих ассоциированных расслоениях.

Работа выполнена методом продолжений и охватов Г.Ф. Лаптева.

§ I. Оснащение Бортолотти

Отнесем N-мерное проективное пространство P_N к подвижному реперу $\{A_{\mathcal{J}}\}$,инфинитезимальные перемещения которого