УДК 514.75

НОРМАЛИЗАЦИЯ ТРЕНСОНА ГИПЕРПОЛОСЫ H_m АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

И.Е. Лисицына

(Калининградский государственный университет)

Доказана обобщенная теорема Тренсона, позволившая ввести оснащение регулярной гиперполосы аффинного пространства, названное оснащением Тренсона.

Известно, что в репере 1-го порядка $\mathfrak{R}^1$ гиперполоса H_m задается следующим образом [1]:

$$\begin{aligned}
&\omega^{n+1}=0,\ \ \omega^{a}=0,\ \ \omega_{a}^{n+1}=0,\\
&\omega_{i}^{a}=\lambda_{ij}^{a}\omega^{j},\ \ \omega_{a}^{i}=\lambda_{a}^{ij}\omega_{j}^{n+1},\ \ \omega_{i}^{n+1}=a_{ij}\omega^{j},\\
&\nabla a_{ij}=-a_{ij}\omega_{n+1}^{n+1}+a_{ijk}\omega^{k},\ \nabla\lambda_{ij}^{a}=-a_{ij}\omega_{n+1}^{a}+\lambda_{ijk}^{a}\omega^{k},\\
&\nabla\lambda_{ij}^{a}=-a_{ij}\omega_{n+1}^{a}+\lambda_{ijk}^{a}\omega^{k},\\
&\nabla\lambda_{a}^{ij}=\lambda_{a}^{ij}\omega_{n+1}^{n+1}+\lambda_{a}^{ijk}\omega_{k}^{n+1},\ \ \lambda_{a[i}^{ij}a_{j]k}=0.
\end{aligned}\tag{1}$$

Покажем, что для гиперполосы $H_m \subset A_{n+1}$ имеет место обобщенная теорема Тренсона [2].

Теорема. Если проводить сечения гиперповерхности V_n^m (m+1)-мерными плоскостями, проходящими через касательную m-плоскость $T_m(A)$ базисной поверхности гиперполосы $H_m \subset A_{n+1}$, то аффинные нормали всех этих сечений лежат в (n-m+1)-мерной плоскости, проходящей через (n-m)-плоскость, сопряженную данной ($T_m(A)$) относительно асимптотического конуса.

Доказательство. Пусть Π_{m+1} и Π'_{m+1} две произвольные (m+1)-плоскости, проходящие через m-плоскость T_m. Выберем два репера $\{A, \vec{e}_i, \vec{e}_a, \vec{e}_{n+1}\}$ и $\{A, \vec{e}_i, \vec{e}_a, \vec{e}'_{n+1}\}$ так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ (i,j=$\overline{1,m}$) расположились в m-плоскости $T_m(A)$, а $\vec{e}_a$ (a,b=$\overline{m+1,n}$) в (n-m)-плоскости χ_{n-m} (в характеристике), сопряженной $T_m(A)$ относительно асимптотического конуса $\lambda^n_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta=0$ ($\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,n}$) гиперповерхности V_n^m. Тогда $\lambda^n_{ia}=0$. Вектор $\vec{e}_{n+1}$ расположим параллельно (m+1)-плоскости Π_{m+1}, а вектор $\vec{e}'_{n+1}$ второго репера - параллельно (m+1)-плоскости Π'_{m+1}. Деривационные формулы реперов $\{A, \vec{e}_i, \vec{e}_a, \vec{e}_{n+1}\}$ и $\{A, \vec{e}_i, \vec{e}_a, \vec{e}'_{n+1}\}$ имеют соответственно вид

$$d\vec{A} = \omega^i \vec{e}_i, \;\; d\vec{e}_{n+1} = \omega^i_{n+1}\vec{e}_i + \omega^a_{n+1}\vec{e}_a + \omega^{n+1}_{n+1}\vec{e}_{n+1},$$
$$d\vec{e}_a = \omega^i_a \vec{e}_i + \omega^b_a \vec{e}_b, \;\; d\vec{e}_i = \omega^a_i \vec{e}_a + \omega^j_i \vec{e}_j + \omega^{n+1}_i \vec{e}_{n+1}; \qquad (2)$$
$$d\vec{A} = \omega^i \vec{e}_i, \;\; d\vec{e}\,'_{n+1} = \tilde{\omega}^i_{n+1}\vec{e}_i + \tilde{\omega}^a_{n+1}\vec{e}_a + \tilde{\omega}^{n+1}_{n+1}\vec{e}\,'_{n+1},$$
$$d\vec{e}_a = \tilde{\omega}^i_a \vec{e}_i + \tilde{\omega}^b_a \vec{e}_b, \;\; d\vec{e}_i = \tilde{\omega}^j_i \vec{e}_j + \tilde{\omega}^a_i \vec{e}_a + \tilde{\omega}^{n+1}_i \vec{e}\,'_{n+1}.$$

Формулы перехода от репера $\{A, \vec{e}_i, \vec{e}_a, \vec{e}_{n+1}\}$ к реперу $\{A, \vec{e}_i, \vec{e}_a, \vec{e}\,'_{n+1}\}$ представим в виде

$$A=A, \; \vec{e}_i = \vec{e}_i, \; \vec{e}_a = \vec{e}_a, \; \vec{e}\,'_{n+1} = \vec{e}\,'_{n+1} + \xi^i \vec{e}_i + \xi^a \vec{e}_a. \qquad (3)$$

Дифференцируя (3) в силу (2) получаем

$$\begin{gathered}
\omega^{n+1}_i = \tilde{\omega}^{n+1}_i, \;\; \tilde{\omega}^{n+1}_{n+1} = \omega^{n+1}_{n+1} + \xi^i \omega^{n+1}_i, \\
\tilde{\omega}^a_i = \omega^a_i - \xi^a \omega^{n+1}_i, \;\; \tilde{\omega}^j_i = \omega^j_i - \xi^j \omega^{n+1}_i, \\
\tilde{\omega}^i_a = \omega^i_a, \;\; \tilde{\omega}^b_a = \omega^b_a, \;\; \tilde{\omega}^{n+1}_a = \omega^{n+1}_a = 0, \\
\tilde{\omega}^i_{n+1} + \xi^i \tilde{\omega}^{n+1}_{n+1} = \omega^i_{n+1} + d\xi^i + \xi^j \omega^i_j + \xi^a \omega^i_a, \\
\tilde{\omega}^a_{n+1} + \tilde{\omega}^{n+1}_{n+1} \xi^a = \omega^a_{n+1} + d\xi^a + \xi^i \omega^a_i + \xi^b \omega^a_b.
\end{gathered} \qquad (4)$$

Из (4), в частности, с учетом (1) получаем

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij}. \qquad (5)$$

В силу (5) имеем $\tilde{a}^{ij} = a^{ij}$. Дифференцируя (5) и учитывая, (1) получим

$$\tilde{a}_{kj}\tilde{\omega}^k_i + \tilde{a}_{ik}\tilde{\omega}^k_j - \tilde{a}_{ij}\tilde{\omega}^{n+1}_{n+1} + \tilde{a}_{ijk}\tilde{\omega}^k = a_{kj}\omega^k_i + a_{ik}\omega^k_j - a_{ij}\omega^{n+1}_{n+1} + a_{ijk}\omega^k.$$

Откуда с учетом (4) и (5) имеем

$$\tilde{a}_{ijk} = a_{ijk} + a_{lj} a_{ik} \xi^l + a_{il} a_{jk} \xi^l + a_{ij} a_{lk} \xi^l. \qquad (6)$$

Тогда из (6) следует

$$\tilde{a}^{ij}\tilde{a}_{ijk} = a^{ij} a_{jik} + (m+2)\xi^l a_{lk}. \qquad (7)$$

Рассмотрим введенные в работе [1] величины

$$b^k = -\frac{1}{m+2} a^{ij} a_{ijl} a^{lk}.$$

Согласно (7) получим

$$\tilde{b}^k = -\frac{1}{m+1} \tilde{a}^{ij} \tilde{a}_{ijl} \tilde{a}^{lk} = b^k - \xi^k. \qquad (8)$$

Так как в сечении гиперповерхности V^m_n (m+1)-плоскостями Π_{m+1} и Π'_{m+1} получаем m-поверхности, лежащие в Π_{m+1} и Π'_{m+1} соответственно, то каждое из этих сечений можно рассматривать как гиперповерхность (m+1)-мерного аффинного пространства. Поэтому можно найти аффинные нормали этих сечений. Векторы $\vec{n}_B$ и $\vec{n}\,'_B$ параллельные этим нормалям, имеют вид [3]:

$$\vec{n}_B = \vec{e}_{n+1} + b^k \vec{e}_k, \;\; \vec{n}\,'_B = \vec{e}\,'_{n+1} + \tilde{b}^k \vec{e}_k. \qquad (9)$$

Из (9), в силу (7), (2) и (8), имеем

$$\vec{n}'_B = (\vec{e}_{n+1} + \xi^a \vec{e}_a + \xi^k \vec{e}_k) + (b^k - \xi^k)\, \vec{e}_k = \vec{n}_B \xi^k \vec{e}_a .$$

Таким образом, аффинные нормали $\vec{n}'_B$ сечения гиперповерхности V_n^m плоскостью Π'_{m+1} лежат в (n-m+1)-плоскости T_{n-m+1} $[A, \vec{e}_a, \vec{n}_B]$. Так как Π'_{m+1} произвольная (m+1)-плоскость, проходящая через $T_m(A)$, то аффинные нормали всех сечений гиперповерхности V_n^m (m+1)-плоскостями, проходящими через $T_m(A)$ лежат в одной и той же (n-m+1)-плоскости T_{n-m+1}, проходящей через характеристику $\chi_{n-m}(A)$, сопряженную с $T_m(A)$.

Рассмотрим плоскость T_{n-m+1}, для которой выполняется условие

$$\delta(\vec{e}_{n+1} + b^k \vec{e}_k) = \pi^a_{n+1} \vec{e}_a + \pi^{n+1}_{n+1} (\vec{e}_{n+1} + b^k \vec{e}_k) .$$

Следовательно, плоскость T_{n-m+1} инвариантная. Так как эта плоскость имеет лишь одну общую точку с плоскостью $T_m(A)$, то построено инвариантное оснащение на гиперповерхности V_n^m.

Согласно обобщенной теореме Тренсона аффинные нормали всех плоских сечений гиперповерхности (m+1)-плоскостями, проходящими через касательную m-плоскость $T_m(A)$, лежат в плоскости T_{n-m+1}. Таким образом плоскость T_{n-m+1} является плоскостью, содержащей аффинные нормали всех таких плоских сечений. В связи с такой геометрической характеристикой полученного оснащения гиперполосы H_m, будем называть поле плоскостей T_{n-m+1} оснащением Тренсона гиперполосы H_m аффинного пространства A_{n+1}. В биекции Бомпьяни-Пантази [1] оснащению Тренсона 1-го рода $T_{n-m+1}(A)$ соответствует оснащение Тренсона $T_{m-1}(A)$ 2-го рода гиперполосы H_m, т.е. к регулярной гиперполосе H_m внутренним образом присоединяется нормализация Тренсона.

Работа выполнена по теме гранта (95-0-1.0-22).

Библиографический список

1. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос: Учебное пособие. Калининград, 1983.
2. *Transon A.* Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces // Journ. math. pures et appl. 1841. №6. P.191-208.
3. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий: Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т.2. С.275-382.

I.E. L i s i t s y n a

TRENSON′S NORMALISATION OF A HIPERSTRIP H_m OF THE AFFINE SPACE

The generalized Trenson's theorem is proved, that made possible to introduce the equipment of a regular hyperstrip of the affine space, called Trenson's equipment.