Приведем компоненты вертикального лифта тензорных полей типа *(0,2),* а также компоненты полного и горизонтального лифта векторных полей в адаптированном репере:

$$Q^V = Q_{ij}\partial^{ij} = Q_{ij}D^{ij},\ X^H = X^s(\partial_s + (\Gamma^m_{si}x_{mj} + \Gamma^h_{sj}x_{ih})\partial^{ij}) = X^s D_s;$$

$$X^C = X^k\partial_k - (\partial_p X^m x_{mq} + \partial_q X^t x_{pt})\partial^{pq} = X^H - (\partial_p X^m + X^s\Gamma^m_{sp})x_{mq}D^{pq} -$$

$$-(\partial_q X^h + X^s\Gamma^h_{sq})x_{ph}D^{pq} = X^H - (\hat{\nabla}X)^{V_1} - (\hat{\nabla}X)^{V_2},$$

где $\hat{\nabla}$ – связность без кручения, заданная на базе расслоения, а ${}^{V_1},{}^{V_2}$ – обозначение вертикальных лифтов тензорных полей типа *(1,1)* [3].

Список литературы

1. *Монахова О.А.* Тензорное расслоение типа *(0,2)* // Междунар. шк.-семин. по геом. и анал., посвящ. 90-летию Н.В. Ефимова: Тез. докл. Ростов н/Д., 2000.
2. *Монахова О.А.* О некоторых лифтах на тензорном расслоении типа *(0,2)* // Тр. Мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань, 2000. Т. 5.
3. *Монахова О.А.* Вертикальные лифты тензорных полей типа *(1,1)* // Движения в обобщенных пространствах. Пенза, 2000.
4. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles; differential geometry. New York, 1973.

O. Monakhova

ABOUT ADAPTED FRAMES AND SOME LIFTS ON THE BUNDLE OF THE TENSORS OF THE TYPE *(0,2)*

In this paper on the bundle of the tensors of the type *(0,2)* an adapted frame to the connection on the base of the bundles is got. And also the components of a vertical lift of the tensor fields of the types *(0,2)* and a complete and horizontal lifts of the vector fields are got in an adapted frame.

УДК 514.75

О.М. Омельян

(Калининградский государственный университет)

НЕТЕНЗОРНОСТЬ ОБЪЕКТА КРИВИЗНЫ ГРУППОВОЙ СВЯЗНОСТИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ

В проективном пространстве рассмотрена неголономная поверхность или распределение плоскостей. Доказано, что объект кривизны групповой связности в расслоении, ассоциированном с неголономным и голономным распределениями, не является тензором, а образует геометрический объект с фундаментальным объектом 2-го порядка и объектом связности.

1. Распределение и ассоциированное расслоение. Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $R = \{A, A_I\}$ $(I, J, K, L = \overline{1, n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами:

$$dA = \theta A + \omega^I A_I ,\ dA_I = \theta A_I + \omega_I A + \omega_I^J A_J , \qquad (1)$$

причем базисные формы $\omega^I, \omega_I, \omega_I^J$ проективной группы GP(n), действующей эффективно в P_n, удовлетворяют структурным уравнениям Картана:

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I ,\ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J ,\ D\omega_I^J = \omega_I \wedge \omega^J + \omega_I^K \wedge \omega_K^J + \delta_I^J \omega_K \wedge \omega^K . \qquad (2)$$

Рассмотрим неголономную поверхность NS_n или распределение 1-го рода [1] m-плоскостей P_m, т.е. через каждую точку пространства P_n проведем плоскость P_m. Получится n-мерное семейство NS_n центрированных m-плоскостей P_m^*. Осуществим разбиение значений индекса I=(i,a) следующим образом: $i, j, k = \overline{1, m}$; $a, b, c = \overline{m+1, n}$. Произведем специализацию репера R, помещая вершины A и A_i в соответствующую плоскость P_m^*, причем A – в ее центр. Так строится репер нулевого порядка R_0 семейства NS_n центрированных плоскостей $P_m^* = \{A, P_m\}$, где $A \in P_m$. Из уравнений (1) следуют уравнения стационарности центрированной плоскости P_m^*:

$$\omega^i = 0 ,\ \omega^a = 0 ,\ \omega_i^a = 0 , \qquad (3)$$

причем уравнения (3_1), (3_2) фиксируют точку A, а уравнения (3_2), (3_3) фиксируют плоскость P_m. Выберем формы $\omega^I = \{\omega^i, \omega^a\}$ в качестве базисных форм поверхности NS_n и запишем ее уравнения в репере R_0:

$$\omega_i^a = \Lambda_{iJ}^a \omega^J . \qquad (4)$$

Продолжая уравнения (4), найдем $\Delta\Lambda_{iJ}^a - \delta_J^a \omega_i = \Lambda_{iJK}^a \omega^K$ $(\Lambda_{i[JK]}^a = 0)$, подробнее:

$$\Delta\Lambda_{ij}^a = \tilde{\Lambda}_{ijK}^a \omega^K ,\ \Delta\Lambda_{ib}^a - \Lambda_{ij}^a \omega_b^j - \delta_b^a \omega_i = \Lambda_{ibK}^a \omega^K , \qquad (5)$$

где $\tilde{\Lambda}_{ijK}^a = \Lambda_{ijK}^a + \Lambda_{ib}^a \Lambda_{jK}^b$. Дифференциальный оператор $\boldsymbol{\Delta}$ действует обычным образом:

$$\Delta\Lambda_{ij}^a = d\Lambda_{ij}^a + \Lambda_{ij}^b \omega_b^a - \Lambda_{ik}^a \omega_j^k - \Lambda_{kj}^a \omega_i^k .$$

Запишем подробно структурные уравнения Картана (2) с учетом (4):

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + \omega^a \wedge \omega_a^i , \qquad (6)$$

$$D\omega^a = \omega^b \wedge (\omega_b^a - \Lambda_{ib}^a \omega^i) + \Lambda_{ij}^a \omega^i \wedge \omega^j , \qquad (7)$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^K \wedge \omega_{jK}^i , \qquad (8)$$

$$D\omega_j = \omega_j^k \wedge \omega_k + \omega^K \wedge \omega_{jK} , \qquad (9)$$

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega^K \wedge \omega_{bK}^a , \qquad (10)$$

$$D\omega_a^i = \omega_a^j \wedge \omega_j^i + \omega_a^b \wedge \omega_b^i + \omega^K \wedge \omega_{aK}^i , \qquad (11)$$

$$D\omega_a = \omega_a^i \wedge \omega_i + \omega_a^b \wedge \omega_b , \qquad (12)$$

где

$\omega^i_{jK}=\Lambda^a_{jK}\omega^i_a-\delta^i_j\omega_K-\delta^i_K\omega_j$, $\omega_{jK}=\Lambda^a_{jK}\omega_a$, $\omega^a_{bK}=-\Lambda^a_{iK}\omega^i_b-\delta^a_b\omega_K-\delta^a_K\omega_b$, $\omega^i_{aK}=-\delta^i_K\omega_a$.

Уравнения (6 – 12) являются структурными уравнениями главного расслоения $G(NS_n)$, ассоциированного с поверхностью NS_n в репере R_0, причем базой этого расслоения является сама поверхность NS_n, а типовым слоем – подгруппа стационарности $G\subset GP(n)$ центрированной плоскости P^*_m, размерность которой $\dim G=n^2+m^2-n(m-1)$ – число компонент слоевой формы $\omega=\{\omega^i_j,\omega_j,\omega^b_a,\omega^i_a,\omega_a\}$. В расслоении выделяются главные расслоения с базой NS_n и уравнениями:

(6 – 8) – расслоение линейных реперов $L(NS_n)$, типовым слоем которого является линейная группа L=GL(m), действующая во множестве всех направлений плоскости P^*_m, исходящих из точки A;

(6 – 9) – расслоение центропроективных реперов $A^*(NS_n)$, типовым слоем которого является центропроективная (коаффинная) группа $A^*=GA^*(m)\supset L$, действующая в плоскости P^*_m;

(6, 7, 10) – расслоение двойственных (нормальных) линейных реперов $L^*(NS_n)$, типовым слоем которого является группа L^*=GL(n-m), действующая во множестве всех направлений, исходящих из точки A и лежащих вне плоскости P^*_m;

(6 – 8, 10, 11) – расслоение $H(NS_n)$ с типовым слоем – группой H, являющейся линейной частью группы G.

Введем обозначение: $N^a_{ij}=\Lambda^a_{[ij]}$, причем $\Delta N^a_{ij}\equiv 0$. Тензор N^a_{ij} называется тензором неголономности [2]. Уравнение (7) примет вид:

$$D\omega^a=\omega^b\wedge\overline{\omega}^a_b+N^a_{ij}\omega^i\wedge\omega^j\ \ (\overline{\omega}^a_b=\omega^a_b-\Lambda^a_{ib}\omega^i). \qquad (13)$$

Если $N^a_{ij}=0$, то распределение NS_n называется голономным [2]; обозначим его S_n. В этом случае из структурных уравнений (13) видно, что система дифференциальных уравнений $\omega^a=0$ вполне интегрируема. Она выделяет из голономного распределения S_n m-поверхность S_m как семейство касательных плоскостей P^*_m, причем уравнение этой поверхности: $\omega^a_i=\Lambda^a_{ij}\omega^j$. Голономное распределение S_n расслаивается [2] на (n-m)-мерное многообразие V_{n-m} m-мерных семейств центрированных плоскостей P^*_m, одним из которых является поверхность S_m. Структурные уравнения (6) показывают, что система $\omega^i\big|_{\omega^a=0}=0$ вполне интегрируема на поверхности S_m и фиксирует плоскость P^*_m.

2. Пространство групповой связности. Согласно способу Лаптева [3; 4] – задания групповой связности в главном расслоении с помощью формы $\tilde{\omega}$ – рассмотрим преобразование компонент слоевой формы ω с помощью базисных форм:

$$\tilde{\omega}^i_j=\omega^i_j-\Gamma^i_{jK}\omega^K,\ \tilde{\omega}_i=\omega_i-\Gamma_{iJ}\omega^J,\ \tilde{\omega}^a_b=\omega^a_b-\Gamma^a_{bI}\omega^I,$$
$$\tilde{\omega}^i_a=\omega^i_a-\Gamma^i_{aJ}\omega^J,\ \tilde{\omega}_a=\omega_a-\Gamma_{aI}\omega^I. \qquad (14)$$

Компоненты объекта связности $\Gamma=\{\Gamma^i_{jK},\Gamma_{iJ},\Gamma^a_{bJ},\Gamma^i_{aJ},\Gamma_{aJ}\}$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Gamma^i_{jK}+\omega^i_{jK}=\Gamma^i_{iKL}\omega^L,\ \Delta\Gamma_{iJ}+\Gamma^k_{iJ}\omega_k+\omega_{iJ}=\Gamma_{iJK}\omega^K,\ \Delta\Gamma^a_{bI}+\omega^a_{bI}=\Gamma^a_{bIJ}\omega^J,$$
$$\Lambda\Gamma^i_{aJ}-\Gamma^i_{jJ}\omega^j_a+\Gamma^b_{aJ}\omega^i_b+\omega^i_{aJ}=\Gamma^i_{aJK}\omega^K,\ \Delta\Gamma_{aI}+\Gamma^i_{aI}\omega_i+\Gamma^b_{aI}\omega_b-\Gamma_{iI}\omega^i_a=\Gamma_{aIJ}\omega^J. \tag{15}$$

Объект групповой связности Γ содержит четыре простых подобъекта:

1) Γ^i_{jK} -объект касательной линейной (аффинной) связности;

2) $\{\Gamma^i_{jK},\Gamma_{iJ}\}$ – объект центропроективной (коаффинной) связности;

3) Γ^a_{bI} – объект нормальной (двойственной) линейной связности;

4) $\{\Gamma^i_{jK},\Gamma^a_{bJ},\Gamma^i_{aJ}\}$ – объект линейно-групповой связности.

Эти подобъекты задают групповые связности в указанных выше подрасслоениях ассоциированного расслоения $G(NS_n)$. С учетом (15) выражения для внешних дифференциалов компонент (14) принимают вид:

$$D\tilde\omega^i_j=\tilde\omega^k_j\wedge\tilde\omega^i_k+R^i_{jKL}\omega^K\wedge\omega^L,\ D\tilde\omega_i=\tilde\omega^k_i\wedge\tilde\omega_k+R_{iJK}\omega^J\wedge\omega^K,$$
$$D\tilde\omega^a_b=\tilde\omega^c_b\wedge\tilde\omega^a_c+R^a_{bIJ}\omega^I\wedge\omega^J,\ D\tilde\omega^i_a=\tilde\omega^j_a\wedge\tilde\omega^i_j+\tilde\omega^b_a\wedge\tilde\omega^i_b+R^i_{aJK}\omega^J\wedge\omega^K,$$
$$D\tilde\omega_a=\tilde\omega^i_a\wedge\tilde\omega_i+\tilde\omega^b_a\wedge\tilde\omega_b+R_{aIJ}\omega^I\wedge\omega^J,$$

причем компоненты объекта кривизны $R=\{R^i_{jKL},R_{iJK},R^a_{bIJ},R^i_{aJK},R_{aIJ}\}$ групповой связности Γ выражаются по формулам

$$R^i_{jKL}=\Gamma^i_{j[KL]}-\Gamma^k_{j[K}\Gamma^i_{kL]},\ R_{iJK}=\Gamma_{i[JK]}-\Gamma^k_{i[J}\Gamma_{kK]},\ R^a_{bIJ}=\Gamma^a_{b[IJ]}-\Gamma^c_{b[I}\Gamma^a_{cJ]},$$
$$R^i_{aJK}=\Gamma^i_{a[JK]}-\Gamma^k_{a[J}\Gamma^i_{kK]}-\Gamma^b_{a[J}\Gamma^i_{bK]},\ R_{aIJ}=\Gamma_{a[IJ]}-\Gamma^i_{a[I}\Gamma_{iJ]}-\Gamma^b_{a[I}\Gamma_{bJ]},$$

где альтернирование выполняется по крайним индексам в квадратных скобках. Согласно этим формулам продолжим дифференциальные уравнения (15), проальтернируем их по двум последним индексам и, используя уравнения (15) для альтернированных произведений компонент объекта Γ, получим сравнения по модулю базисных форм ω^I

$$\Delta R^i_{jkl}+\tilde\Lambda^a_{j[kl]}\omega^i_a-\Gamma^i_{jp}\omega^p_{[kl]}\equiv 0,\ \Delta R_{ijk}+R^p_{ijk}\omega_p+\tilde\Lambda^a_{i[jk]}\omega_a-\Gamma_{ip}\omega^p_{[jk]}\equiv 0,$$
$$\Delta R^a_{bkl}-\tilde\Lambda^a_{i[kl]}\omega^i_b-\Gamma^a_{bp}\omega^p_{[kl]}\equiv 0,\ \Delta R^i_{akl}-R^i_{pkl}\omega^p_a+R^b_{akl}\omega^i_b-\Gamma^i_{ap}\omega^p_{[kl]}\equiv 0, \tag{16}$$
$$\Delta R_{ajk}+R^b_{ajk}\omega_b+R^i_{ajk}\omega_i-R_{ijk}\omega^i_a\equiv 0.$$

Дифференциальные сравнения для остальных компонент объекта кривизны R не выписаны. Сравнения (16) на голономном распределении S_n имеют вид:

$$\Delta R^i_{jkl}\equiv 0,\ \Delta R_{ijk}+R^p_{ijk}\omega_p\equiv 0,\ \Delta R^a_{bkl}\equiv 0,\ \Delta R^i_{akl}-R^i_{pkl}\omega^p_a+R^b_{akl}\omega^i_b\equiv 0,$$
$$\Delta R_{ajk}+R^i_{ajk}\omega_i+R^b_{ajk}\omega_b-R_{ijk}\omega^i_a\equiv 0, \tag{17}$$

но опущенные сравнения не приобретают тензорный характер, поэтому справедлива

Теорема. *Объект кривизны R групповой связности **Γ** на неголономном и голономном распределениях плоскостей не является тензором, а образует геометрический объект с фундаментальным объектом 2-го порядка $\{\Lambda^a_{iJ},\Lambda^a_{iJK}\}$ и объектом Γ.*

Из дифференциальных сравнений (17) следует, что объект кривизны R в случае поверхности S_m является тензором, содержащим четыре простых подтензора [5]:

1) тензор кривизны R^i_{jkl} касательной линейной подсвязности Γ^i_{jk};

2) тензор кривизны $\{R^i_{jkl}, R_{ijk}\}$ центропроективной подсвязности $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}\}$;

3) тензор кривизны R^a_{bij} нормальной линейной подсвязности Γ^a_{bi};

4) тензор кривизны $\{R^i_{jkl}, R^a_{bij}, R^i_{ajk}\}$ линейно-групповой подсвязности $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{aj}\}$.

Список литературы

1. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т. 4. С. 71 – 120.
2. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С. 49 – 94.
3. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. С.5 – 247.
4. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т.1 С. 139 – 189.
5. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград., 2000.

O. Omelyan

NONTENSORITY THE OBJECT OF CURVATURE OF GROUP CONNECTION ON THE DISTRIBUTION OF PLANES

In the projective space non-holonomic surface or distribution of planes is considered. It is proved, that the object of curvature of group connection in the bundle, associated with non-holonomic and holonomic distributions, isn't a tensor; but it is form geometrical object with fundamental object of the second order and with object of the connection.

УДК 514.76

В.И. Паньженский, О.П. Сурина

(Пензенский государственный педагогический университет)

МЕТРИЧЕСКИЕ СВЯЗНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФИНСЛЕРОВА ТИПА*

Говоря о пространствах финслерова типа, мы имеем ввиду их ближайшие обобщения: обобщенные финслеровы пространства, лагранжевы пространства и обобщенные лагранжевы пространства. Уже для финслеровых пространств задача внесения связности, так или иначе согласованной с метрикой, приводит к различным результатам [1].

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.