УДК 514.76

А. В. Букушева[1]

[1] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

bukusheva@list.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-5

Неголономные многообразия Кенмоцу, оснащенные обобщенной связностью Танаки — Вебстера

Рассматривается неголономное многообразие Кенмоцу, оснащенное связностью, являющейся аналогом обобщенной связности Танаки — Вебстера. Изучаемая связность получается из обобщенной связности Танаки — Вебстера заменой первого структурного эндоморфизма на второй структурный эндоморфизм. Полученная связность также получает в работе название обобщенной связности Танаки — Вебстера.

В отличие от многообразия Кенмоцу структурная форма неголономного многообразия Кенмоцу не замкнута. Следствием этого единственного различия является значительное расхождение в свойствах таких многообразий. Так, например, в работе доказывается, что альтернация тензора Риччи — Схоутена неголономного многообразия Кенмоцу, являющегося трансверсальным аналогом тензора Риччи, пропорциональна внешнему дифференциалу структурной формы. В то же время в классическом случае многообразия Кенмоцу тензор Риччи — Схоутена является симметрическим тензором.

Доказывается, что связность Танаки — Вебстера является метрической связностью. Доказывается также,

Поступила в редакцию 30.06.2021 г.

что из того, что альтернация тензора Риччи — Схоутена пропорциональна внешнему дифференциалу структурной формы, выполняется следующее утверждение: если неголономное многообразие Кенмоцу есть многообразие Эйнштейна относительно обобщенной связности Танаки — Вебстера, то оно риччи-плоское относительно этой же связности.

Ключевые слова: неголономное многообразие Кенмоцу, внутренняя связность, тензор Схоутена, тензор Риччи — Схоутена, обобщенная связность Танаки — Вебстера, многообразие Эйнштейна.

Введение

Неголономное многообразие Кенмоцу является обобщением многообразия Кенмоцу, открытого в 1972 году в работе [7]. Структуры Кенмоцу нормальны и интегрируемы [8], в то время как структуры неголономного многообразие Кенмоцу нормальны, но не интегрируемы. Неголономное многообразие Кенмоцу определено автором настоящей работы в статье [1]. Внутренняя геометрия неголономного многообразия Кенмоцу M обладает рядом замечательных свойств. Эти свойства удобно сформулировать в терминах адаптированных координат [2—4]. В частности, установлено, что тензорное поле Схоутена — Вагнера P, компоненты которого в адаптированных координатах выражаются с помощью равенств $P_{ad}^{c} = \partial_n \Gamma_{ad}^{c}$, обращается в нуль. В настоящей работе доказывается, что альтернация тензора Риччи — Схоутена, являющегося трансверсальным аналогом тензора Риччи, пропорциональна внешнему дифференциалу структурной формы. Неголономное многообразие Кенмоцу оснащается в настоящей работе аналогом обобщенной связности Танаки — Вебстера. Обобщенная связность Танаки — Вебстера введена для контактного метрического многообразия [8]. В нашем случае более эффективной является связность ∇_X^T, которую мы также будем называть обобщенной связностью Танаки — Вебстера и которая определяется с помощью равенства

$$\nabla_X^T Y = \tilde{\nabla}_X Y + \left(\left(\tilde{\nabla}_X \eta\right) Y\right) \vec{\xi} - \eta(Y) \tilde{\nabla}_X \vec{\xi} - \eta(X) \psi Y.$$

Здесь эндоморфизм ψ задается равенством

$$\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$$

и называется вторым структурным эндоморфизмом. Доказывается, во-первых, что связность ∇_X^T является метрической связностью, а во-вторых, что если неголономное многообразие Кенмоцу есть многообразие Эйнштейна относительно обобщенной связности Танаки — Вебстера, то оно риччи-плоское относительно той же связности.

Основные результаты

Почти контактным метрическим многообразием называется гладкое многообразие M нечетной размерности $n = 2m + 1$, $m \geq 1$ с заданной на нем почти контактной метрической структурой $\left(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g\right)$ [5; 6]. Здесь, в частности, η — 1-форма и $\vec{\xi}$ — векторное поле, порождающие, соответственно, распределение D: $D = \ker(\eta)$; и оснащение $D^{\perp}$ распределения D: $D^{\perp} = span(\vec{\xi})$. Гладкое распределение D называется распределением почти контактного метрического многообразия. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^{\perp}$. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие $N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где

$$N_{\varphi}(X, Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2 [X, Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] \text{ —}$$

тензор Нейенхейса эндоморфизма φ.

Нормальное почти контактное метрическое многообразие M называется неголономным многообразием Кенмоцу, если выполняется равенство $d\Omega = 2\eta \wedge \Omega$. Легко показать, что для многообразия M также выполняется условие

$$L_{\vec{\xi}}\, g = 2\left(g - \eta \otimes \eta\right).$$

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивиты тензора g в адаптированных координатах [5; 6]: $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n$; $a, b, c = 1, ..., n-1$).

Под внутренней линейной связностью на многообразии с контактной метрической структурой [4] понимается отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, удовлетворяющее обычным для ковариантной производной условиям.

Коэффициенты внутренней связности в адаптированных координатах определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma^{c}_{ab} \vec{e}_c$.

Пусть $\psi : D \to D$ — эндоморфизм, определяемый равенством $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$. Имеет место следующее предложение [3].

Предложение 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивиты неголономного многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}^{a}_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}\right), \; \tilde{\Gamma}^{n}_{ab} = \omega_{ba} - g_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}^{b}_{an} = \tilde{\Gamma}^{b}_{na} = \delta^{b}_{a} + \psi^{b}_{a}, \; \tilde{\Gamma}^{n}_{na} = \tilde{\Gamma}^{a}_{nn} = 0.$$

Назовем обобщенной связностью Танаки — Вебстера связность ∇^{T}_{X}, которая определяется с помощью равенства

$$\nabla^{T}_{X} Y = \tilde{\nabla}_X Y + \left(\left(\tilde{\nabla}_X \eta\right) Y\right) \vec{\xi} - \eta(Y) \tilde{\nabla}_X \vec{\xi} - \eta(X) \psi Y.$$

Найдем компоненты $G^{\gamma}_{\alpha\beta}$ связности ∇^T_X в адаптированных координатах.

Положим $X = \vec{e}_a$, $Y = \vec{e}_b$. Получаем

$$\nabla^T_a \vec{e}_b = \tilde{\nabla}_a \vec{e}_b - \eta\left(\tilde{\nabla}_a \vec{e}_b\right), \text{ или } G^c_{ab} = \tilde{\Gamma}^c_{ab},\ G^n_{ab} = 0.$$

Пусть теперь $X = \vec{e}_a$, $Y = \partial_n$.

Тогда $\nabla^T_a \partial_n = \tilde{\nabla}_a \partial_n - \tilde{\nabla}_a \partial_n = 0.$

Отсюда $G^b_{an} = 0$, $G^n_{an} = 0$.

Пусть далее $X = \partial_n$, $Y = \vec{e}_b$. Тогда

$$\nabla^T_a \vec{e}_b = \tilde{\nabla}_n \vec{e}_b - \eta\left(\tilde{\nabla}_n \vec{e}_b\right) - \psi \vec{e}_b, \text{ или } G^a_{nb} = \delta^a_b.$$

Таким образом, отличные от нуля коэффициенты связности ∇^T_X в адаптированных координатах имеют следующий вид:

$$G^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}\left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}\right),\ G^a_{nb} = \delta^a_b.$$

Проводя необходимые вычисления, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 2. *Обобщенная связность Танаки — Вебстера является метрической связностью.*

Вычислим необходимые нам для дальнейшего отличные от нуля компоненты тензора кривизны K связности ∇^T_X. Воспользуемся для этого формулой

$$K\left(X,Y\right)Z = \nabla^T_X \nabla^T_Y Z - \nabla^T_Y \nabla^T_X Z - \nabla^T_{[X,Y]} Z.$$

Имеем

$$K^d_{abc} = R^d_{abc} - 2\omega_{ba}\delta^d_c,$$

$$K^c_{nab} = \partial_n \Gamma^c_{ab} - \nabla_a \delta^c_b.$$

Здесь ∇ — внутренняя связность, а R^d_{abc} — компоненты тензора Схоутена [3]. Учитывая, что $P^c_{ad} = \partial_n \Gamma^c_{ab} = 0$, получаем: $K^c_{nab} = 0$.

Пусть *K(X,Y)* — соответствующий тензору *K(X,Y)Z* тензор Риччи. Имеют место равенства

$$k_{ac} = r_{ac} + 2\omega_{ad}\delta^d_c = r_{ac} + 2\omega_{ac}.$$

Предложение 3. *Для неголономного многообразия Кенмоцу размерности* $n = 2m + 1$ *выполняется следующее равенство:*

$$2m\omega_{ca} - r_{[ac]} = 0.$$

Доказательство. Как известно, в адаптированных координатах для любого почти контактного метрического многообразия выполняется следующее равенство:

$$\nabla_{[e}\nabla_{a]}g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac}.$$

В случае неголономного многообразия Кенмоцу это равенство перепишется в виде

$$0 = 4\omega_{ea}g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac}.$$

Проводя необходимые преобразования, приходим к равенству $2m\omega_{ca} = \frac{1}{2}\left(r_{ac} - r_{ca}\right)$.

Что и требовалось доказать.

Теорема. *Пусть неголономное многообразие Кенмоцу M является многообразием Эйнштейна относительно обобщенной связности Танаки — Вебстера, тогда оно риччи-плоское относительно этой связности.*

Доказательство. Пусть *M* — многообразие Эйнштейна. Отсюда, в частности, следует, что

$$k_{ac} = r_{ac} + 2\omega_{ac} = \lambda g_{ac}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тогда, с одной стороны, объект k_{ac} симметричен, так как $k_{ac} = \lambda g_{ac}$. С другой стороны, проальтернировав равенство

$$k_{ac} = r_{ac} + 2\omega_{ac} = \lambda g_{ac}$$

и воспользовавшись равенством

$$2m\omega_{ca} = \frac{1}{2}\left(r_{ac} - r_{ca}\right),$$

получаем

$$k_{[ac]} = (-2m + 2)\omega_{ac}.$$

Другими словами, если $m \neq 1$, то $k_{[ac]} \neq 0$.

Теорема доказана.

Рассмотрим пример для случая $m = 1$. Пусть $M \in \mathbb{R}^3$. $\left(\partial_\alpha\right)$ $\left(\alpha = 1, 2, 3\right)$ — стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму η, полагая $\eta = dx^3 + x^2 dx^1$. Пусть далее $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_3$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \vec{\xi} = \partial_3$, $D = span\left(\vec{e}_1, \partial_2\right)$. Определим метрический тензор, полагая $g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = g(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = e^{2x^3}$, $g(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1$. Тем самым добиваемся выполнения равенства $L_{\vec{\xi}}\, g = 2\left(g - \eta \otimes \eta\right)$. Структурный эндоморфизм зададим равенствами

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_2, \ \ \varphi(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1, \ \ \varphi(\vec{e}_2) = 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что $L_{\vec{\xi}}\,\varphi = 0$ и

$$\omega(\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)) = -\omega(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = \omega(\vec{e}_1, \vec{e}_2).$$

Последнее означает выполнение равенства

$$\omega\left(\varphi X, \varphi Y\right) = \omega\left(X, Y\right).$$

Проводя непосредственные вычисления, убеждаемся в том, что ненулевыми компонентами внутренней связности являются следующие коэффициенты: $\Gamma_{11}^{1}=\Gamma_{21}^{2}=-\Gamma_{22}^{1}=-x^{2}$. Отсюда, в частности, следует справедливость равенства $\nabla\varphi=0$. После необходимых вычислений получаем $R_{122}^{2}=1$. Таким образом,

$$k_{12}=r_{12}+2\omega_{12}=1-1=0.$$

Список литературы

1. *Букушева А.В.* О тензоре Схоутена — Вагнера неголономного многообразия Кенмоцу // Тр. семин. по геометрии и математическому моделированию. 2019. №5. С. 15—19.

2. *Букушева А.В.* Многообразия Кенмоцу с распределением нулевой кривизны // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. №64. С. 5—14.

3. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // ДГМФ. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 32—41.

4. *Букушева А.В., Галаев С.В., Иванченко И.П.* О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой // Математика. Механика. 2011. №13. С. 10—14.

5. *Галаев С.В.* Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, №2. С. 138—147.

6. *Galaev S.V.* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, №1. P. 71—76.

7. *Kenmotsu K.* A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1972. Vol. 24. P. 93—103.

8. *Pitis G.* Geometry of Kenmotsu manifolds. Brasov, 2007.

A. V. Bukusheva[1]
[1] *Saratov State University*
83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia
bukusheva@list.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-5

Non-holonomic Kenmotsu manifolds equipped with generalized Tanaka — Webster connection

Submitted on June 30, 2021

A non-holonomic Kenmotsu manifold equipped with a connection analogous to the generalized Tanaka — Webster connection, is considered. The studied connection is obtained from the generalized Tanaka — Webster connection by replacing the first structural endomorphism by the second structural endomorphism. The obtained connection is also called in the work the generalized Tanaka — Webster connection.

Unlike a Kenmotsu manifold, the structure form of a non-holonomic Kenmotsu manifold is not closed. The consequence of this single difference is a significant discrepancy in the properties of such manifolds. For example, it is proved in the paper that the alternation of the Ricci-Schouten tensor of a non-holonomic Kenmotsu manifold, which is a transverse analogue of the Ricci tensor, is proportional to the external differential of the structural form. At the same time, in the classical case of a Kenmotsu manifold, the Ricci — Schouten tensor is a symmetric tensor.

It is proved that a Tanaka — Webster connection is a metric connection. It is also proved that from the fact that the alternation of the Ricci-Schouten tensor is proportional to the external differential of the structural form, the following statement holds: if a non-holonomic Kenmotsu manifold is an Einstein manifold with respect to the generalized Tanaka — Webster connection, then it is Ricci-flat with respect to the same connection.

Keywords: non-holonomic Kenmotsu manifold, intrinsic connection, Schouten tensor, Ricci — Schouten tensor, generalized Tanaka — Webster connection, Einstein manifold.

References

1. *Bukusheva, A. V.:* On the Schouten — Wagner tensor of a nonholonomic Kenmotsu manifold. *Proceedings of the seminar on geometry and mathematical modeling*, **5**, 15—19 (2019).

2. *Bukusheva, A. V.:* Kenmotsu manifolds with a zero curvature distribution. *Journal of Mathematics and Mechanics. Tomsk State University*, **64**, 5—14 (2020).

3. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Geometry of almost contact hyperkähler manifolds. *DGMF*. Kaliningrad. **48**, 32—41 (2017).

4. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V., Ivanchenko, I. P.*: On almost contact metric structures defined by a connection over a distribution with a Finsler metric. *Mathematics. Mechanics*, **13**, 10—14 (2011).

5. *Galaev, S. V.:* Extended Structures on Codistributions of Contact Metric Manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, **17**:2, 138—147 (2017).

6. *Galaev, S. V.:* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures. *Lobachevskii J. Math.*, **39** (1), 71—76 (2018).

7. *Kenmotsu, K.:* A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tohoku Math. J.*, **24**, 93—103 (1972).

8. *Pitis, G.:* Geometry of Kenmotsu manifolds. Publishing House of Transilvania University of Brasov, Brasov (2007).