The author studies plane 2-forms which by virtue of their closureness can be considered in the capacity of symplectic structures on a Riemann manifold. The opportunity was indicated by the application of the theory of plane forms to the relativistic electrodynamics. In conclusion all plane 2-forms were found in the Euclidean space and plane 2-forms of a hypersphere of the Euclidean space were constructed were constructed.

УДК 514.75

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОМПЛЕКСЫ, ПОРОЖДЁННЫЕ КВАДРИКОЙ И ТОЧКОЙ, НЕ ИНЦИДЕНТНОЙ КВАДРИКЕ

Т.П.Ф у н т и к о в а

(Калининградский государственный университет)

В трёхмерном аффинном пространстве рассматриваются вырожденные комплексы $(QP)_{3,2}$, порождённые квадрикой Q и точкой P, не инцидентной квадрике, причём многообразие квадрик Q - трёхмерное, а точек P - двумерное. Изучен класс вырожденных комплексов $(QP)_{3,2}$, для которых центры квадрик Q описывают линию (P*).

Между образующими элементами вырожденного комплекса $(QP)_{3,2}$ устанавливается соответствие, при котором каждой квадрике Q соответствует единственная точка P, полным прообразом которой является однопараметрическое семейство квадрик Q_p. Устанавливается также соответствие между множествами точек (P*) и (P), при котором каждой точке P* соответствует на поверхности (P) линия Γ_{p*} .

Отнесём вырожденный комплекс $(QP)_{3,2}$ к реперу R = $\{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, который характеризуется следующим образом: точка A совмещена с центром P* квадрики Q, вектор $\bar{e}_1$ направлен по касательной к линии центров (P*) квадрик Q , направления векторов $\bar{e}_2, \bar{e}_3$ сопряжены направлению вектора $\bar{e}_1$ относительно квадрики Q. Концы векторов $\bar{e}_\alpha$ (точки A_α, α=1, 2, 3) инцидентны квадрике Q.

Квадрика (эллипсоид) Q в репере R задаётся уравнением

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0 .$$

Квадрике Q соответствует на поверхности (P) точка $\overline{P} = \overline{A} + t\bar{e}_3$.

Так как вектор $\bar{e}_1$ направлен по касательной к линии (P*), то $d\overline{A} = \lambda\bar{e}_1$, следовательно:

$$\omega^2 = 0,\ \ \omega^3 = 0,\ \ \omega_1^2 = a\omega^1,\ \ \omega_1^3 = b\omega^1. \tag{1}$$

Многообразие (P) двумерное, значит:

$$rang(\omega^1 + t\omega_3^1;\ \ t\omega_3^2;\ \ dt + t\omega_3^3) = 2 . \tag{2}$$

Каждой точке P* соответствует на поверхности (P) линия Γ_{P*}. Тогда при $\omega^1 = 0$:

$$rang(\omega^1 + t\omega_3^1;\ t\omega_3^2;\ dt + t\omega_3^3) = 1\ . \quad (3)$$

Определение. Комплексами К называются вырожденные комплексы $(QP)_{3,2}$, для которых точки A_α являются фокальными точками эллипсоида Q.

Теорема. Существуют два класса комплексов К: комплексы K_1 и K_2, определяемые с произволом соответственно трёх функций двух аргументов и одной функции трёх аргументов.

Доказательство. Так как точки A_α принадлежат фокальному многообразию эллипсоида Q, то система дифференциальных уравнений Пфаффа комплекса К запишется в виде

$$\omega_1^1 = -\omega^1,\quad \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega^2 = \omega^3 = 0\ ; \quad (4)$$

$$\omega_2^3 = A_2^{3\alpha}\omega_\alpha^1,\ \omega_3^2 = A_3^{2\alpha}\omega_\alpha^1,\ dt = A^\alpha\omega_\alpha^1,\ \omega_1^2 = a\omega^1,\ \omega_1^3 = b\omega^1\ , \quad (5)$$

где формы ω_α^1 приняты за базисные. Тогда условия (2) и (3) выполняются при $A_3^{22} = A^2 = 0$. Замыкая уравнения $\omega_2^2 = 0,\ \omega_3^3 = 0,\ \omega_1^1 = -\omega^1$, получим следующие соотношения: $a = b = 0,\ A_3^{21}A_2^{32} = 0,\ A_3^{23}A_2^{32} = 0,\ A_3^{21}A_2^{33} - A_3^{23}A_2^{31} = 0$.

Таким образом системы уравнений Пфаффа для комплексов K_1 и K_2 состоят из уравнений (4) и соответственно уравнений

$$\omega_2^3 = A_2^{31}\omega_1^1 + A_2^{33}\omega_3^1,\ \ \omega_3^2 = q\omega_2^3,\ \ dt = A^1\omega_1^1 + A^3\omega_3^1\ ; \quad (6)$$

$$\omega_3^2 = 0,\quad \omega_2^3 = A_2^{3\alpha}\omega_\alpha^1,\quad dt = A^1\omega_1^1 + A^3\omega_3^1. \quad (7)$$

Анализируя замкнутые системы (4), (6), (7), убеждаемся в справедливости теоремы.

Доказано, что комплексы K_1 обладают следующими геометрическими свойствами:

1) характеристическое многообразие квадрики Q состоит из прямых AA_2, AA_3 и точки A_1;
2) фокальное многообразие квадрики Q состоит из точек A_α, M(0;0;-1), N(0;-1;0);
3) фокальная точка A_1 и прямая AA_1 неподвижны;
4) фокальные поверхности (A_2), (A_3), (M), (N) являются цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными прямой AA_1, и касательными плоскостями в точках A_2, N, A_3, M, параллельными соответственно координатным плоскостям (A, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_3$) и (A, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$);
5) если $dt=0$, то поверхность (P) является цилиндрической с образующей, параллельной прямой AA_1 и касательной плоскостью в точке P, параллельной (A, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$).

Для комплексов K_2 получены следующие результаты : 1) линия (P*) центров квадрик Q является прямой; 2) характеристическое многообразие квадрик Q состоит из прямых AA_2 , AA_3 и точек A_1 , $P\left(\frac{A_2^{32}A_2^{33}}{A_2^{32}A_2^{33}+A_2^{31}};\ -\frac{A_2^{32}}{A_2^{32}A_2^{33}+A_2^{31}};\ -\frac{A_2^{33}}{A_2^{32}A_2^{33}+A_2^{31}}\right)$;

3) фокальное многообразие квадрики Q состоит из точек A_α, M, N; 4) фокальная точка A_3 описывает прямую, параллельную прямой (P*); 5) плоскость (A, $\bar{e}_1, \bar{e}_3$) неподвижна; 6) фокальная поверхность (A_2) является плоскостью, параллельной плоскости (A, $\bar{e}_1, \bar{e}_3$); 7) если $dt=0$, то поверхность (P) является плоскостью, параллельной плоскости (A, $\bar{e}_1, \bar{e}_3$).

Библиографический список

1. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур // Дифференциальная геометрия многообразий фигур / Калининград, 1973. Вып.3. С.41-49.

2. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.6. С.113-133.

T. P. F u n t i k o w a

DEGENERATED COMPLEXES GENERATED BY A QUADRIC AND A POINT NONINCIDENT TO THE QUADRIC

The author consideres degenerated complexes $(QP)_{3,2}$ in the three-dimensional affine space generated by a quadric Q and a point P nonincident to the quadric, where the manifold of quadrics Q is three-dimensional, and the set of points is two-dimensional. The class of degenerated complexes $(QP)_{3,2}$ is studied for which centers of quadrics Q describe a line (P*).

The correspondence between the generating elements of the degenerated complex $(QP)_{3,2}$ is estableshed by which to each quadric Q corresponds a single point P, whose pre-image is a one-parametric family of quadrics Q_p . The correspondence is also estableshed between the sets of points (P*) and (P) by which to each point P* corresponds a line Γ_{p^*} on the supface (P).

Degenerated complexes $(QP)_{3,2}$ are studied in detail for which three focal points of the quadric Q define mutially conjugate directions with respect to the quadric Q, where one of these directions coincides with the direction of the tangent to the line (P*). It is proved that there exists two classes of such complexes and their geometric characteristic is obtained, characteristic and focal manifolds of the quadric Q are found.

УДК 514.754.7

ОПЕРАТОР ХОДЖА НА МНОГООБРАЗИИ С ЭКВИАФФИННОЙ СТРУКТУРОЙ[1]

И.И. Ц ы г а н о к , С.Е. С т е п а н о в

(Владимирский государственный педагогический университет)

1. Настоящая работа является продолжением серии статей авторов [1] - [3] по геометрии n-мерного многообразия с эквиаффинной структурой [4]. Доказывает-

[1] Работа написана при поддержке РФФИ , проект 94 - 01 - 01595