E. Stepanova, I. Tsyganok

AN EXAMPLE OF A STATISTIC MANIFOLD

In the present paper we consider a 5-dimensional oriented Riemannian manifold with an SO(3) structure (see [5]) as an example of a statistical manifold (see [1]).

In particular we proof that there is no a nearly integrable SO(3) structure on 5-dimensional compact oriented Riemannian manifold with positive definite second-type curvature operator.

УДК 514.764.3

А. В. Христофорова

(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)

ДВОЙСТВЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ СЕТЕЙ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Работа посвящена изучению геометрии сетей на гиперповерхности в пространстве аффинной связности.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I, J, L, K, T, S = \overline{1, n};\ \bar{I}, \bar{J}, \bar{L}, \bar{K}, \bar{T}, \bar{S} = \overline{0, n};\ i, j, l, k, t, s = \overline{1, n-1}.$$

Рассмотрим пространство аффинной связности $A_{n,n}$, заданное системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\{\theta^I, \theta^I_K\}$, подчиненных структурным уравнениям [4]:

$$D\theta^I = \theta^K \wedge \theta^I_K + \frac{1}{2} r^I_{ST} \theta^S \wedge \theta^T, D\theta^I_J = \theta^K_J \wedge \theta^I_K + \frac{1}{2} r^I_{JST} \theta^S \wedge \theta^T,$$

$$r^I_{(ST)} = 0,\ \ r^I_{L(ST)} = 0,\ \ \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \ldots \wedge \theta^n \neq 0;$$

r^I_{PQ} и r^I_{KPQ} — соответственно тензоры кручения и кривизны пространства $A_{n,n}$.

Известно [5], что с пространством $A_{n,n}$ ассоциируется пространство проективной связности $P_{n,n}$, определяемое системой форм Пфаффа $\omega_{\bar{L}}^{\bar{I}}$:

$$\omega_0^I = \theta^I,\ \omega_0^0 = -\frac{1}{n+1}\theta_K^K,\ \omega_I^0 = 0,\ \omega_L^I = \theta_L^I - \frac{1}{n+1}\delta_L^I\theta_K^K. \quad (1)$$

Формы (1) удовлетворяют структурным уравнениям пространства проективной связности $P_{n,n}$ [8]:

$$D\omega_{\bar{L}}^{\bar{I}} = \omega_{\bar{L}}^{\bar{K}} \wedge \omega_{\bar{K}}^{\bar{I}} + \frac{1}{2}R_{\bar{L}ST}^{\bar{I}}\omega_0^S \wedge \omega_0^T,\ \omega_{\bar{K}}^{\bar{K}} = 0, \quad (2)$$

$$R_{0ST}^I = r_{ST}^I,\ R_{IST}^0 = 0,\ R_{0ST}^0 = -\frac{1}{n+1}r_{KST}^K,\ R_{JST}^I = r_{JST}^I - \frac{1}{n+1}\delta_J^I r_{KST}^K;$$

при этом пространство $P_{n,n}$ является проективным P_n $(R_{\bar{K}PQ}^{\bar{I}} \equiv 0)$ тогда и только тогда, когда исходное пространство $A_{n,n}$ вырождается в аффинное A_n $(r_{PQ}^I = r_{KPQ}^I \equiv 0)$.

Рассмотрим регулярную гиперповерхность $V_{n-1} \in A_{n,n}$, заданную в репере первого порядка уравнением [3]

$$\omega_0^n = 0. \quad (3)$$

Последовательно продолжая уравнение (3) с использованием (2), имеем:

$$\omega_k^n = \Lambda_{kj}^n\omega_0^j,\ d\Lambda_{kj}^n + \Lambda_{kj}^n(\omega_0^0 + \omega_n^n) - \Lambda_{kl}^n\omega_j^l - \Lambda_{lj}^n\omega_k^l = \Lambda_{kjl}^n\omega_0^l, \quad (4)$$

$$d\Lambda_{kjs}^n + \Lambda_{kjs}^n(2\omega_0^0 + \omega_n^n) - \Lambda_{kjl}^n\omega_s^l - \Lambda_{kls}^n\omega_j^l - \Lambda_{ljs}^n\omega_k^l -$$
$$-(\Lambda_{kj}^n\Lambda_{ls}^n + \Lambda_{kl}^n\Lambda_{js}^n + \Lambda_{lj}^n\Lambda_{ks}^n)\omega_n^l = \Lambda_{kjsi}^n\omega_0^i;$$

$$2\Lambda_{[kj]}^n = -R_{0kj}^n = -r_{kj}^n,\ 2\Lambda_{k[jl]}^n = \Lambda_{ks}^n R_{0jl}^s - R_{kjl}^n = \Lambda_{ks}^n r_{jl}^s - r_{kjl}^n.$$

Предполагая гиперповерхность $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ регулярной (т. е. $\Lambda \overset{def}{=} \left|\Lambda_{ij}^n\right| \neq 0$), можно ввести в рассмотрение обращенный тензор Λ_n^{ik}, $\Lambda_n^{ik}\Lambda_{kj}^n = \Lambda_n^{ki}\Lambda_{jk}^n = \delta_j^i = \begin{cases}1,\ i = j,\\ 0,\ i \neq j,\end{cases}$

$$d\Lambda_n^{is} = -\Lambda_n^{ik}\Lambda_n^{js}\Lambda_{kjl}^n\omega_0^l + \Lambda_n^{is}(\omega_0^0 + \omega_n^n) - \Lambda_n^{js}\omega_j^i - \Lambda_n^{ik}\omega_k^s.$$

Согласно работе [7], нормализация регулярной гиперповерхности полями квазитензора ν_n^i и тензора ν_i^0:

$$\begin{gathered} d\nu_n^i - \nu_n^i\omega_n^n + \nu_n^j\omega_j^i + \omega_n^i = \nu_{nk}^i\omega_0^k, \\ d\nu_i^0 + \nu_i^0\omega_0^0 - \nu_j^0\omega_i^j = \nu_{ik}^0\omega_0^k \end{gathered} \tag{5}$$

индуцирует две аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, определяемые системами форм

$$\begin{gathered} \overset{1}{\theta}{}^i = \omega_0^i, \quad \overset{1}{\theta}{}_j^i = \omega_j^i - \nu_n^i\omega_j^n - \delta_j^i(\omega_0^0 - \nu_k^0\omega_0^k) + \nu_j^0\omega_0^i, \\ \overset{2}{\theta}{}^i = \omega_0^i, \overset{2}{\theta}{}_j^i = \overset{1}{\theta}{}_j^i + \nu_n^i\omega_j^n + (\delta_j^i\nu_n^l\Lambda_{lk}^n - \delta_j^i\nu_k^0 + \delta_k^i\Lambda_{sj}^n\nu_n^s - \\ - \delta_k^i\nu_j^0 + \Lambda_n^{is}\Lambda_{sjk}^n - \Lambda_n^{is}\Lambda_{kj}^n\nu_s^0)\omega_0^k, \end{gathered} \tag{6}$$

двойственные относительно инволютивного преобразования

$$I: \begin{cases} \overline{\omega}_0^n = \omega_0^n = 0, \ \overline{\omega}_0^i = \omega_0^i, \ \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \dfrac{\Lambda_k}{n+1}\omega_0^k, \\ \overline{\omega}_n^n = \omega_n^n - \dfrac{\Lambda_k}{n+1}\omega_0^k, \ \overline{\omega}_n^0 = \omega_n^0 = 0, \ \overline{\omega}_n^i = 0, \ \overline{\omega}_i^n = -\Lambda_{ki}^n\omega_0^k, \\ \overline{\omega}_i^0 = \Lambda_{ki}^n\omega_n^k, \ \overline{\omega}_j^i = \omega_j^i + (\Lambda_n^{ik}\Lambda_{kjs}^n - \delta_j^i\dfrac{\Lambda_s}{n+1})\omega_0^s. \end{cases} \tag{7}$$

Формы (6) удовлетворяют структурным уравнениям Картана — Лаптева [2; 3]; тензоры кривизны и кручения связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ имеют соответствующее строение (см. [7]).

Пусть на гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ задана сеть Σ; в репере, отнесенном к ней, она имеет дифференциальные уравнения (см. [1])

$$\omega_i^j = a_{ik}^j\omega_0^k, \ i \neq j. \tag{8}$$

Из соотношений (7), (8) следует

$$\overline{\omega}_i^j = \overline{a}_{ik}^j\overline{\omega}_0^k, \ i \neq j, \tag{9}$$

что представляет собой уравнение «тангенциальной» сети $\overline{\Sigma} \subset \overline{V}_{n-1} \subset A_{n,n}$, двойственной исходной $\Sigma \subset V_{n-1} \subset A_{n,n}$ (здесь $\overline{V}_{n-1}$ — двойственный образ гиперповерхности V_{n-1} относительно преобразования I). В уравнениях (9) имеет место

$$\overline{a}^j_{ik} = a^j_{ik} + \Lambda^{js}_n \Lambda^n_{sik}, \ i \neq j .$$

Продолжая (8), с учетом (2) получим

$$da^j_{ik} + a^j_{ik}(\omega^0_0 + \omega^i_j - \omega^i_i - \omega^k_k) + \Lambda^n_{ik}\omega^j_n = a^j_{iks}\omega^s_0, \ i \neq j ,$$

$$2a^j_{i[ks]} = 2\sum_{t\neq k,s} a^j_{it} a^t_{[ks]} - 2\sum_{l\neq i,j} a^l_{i[k} a^j_{|l|s]} + \tag{10}$$

$$+ a^j_{is}a^s_{ks} - a^j_{ik}a^k_{sk} - R^j_{iks} + a^j_{ip}R^p_{0ks}, \ k \neq s.$$

Рассмотрим гиперповерхность $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ с полем симметрического тензора Λ^n_{ik}. Если сеть $\Sigma \subset V_{n-1}$ сопряжена [1] относительно поля тензора Λ^n_{ik}, то из уравнений (4) для компонент $\Lambda^n_{ij} = 0$, $i \neq j$ с учетом (8) находим

$$\Lambda^n_{ijk} = -(\Lambda^n_{ii}a^i_{jk} + \Lambda^n_{jj}a^j_{ik}), \ i \neq j . \tag{11}$$

Условия параллельного перенесения направления A_0A_i касательной к i-й линии сети вдоль линии сети ω^k_0 в связностях $\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla}$ имеют, соответственно, вид [6]:

$$a^j_{ik} - \nu^j_n\Lambda^n_{ik} + \delta^j_k\nu^0_i = 0, \ i \neq j; \tag{12$_1$}$$

$$a^j_{ik} + \Lambda^{js}_n\Lambda^n_{sik} + \delta^j_k\Lambda^n_{si}\nu^s_n - \Lambda^{js}_n\Lambda^n_{ki}\nu^0_s = 0, \ i \neq j . \tag{12$_2$}$$

Сеть будет чебышевской (геодезической) первого или второго рода [6], если, соответственно, соотношения (12_1) или (12_2) справедливы при любых $i \neq k$ ($i = k$).

Из соотношений (12_1), (12_2) с учетом (11) имеем:

а) при $i = k$: $$a^j_{ii} - \nu^j_n\Lambda^n_{ii} = 0, \ i \neq j , \tag{13$_1$}$$

$$a^i_{ji} + \nu^0_j = 0, \ i \neq j ; \tag{13$_2$}$$

б) при $i \neq k$: $$a^j_{ik} + \nu^0_i \delta^j_k = 0,\ i \neq j,k, \quad (14_1)$$

$$\Lambda^{ij}_n a^i_{jk} - \nu^i_n \delta^j_k = 0,\ i \neq j,k. \quad (14_2)$$

Справедлива

Теорема 1. *Сеть* $\Sigma \subset V_{n-1} \subset A_{n,n}$ *является геодезической (чебышевской) первого или второго рода тогда и только тогда, когда справедливы, соответственно, соотношения* (13_1), (13_2) *(соотношения* (14_1), (14_2)*).*

Точки $F_i^{\ j}$ $(i \neq j)$ на касательных $A_0 A_i$ к линиям сопряженной относительно поля тензора Λ^n_{ik} ($\Lambda^n_{ij} = 0$, $i \neq j$) сети $\Sigma \subset V_{n-1} \subset A_{n,n}$, определяемые по формуле

$$F_i^{\ j} = -a^j_{ij} A_0 + A_i,\ i \neq j, \quad (15)$$

являются инвариантными; эти точки В. Т. Базылевым названы [1] псевдофокусами касательных к линиям сети $\Sigma \subset V_{n-1}$. Образы (псевдофокальные гиперплоскости η^j_i пучка $\xi_i \cap \xi_0$, где $\{\xi_{\bar{I}}\}$ — тангенциальный репер [6] пространства $P_{n,n}$), двойственные точкам $F_i^{\ j}$, определяются по формуле

$$\eta^j_i = \Lambda^{jj}_n \Lambda^n_{ii} a^i_{jj} \xi_0 + \xi_i,\ i \neq j. \quad (16)$$

Из равенств (13) с учетом (15), (16) следует

Теорема 2. *Сопряженная сеть на регулярной гиперповерхности* $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ *является сетью с совпавшими псевдофокусами* $F_i^{\ j}$ *(псевдофокальными гиперплоскостями* η^j_i*) тогда и только тогда, когда относительно поля гармонических гиперпрямых* $[F_i]$ *(гармонических прямых* $[\eta_i]$*) [6] данная сеть является геодезической второго (первого) рода.*

Согласно (14), к классу сетей $\Sigma \subset V_{n-1} \subset A_{n,n}$ с совпавшими псевдофокусами (псевдофокальными гиперплоскостями) принадлежит сопряженная чебышевская сеть первого (второго) рода. Кроме того, сопряженная чебышевская сеть первого (второго) рода не зависит от выбора поля нормалей первого (второго) рода; при этом полем нормалей второго (первого) рода служит поле гармонических гиперпрямых $[F_i]$, где $F_i = \dfrac{1}{n-2}\sum_{j\neq i} F_i^{\,j}$ (прямых $[\eta_i]$, где $\eta_i = \dfrac{1}{n-2}\sum_{j\neq i}\eta_i^j$), сети.

Предположим, что сопряженная сеть $\Sigma \subset V_{n-1} \subset A_n$ является чебышевской первого рода; такая сеть характеризуется равенствами $\Lambda_{ij}^n = 0$, $i \neq j$ и, согласно (14_1), условиями:

$$\nu_i^0 = -a_{ij}^j \text{ (по } j \text{ нет суммирования)}, \qquad (17_1)$$

$$a_{ik}^j = 0 \text{ (все индексы различны)}. \qquad (17_2)$$

Дифференцируя (17_1), с учетом (5), (8), (10), (17_2) получим

$$\nu_{is}^0 = \nu_i^0\nu_s^0 - a_{ijs}^j \text{ (по } j \neq i \text{ нет суммирования)}. \qquad (18)$$

Дифференцируя равенства (17_2) ($n > 3$), с учетом (10) имеем $a_{iks}^j = 0$ (i, j, k — различны). Далее, из равенств (10) находим $a_{ijs}^j = 0$ (все индексы различны, по j нет суммирования). Теперь из равенств (18) следует $\nu_{is}^0 = \nu_i^0\nu_s^0$, $i \neq j$, откуда $\nu_{[is]}^0 = 0$. Таким образом, согласно работе [6], доказана

Теорема 3. *Двойственные аффинные связности* $\overset{1}{\nabla}$ *и* $\overset{2}{\nabla}$, *индуцируемые взаимной нормализацией регулярной гиперповерхности* $V_{n-1} \subset A_n (n > 3)$ *,когда полем нормалей второго (первого) рода служит поле гармонических гиперпрямых (прямых) сопряженной чебышевской сети* $\Sigma \subset V_{n-1} \subset A_n$ *первого (второго) рода, являются эквиаффинными, а их средняя геометрия — риманова.*

Рассмотрим голономную сопряженную сеть $\Sigma \in V_{n-1} \subset A_n$ с совпавшими псевдофокусами $F_i^{\,j}$ и псевдофокальными гиперплоскостями η_i^j (к этому классу сетей принадлежат, например, сети, являющиеся чебышевскими первого и второго родов одновременно); критерием голономности сети является

$$a^j_{[ik]} = 0,\ j \neq i,k\,. \qquad (19)$$

Согласно теореме 2 рассматриваемая сеть является геодезической первого и второго родов относительно полей ее гармонических прямых $[\eta_i]$ и гиперпрямых $[F_i]$, т. е. справедливы равенства (13).

Дифференцируя (13_2), с учетом (5), (8), (10) получим

$$\nu^0_{ik} - \nu^0_i \nu^0_k + \sum_{l\neq i,k} \nu^0_l a^l_{ik} + a^j_{ijk} = 0,\ i \neq j,k \text{ (по } j \text{ нет суммирования).}$$

Из последних равенств при $n > 3$ в силу (19) находим

$$2\nu^0_{[ik]} = -\frac{1}{n-3} \sum_{j\neq i,k} (a^j_{ijk} - a^j_{kji}),\ i \neq k\,. \qquad (20)$$

Согласно (10) справедливо

$$\begin{aligned}\sum_{j\neq i,k} a^j_{ijk} &= \sum_{j\neq i,k} a^j_{ikj} - \sum_{j\neq i,k} \nu^0_j a^j_{ik} - (n-3)\nu^0_i \nu^0_k - \\ &- \sum_{j\neq i,k} \sum_{s\neq i,j} (a^s_{ij} a^j_{sk} - a^s_{ik} a^j_{si}),\ i \neq k;\end{aligned} \qquad (21)$$

кроме того, дифференцируя (19), с учетом (10) получим

$$a^j_{[ik]s} = 0,\ j \neq i,k\,. \qquad (22)$$

Теперь из равенств (13_1), (19) — (22) находим

$$2\nu^0_{[ik]} = \frac{1}{n-3} \sum_{j\neq i,k} (a^k_{ij} \Lambda^n_{kk} - a^i_{kj} \Lambda^n_{ii}) \nu^j_n,\ i \neq k\,. \qquad (23)$$

Альтернируя равенства (11) по индексам *i*, *k* (все индексы в (11) различны), в силу (19) имеем $a^k_{ij}\Lambda^n_{kk} - a^i_{kj}\Lambda^n_{ii} = 0$. Теперь из соотношений (23) видно, что $\nu^0_{[ik]} = 0$. Следовательно, согласно работе [6], справедлива

Теорема 4. *Если гиперповерхность* $V_{n-1} \subset A_n \, (n > 3)$, *несущая голономную сопряженную сеть с совпавшими псевдофокусами и псевдофокальными гиперплоскостями, нормализована полями гармонических прямых и гиперпрямых сети, то индуцируемые аффинные связности* $\overset{1}{\nabla}$ *и* $\overset{2}{\nabla}$ *являются эквиаффинными, а их средняя геометрия — риманова.*

Список литературы

1. *Базылев В. Т.* О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства // Известия вузов. Математика. 1966. №2. С. 9—19.

2. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

3. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. общества. 1953. Т. 2. С. 275—382.

4. *Лаптев Г. Ф.* О выделении одного класса внутренних геометрий, индуцированных на поверхности пространства аффинной связности // ДАН СССР. 1943. Т. 41. №8. С. 329—331.

5. *Столяров А. В.* Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности // Вестник ЧГПУ. 2005. №4. С. 21—27.

6. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

7. *Христофорова А. В*. Двойственная геометрия гиперповерхности в пространстве аффинной связности // Вестник Чувашск. гос. пед. ун-та. 2006. №3(50). С. 35—42.

8. *Cartan E.* Leçons sur la théorie des éspaces a connexion projective. Paris, 1937.

A. Khristoforova

DUAL GEOMETRY OF NETS ON THE HYPERSURFACE IN THE SPACE OF AN AFFINE CONNECTION

This work is devoted to the geometry of nets on hypersurface in the space of an affine connection.